



CEU

*Universidad
San Pablo*

Tema 4: Determinantes

Curso 2016/2017

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Madrid

Índice de contenidos

- Introducción
- Propiedades de los determinantes
- Regla de Cramer
- Inversión de matrices
- Áreas y volúmenes

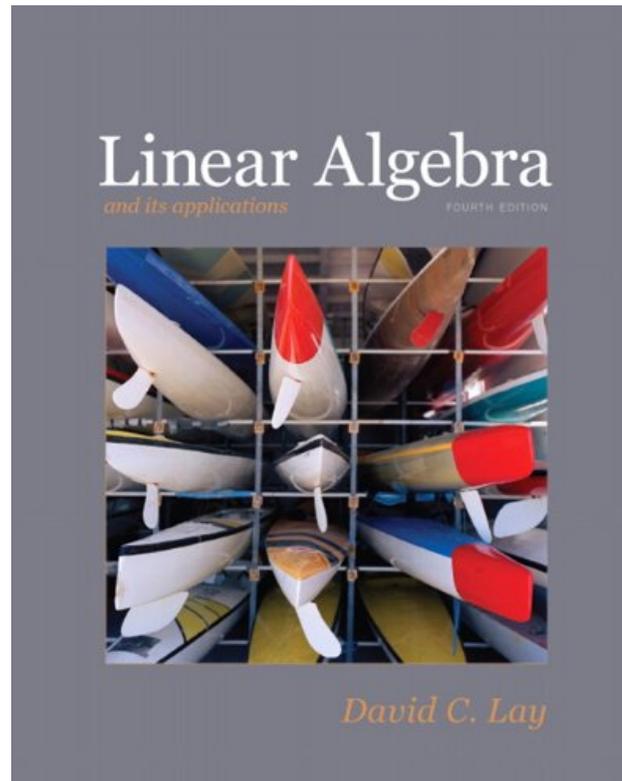
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Referencias



Lay D. *Linear algebra and its applications (4th ed).*

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



Índice de contenidos

- **Introducción**
- Propiedades de los determinantes
- Regla de Cramer
- Inversión de matrices
- Áreas y volúmenes

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



CEU

Introducción

Definición: Cofactor

El **cofactor** del elemento ij de una matriz A es:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}$$

donde A_{ij} es la matriz que resulta después de eliminar la **fila i** y la **columna j** de la matriz A .

Ejemplo

En el siguiente ejemplo, calculamos A_{32}

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Introducción

Definición: Determinante de una matriz

El **determinante** de una matriz A cuadrada de $n \times n$ ($|A|$ or $\det\{A\}$) es un *mapping* o función de $\mathcal{M}_{n \times n}$ en \mathbb{R} , tal que

$$|A| = \begin{cases} A & n = 1 \\ a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \dots + a_{1n}C_{1n} & n \geq 2 \end{cases}$$

donde a_{ij} es el **elemento** ij de la matriz A

Octave

det(A)

Ejemplo: cálculo del determinante

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}$$
$$\det A = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} - 5 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= 1(0 - 2) - 5(0 - 0) + 0(-4 - 0) = -2$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Introducción

Teorema

Para $n \geq 2$, el **determinante** se puede calcular como la **suma ponderada** de los cofactores de **cualquier fila o columna**

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij}$$

Ejemplo (...continuación)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33}$$
$$= (-1)^{3+1}a_{31} \det A_{31} + (-1)^{3+2}a_{32} \det A_{32} + (-1)^{3+3}a_{33} \det A_{33}$$
$$= 0 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



Introducción

Ejemplo

Calcular el determinante de $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

Solución:

$$\det A = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot C_{21} + 0 \cdot C_{31} - 0 \cdot C_{41} + 0 \cdot C_{51}$$

$$\det A = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} \longrightarrow \det A = 3 \cdot 2 \cdot (-2) = -12$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

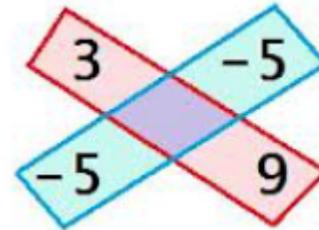


Introducción

Teorema: Casos particulares útiles

Para $n = 2$,

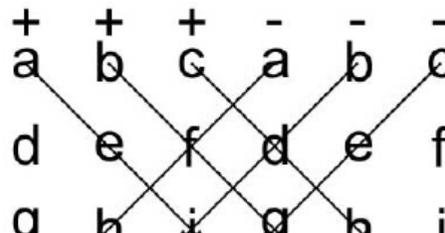
$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$



$$\begin{aligned} & 3 \times 9 - (-5) \times (-5) \\ & = 27 - 25 \\ & = 2 \end{aligned}$$

Para $n = 3$,

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99



Introducción

Teorema: Casos particulares útiles (...continuación)

Si A es una **matriz triangular**, entonces el **determinante de A** es el **producto** de las entradas de la **diagonal principal de A**

$$|A| = \prod_{i=1}^n a_{ij}$$

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & \frac{3}{5} & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -10 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 |1| = 1$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Ejercicios

- Tema 4_Enunciados de ejercicios I
 - Ejercicio 3.1.42
 - Ejercicio 3.1.43 (** Octave; $A = rand(5)$ **)
 - Ejercicio 3.1.44 (** Octave **)
 - Ejercicio 3.1.45 (** Octave **)
 - Ejercicio 3.1.46 (** Octave **)

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



CEU

Índice de contenidos

- Introducción
- **Propiedades de los determinantes**
- Regla de Cramer
- Inversión de matrices
- Áreas y volúmenes

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Propiedades de los determinantes

Teorema: Determinante de una multiplicación

$$\det\{AB\} = \det\{A\} \det\{B\}$$

$$\det\{kA\} = k^n \det\{A\}$$

Nota: en general, $\det\{A + B\} \neq \det\{A\} + \det\{B\}$

Teorema: Determinante de operaciones por filas

1. Si un **múltiplo** de una fila de la **matriz A** se añade a otra fila para obtener la **matriz B**, entonces $\det\{B\} = \det\{A\}$

2. Si se **intercambian** 2 filas de la **matriz A** para obtener la matriz **B**, entonces $\det\{B\} = -\det\{A\}$

3. Si se **multiplica** una fila de la **matriz A** por **k** para obtener la matriz **B**, entonces

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



Propiedades de los determinantes

Ejemplo

Consideremos las siguientes transformaciones que son de la forma $B = EA$

$$1. B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \Rightarrow |B| = |E||A| = 1|A|$$

$$2. B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \Rightarrow |B| = |E||A| = -1|A|$$

$$3. B = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A \Rightarrow |B| = |E||A| = k|A|$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Propiedades de los determinantes

Ejemplo

$$\begin{array}{l} r_1 \leftarrow \frac{1}{2}r_1 \\ \\ r_2 \leftarrow r_2 - 3r_1 \\ r_2 \leftarrow r_2 - r_1 \end{array} \left| \begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \\ B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \\ B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right| \begin{array}{l} |A| \\ \\ |B_1| = \frac{1}{2}|A| \Rightarrow |A| = 2|B_1| \\ \\ |B_2| = |B_1| \Rightarrow \\ |A| = 2|B_2| = 2(1 \cdot (-1) \cdot 0) = 0 \end{array}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



Propiedades de los determinantes

Teorema

A es invertible, si y sólo si, $|A| \neq 0$. En ese caso $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

Corolario

Si $|A| = 0$, entonces las columnas de A no son linealmente independientes

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -6 & 7 & -7 & 4 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 + 2F_1} \det A = \det \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{bmatrix} = 0$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Propiedades de los determinantes

Teorema

Para cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ se verifica que $|A| = |A^T|$

Corolario

El efecto de las operaciones por columnas sobre los determinantes es el mismo que el de las operaciones por filas

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Ejercicios

- Tema 4_Enunciados de ejercicios II
 - Ejercicio 3.2.14
 - Ejercicio 3.2.15
 - Ejercicio 3.2.18
 - Ejercicio 3.2.24
 - Ejercicio 3.2.31
 - Ejercicio 3.2.33
 - Ejercicio 3.2.45 (** Octave **)

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



CEU

Índice de contenidos

- Introducción
- Propiedades de los determinantes
- **Regla de Cramer**
- Inversión de matrices
- Áreas y volúmenes

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Regla de Cramer

La **Regla de Cramer** es útil para una **comprensión teórica** de lo que son los **determinantes** y sus **propiedades**, pero **no** es tan útil **para realizar cálculos** de una **manera eficiente**

Teorema: Regla de Cramer

Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ una matriz **invertible**. Para cualquier $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, la ***i*-ésima entrada** de la solución única de \mathbf{x} de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es:

$$x_i = \frac{\det\{A_i(\mathbf{b})\}}{\det\{A\}}$$

donde $A_i(\mathbf{b})$ es la **matriz A** en la que la ***i*-ésima columna** ha sido sustituida por \mathbf{b} , es decir,

$$A_i(\mathbf{b}) = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_{i-1} \ \mathbf{b} \ \mathbf{a}_{i+1} \ \dots \ \mathbf{a}_n)$$

Demostración

Sean \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) las columnas de la matriz identidad I_n . Consideramos el producto:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Regla de Cramer

Teorema: Regla de Cramer (...continuación demostración)

Ahora tomamos los determinantes en ambos lados

$$|A_i(\mathbf{b})| = |A|_i(\mathbf{x}) = |A||I_i(\mathbf{x})| = |A|x_i \Rightarrow x_i = \frac{|A_i(\mathbf{b})|}{|A|}$$

Ejemplo

Usar la **Regla de Cramer** para resolver el siguiente sistema:

$$3x_1 - 2x_2 = 6$$

$$-5x_1 + 4x_2 = 8$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Regla de Cramer

Teorema: Regla de Cramer (...continuación demostración)

Ahora tomamos los determinantes en ambos lados

$$|A_i(\mathbf{b})| = |A|_i(\mathbf{x}) = |A| |I_i(\mathbf{x})| = |A| x_i \Rightarrow x_i = \frac{|A_i(\mathbf{b})|}{|A|}$$

Ejemplo

Usar la **Regla de Cramer** para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 6 \\ -5x_1 + 4x_2 &= 8 \end{aligned}$$

Solución

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_1(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\det A_1(\mathbf{b})}{\det A} = \frac{24 + 16}{2} = 20$$

$$\det A_2(\mathbf{b}) = 24 + 30$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Regla de Cramer

Ejemplo

Considerar el siguiente sistema de ecuaciones

$$3sx_1 - 2x_2 = 4$$

$$-6x_1 + sx_2 = 1$$

en el que s es un parámetro no especificado. Determinar los **valores de s** para los que el sistema tiene una **única solución**, y usar la **Regla de Cramer** para describir la solución.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Regla de Cramer

Ejemplo

Considerar el siguiente sistema de ecuaciones

$$3sx_1 - 2x_2 = 4$$

$$-6x_1 + sx_2 = 1$$

en el que s es un parámetro no especificado. Determinar los **valores de s** para los que el sistema tiene una **única solución**, y usar la **Regla de Cramer** para describir la solución.

Solución

$$A = \begin{bmatrix} 3s & -2 \\ -6 & s \end{bmatrix}, \quad A_1(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix}, \quad A_2(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 3s & 4 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 3s^2 - 12 = 3(s + 2)(s - 2)$$

El sistema tiene una única solución cuando $s \neq \pm 2$. En esos casos, las soluciones serían:

$$x_1 = \frac{\det A_1(\mathbf{b})}{\det A} = \frac{4s + 2}{3(s + 2)(s - 2)}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



Índice de contenidos

- Introducción
- Propiedades de los determinantes
- Regla de Cramer
- **Inversión de matrices**
- Áreas y volúmenes

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



CEU

Inversión de matrices

Algoritmo para invertir una matriz

Sabemos que la inversa es una matriz tal que $AA^{-1} = I_n$. Si llamamos \mathbf{x}_i a la i -ésima columna de A^{-1} , entonces tenemos:

$$AA^{-1} = A(\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \dots \quad \mathbf{x}_n) = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \dots \quad \mathbf{e}_n)$$

Es decir, tenemos que resolver simultáneamente n sistemas de ecuaciones de la forma $A\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j$. La i -ésima entrada de esas columnas es:

$$x_{ij} = \frac{|A_i(\mathbf{e}_j)|}{|A|}$$

Si ahora calculamos el determinante en el numerador expandiendo la j -ésima columna, tenemos $|A_i(\mathbf{e}_j)| = (-1)^{i+j}|A_{ji}|$, donde A_{ji} es la submatriz resultante de eliminar la j -ésima fila y la i -ésima columna (o lo que es lo mismo, el cofactor del elemento ji)

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Inversión de matrices

Definición: Adjunta de una matriz

Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$. La **adjunta** de la matriz A es **otra matriz de $n \times n$** , denotada como A^* o $\text{adj } A$, tal que:

$$A_{ij}^* = C_{ij}$$

Algoritmo para invertir una matriz (...continuación)

Finalmente tenemos:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Hay que tener cuidado porque los índices de los cofactores están traspuestos con respecto al orden estándar. En consecuencia:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Inversión de matrices

Teorema

La **adjunta de la traspuesta** de una matriz es **igual** que la **traspuesta de la adjunta**

$$(A^T)^* = (A^*)^T$$

Ejemplo

Calcular la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 1$

Solución

$$\begin{array}{lll} C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 & C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 & C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 & C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 & C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 & C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 & C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \end{array}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Índice de contenidos

- Introducción
- Propiedades de los determinantes
- Regla de Cramer
- Inversión de matrices
- **Áreas y volúmenes**

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



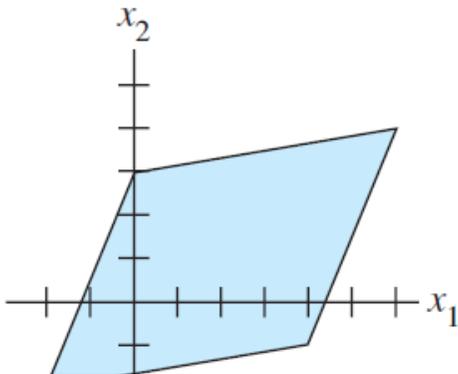
Áreas y volúmenes

Teorema: Área de un paralelogramo, Volumen de un paralelepípedo

Si $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$, entonces $|\det\{A\}|$ es el **área del paralelogramo** formado por las columnas de A . Si $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$, entonces $|\det\{A\}|$ es el **volumen del paralelepípedo** formado por las columnas de A .

Ejemplo

Sea el **paralelogramo ABCD** con $A=(-2, -2)$, $B=(0, 3)$, $C=(4, -1)$ y $D=(6, 4)$.



El área del paralelogramo puede ser calculado como:

$$\begin{aligned} & \left| \det \left(\mathbf{B} - \mathbf{A} \quad \mathbf{C} - \mathbf{A} \right) \right| = \\ & \left| \det \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \right| = \\ & \left| \det \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \right| = |-28| = 28 \end{aligned}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Áreas y volúmenes

Teorema: Área después de una transformación lineal

Consideremos la transformación $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

- Si $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$ y S es un **paralelogramo** en \mathbb{R}^2 , entonces:

$$\text{Area}\{T(S)\} = |\det\{A\}| \cdot \text{Area}\{S\}$$

- Si $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$ y S es un **paralelepípedo** en \mathbb{R}^3 , entonces:

$$\text{Volumen}\{T(S)\} = |\det\{A\}| \cdot \text{Volumen}\{S\}$$

Demostración

Lo demostraremos para el caso de **2D** (el caso **3D** sería análogo).

Consideremos las **columnas de A** , $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2)$. Sin pérdida de generalidad, podemos considerar que **S está en el origen** y cuyos lados vienen dados por **\mathbf{b}_1 y \mathbf{b}_2** :

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x} = s_1 \mathbf{b}_1 + s_2 \mathbf{b}_2 \ \forall s_1, s_2 \in [0, 1]\}$$

La imagen de **S** bajo la transformación **T** sería:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Áreas y volúmenes

Teorema: Área después de una transformación lineal (...continuación)

Por lo tanto, el área de $T(S)$ es:

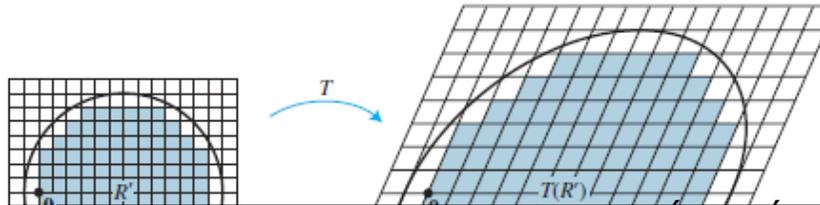
$$\begin{aligned}\text{Area}\{T(S)\} &= |\det (Ab_1 \quad Ab_2)| = |\det \{A (\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2)\}| = |\det \{AB\}| \\ &= |\det A| |\det B| = |\det A| \text{Area}\{S\}\end{aligned}$$

Teorema

El teorema anterior es válido para cualquier región cerrada en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 con área o volumen finito.

Demostración

Sólo necesitamos dividir la región en paralelogramos (o paralelepípedos) muy pequeños (infinitamente pequeños) y aplicar el teorema previo para cada una de sus piezas.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



Áreas y volúmenes

Ejemplo

Supongamos que el **disco unitario** definido como

$$D = \{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \mid u_1^2 + u_2^2 \leq 1 \}$$

es transformado con la transformación

$$T(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mathbf{u}$$

para producir

$$E \equiv T(D) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} au_1 \\ bu_2 \end{pmatrix} \right\}$$

Explotando los hechos de que $x_1 = au_1 \Rightarrow u_1 = \frac{x_1}{a}$, $x_2 = bu_2 \Rightarrow u_2 = \frac{x_2}{b}$, podemos también caracterizar la región transformada como

$$E = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 \leq 1 \right\}$$

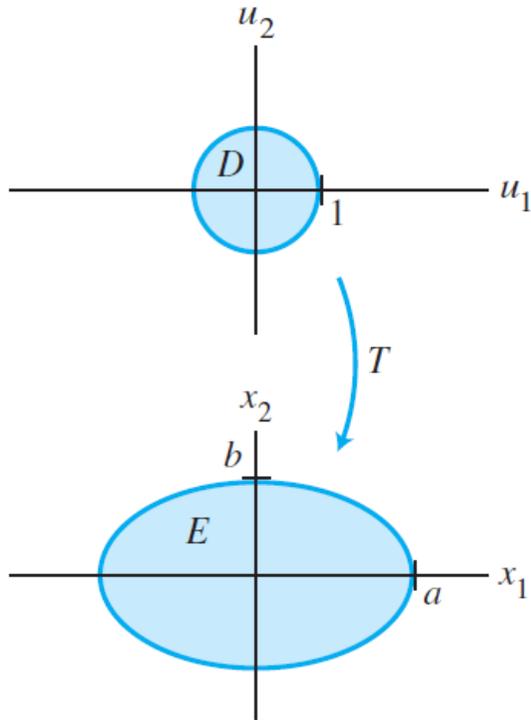
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Áreas y volúmenes

Ejemplo (...continuación)



$$\begin{aligned}\text{Area}\{E\} &= |\det A| \text{Area}\{D\} = (ab)(\pi(1)^2) \\ &= \pi ab\end{aligned}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Ejercicios

- Tema 4_Enunciados de ejercicios III
 - Ejercicio 3.3.1
 - Ejercicio 3.3.7
 - Ejercicio 3.3.11
 - Ejercicio 3.3.21
 - Ejercicio 3.3.25
 - Ejercicio 3.3.26
 - Ejercicio 3.3.29

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70