CEU
Universidad
San Pablo

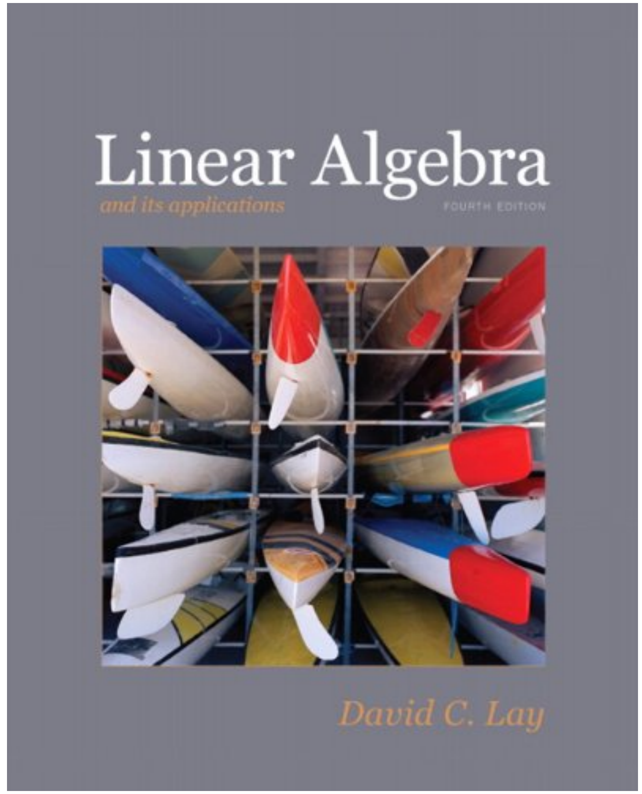
Tema 4: Determinantes

Curso 2016/2017

Madrid

Índice de contenidos

Referencias



Lay D. *Linear algebra and its applications (4th ed)*.

Índice de contenidos

- Introducción
- Propiedades de los determinantes
- Regla de Cramer
- Inversión de matrices
- Áreas y volúmenes

Definición: Cofactor

El **cofactor** del elemento *ij* de una matriz *A* es:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \left|A_{ij}\right|$$

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}$$

donde A_{ij} es la matriz que resulta después de eliminar la fila *i* y la columna *j* de la matriz *A*.

Ejemplo

En el siguiente ejemplo, calculamos A_{32}

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Introducción

Definición: Determinante de una matriz

El **determinante** de una matriz *A* cuadrada de *n x n* ($|A|$ or $\det\{A\}$) es un *mapping* o función de $\mathcal{M}_{nxn}$ en $\mathbb{R}$, tal que

$$|A| = \begin{cases} A & n = 1 \\ a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \ldots + a_{1n}C_{1n} & n \geq 2 \end{cases}$$

donde a_{ij} es el elemento *ij* de la matriz *A*

Octave

det(A)

Ejemplo: cálculo del determinante

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + a_{13}\det A_{13}$$

$$\det A = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} - 5 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= 1(0-2) - 5(0-0) + 0(-4-0) = -2$$

d

Teorema

Para $n \geq 2$, el determinante se puede calcular como la suma ponderada de los cofactores de cualquier fila o columna

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Ejemplo (…continuación)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33}$$

$$= (-1)^{3+1} a_{31} \det A_{31} + (-1)^{3+2} a_{32} \det A_{32} + (-1)^{3+3} a_{33} \det A_{33}$$

$$= 0 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ \dots & \dots \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \dots & \dots \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Introducción

Ejemplo

Calcular el determinante de $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

Solución:

$$\det A = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot C_{21} + 0 \cdot C_{31} - 0 \cdot C_{41} + 0 \cdot C_{51}$$

$$\det A = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

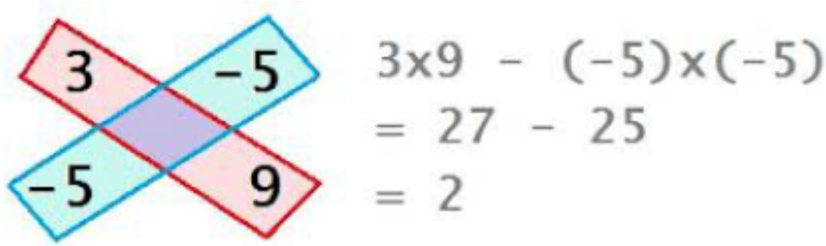
$$\det A = 3 \cdot 2 \cdot (-2) = -12$$

Introducción

Teorema: Casos particulares útiles

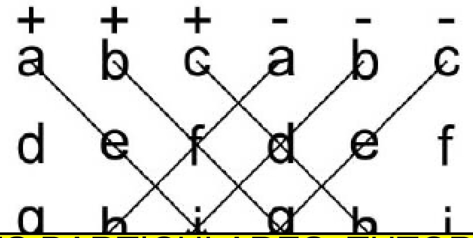
Para *n = 2*,

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$



Para *n = 3*,

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$



Teorema: Casos particulares útiles (…continuación)

Si *A* es una matriz triangular, entonces el determinante de *A* es el producto de las entradas de la diagonal principal de *A*

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ij}$$

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & \frac{3}{5} & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -10 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1\,|1| = 1$$

Calcular el determinante utilizan
mucho más rápidos ($O(n^3)$)
determinante que la matriz origi

Ejercicios

- Tema 4_Enunciados de ejercicios I
  - Ejercicio 3.1.42
  - Ejercicio 3.1.43 (** Octave; *A = rand(5)* **)
  - Ejercicio 3.1.44 (** Octave **)
  - Ejercicio 3.1.45 (** Octave **)
  - Ejercicio 3.1.46 (** Octave **)

Índice de contenidos

- Introducción
- Propiedades de los determinantes
- Regla de Cramer
- Inversión de matrices
- Áreas y volúmenes

Propiedades de los determinantes

Teorema: Determinante de una multiplicación

$\det\{AB\} = \det\{A\}\det\{B\}$
$\det\{kA\} = k^n\det\{A\}$

Nota: en general, $\det\{A + B\} \neq \det\{A\} + \det\{B\}$

Teorema: Determinante de operaciones por filas

1. Si un múltiplo de una fila de la matriz A se añade a otra fila para obtener la matriz B, entonces $\det\{B\} = \det\{A\}$
2. Si se intercambian 2 filas de la matriz A para obtener la matriz B, entonces $\det\{B\} = -\det\{A\}$
3. Si se multiplica una fila de la matriz A por k para obtener la matriz B, entonces $\det\{B\} = k\cdot\det\{A\}$

Propiedades de los determinantes

Ejemplo

Consideremos las siguientes transformaciones que son de la forma *B = EA*

1. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \Rightarrow |B| = |E||A| = 1|A|$

2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \Rightarrow |B| = |E||A| = -1|A|$

3. $B = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \Rightarrow |B| = |E||A| = k|A|$

Propiedades de los determinantes

Ejemplo

	$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\|A\|$
$\mathbf{r}_1 \leftarrow \frac{1}{2}\mathbf{r}_1$	$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\|B_1\| = \frac{1}{2}\|A\| \Rightarrow \|A\| = 2\|B_1\|$
$\mathbf{r}_2 \leftarrow \mathbf{r}_2 - 3\mathbf{r}_1$ $\mathbf{r}_2 \leftarrow \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$	$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\|B_2\| = \|B_1\| \Rightarrow$ $\|A\| = 2\|B_2\| = 2(1 \cdot (-1) \cdot 0) = 0$

Propiedades de los determinantes

Teorema

A es invertible, si y sólo si, $|A| \neq 0$. En ese caso $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

Corolario

Si $|A| = 0$, entonces las columnas de *A* no son linealmente independientes

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -6 & 7 & -7 & 4 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3 \leftarrow F_3 + 2F_1]{} \det A = \det \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{bmatrix} = 0$$

Propiedades de los determinantes

Teorema

Para cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_{nxn}$ se verifica que $|A| = |A^T|$

Corolario

El efecto de las operaciones por columnas sobre los determinantes es el mismo que el de las operaciones por filas

Ejercicios

- Tema 4_Enunciados de ejercicios II
  - Ejercicio 3.2.14
  - Ejercicio 3.2.15
  - Ejercicio 3.2.18
  - Ejercicio 3.2.24
  - Ejercicio 3.2.31
  - Ejercicio 3.2.33
  - Ejercicio 3.2.45 (** Octave **)

Índice de contenidos

Regla de Cramer

La Regla de Cramer es útil para una comprensión teórica de lo que son los determinantes y sus propiedades, pero no es tan útil para realizar cálculos de una manera eficiente

Teorema: Regla de Cramer

Sea $A \in \mathcal{M}_{nxn}$ una matriz invertible. Para cualquier $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^n$, la *i-ésima* entrada de la solución única de **x** de A**x** = **b** es:

$$x_i = \frac{\det\{A_i(\mathbf{b})\}}{\det\{A\}}$$

donde A_i(**b**) es la matriz A en la que la *i-ésima* columna ha sido sustituida por **b**, es decir,

$$A_i(\mathbf{b}) = (\mathbf{a}_1 \;\; \mathbf{a}_2 \;\; \ldots \;\; \mathbf{a}_{i-1} \;\; \mathbf{b} \;\; \mathbf{a}_{i+1} \;\; \ldots \;\; \mathbf{a}_n)$$

Demostración

Sean $\mathbf{e}_i$ (i = 1, 2, …, n) las columnas de la matriz identidad $\boldsymbol{I_n}$. Consideramos el producto:

$$AI_i(\mathbf{x}) = ($$
$$= ($$

Regla de Cramer

Teorema: Regla de Cramer (…continuación demostración)

Ahora tomamos los determinantes en ambos lados

$$|A_i(\mathbf{b})| = |AI_i(\mathbf{x})| = |A||I_i(\mathbf{x})| = |A|x_i \Rightarrow x_i = \frac{|A_i(\mathbf{b})|}{|A|}$$

Ejemplo

Usar la Regla de Cramer para resolver el siguiente sistema:

$$3x_1 - 2x_2 = 6$$
$$-5x_1 + 4x_2 = 8$$

Regla de Cramer

Teorema: Regla de Cramer (…continuación demostración)

Ahora tomamos los determinantes en ambos lados

$$|A_i(\mathbf{b})| = |AI_i(\mathbf{x})| = |A||I_i(\mathbf{x})| = |A|x_i \Rightarrow x_i = \frac{|A_i(\mathbf{b})|}{|A|}$$

Ejemplo

Usar la Regla de Cramer para resolver el siguiente sistema:

$$3x_1 - 2x_2 = 6$$
$$-5x_1 + 4x_2 = 8$$

Solución

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_1(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\det A_1(\mathbf{b})}{\det A} = \frac{24 + 16}{2} = 20$$

$$\det A_2(\mathbf{b}) \quad 24 + 30$$

Regla de Cramer

Ejemplo

Considerar el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3sx_1 - 2x_2 &= 4 \\ -6x_1 + sx_2 &= 1 \end{aligned}$$

en el que s es un parámetro no especificado. Determinar los valores de s para los que el sistema tiene una única solución, y usar la Regla de Cramer para describir la solución.

Regla de Cramer

Ejemplo

Considerar el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3sx_1 - 2x_2 &= 4 \\ -6x_1 + sx_2 &= 1 \end{aligned}$$

en el que s es un parámetro no especificado. Determinar los valores de s para los que el sistema tiene una única solución, y usar la Regla de Cramer para describir la solución.

Solución

$$A = \begin{bmatrix} 3s & -2 \\ -6 & s \end{bmatrix}, \quad A_1(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix}, \quad A_2(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 3s & 4 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 3s^2 - 12 = 3(s+2)(s-2)$$

El sistema tiene una única solución cuando $s \neq \pm 2$. En esos casos, las soluciones serían:

$$x_1 = \frac{\det A_1(\mathbf{b})}{\det A} = \frac{4s+2}{3(s+2)(s-2)}$$

$$x_2 = \frac{\det A_2(\mathbf{b})}{\det A}$$

Índice de contenidos

Inversión de matrices

Algoritmo para invertir una matriz

Sabemos que la inversa es una matriz tal que $AA^{-1} = I_n$. Si llamamos $\mathbf{x}_i$ a la *i-ésima* columna de A^{-1}, entonces tenemos:

$$AA^{-1} = A\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_n\end{pmatrix}$$

Es decir, tenemos que resolver simultáneamente *n* sistemas de ecuaciones de la forma $A\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j$. La *i-ésima* entrada de esas columnas es:

$$x_{ij} = \frac{|A_i(\mathbf{e}_j)|}{|A|}$$

Si ahora calculamos el determinante en el numerador expandiendo la *j-ésima* columna, tenemos $|A_i(\mathbf{e}_j)| = (-1)^{i+j}|A_{ji}|$, donde A_{ji} es la submatriz resultante de eliminar la *j-ésima* fila y la *i-ésima* columna (o lo que es lo mismo, el cofactor del elemento *ji*)

Inversión de matrices

Definición: Adjunta de una matriz

Sea $A \in \mathcal{M}_{nxn}$. La **adjunta** de la matriz A es otra matriz de n x n, denotada como A^* o adj A, tal que:

$$A^*_{ij} = C_{ij}$$

Algoritmo para invertir una matriz (…continuación)

Finalmente tenemos:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Hay que tener cuidado porque los índices de los cofactores están traspuestos con respecto al orden estándar. En consecuencia:

Inversión de matrices

Teorema

La adjunta de la traspuesta de una matriz es igual que la traspuesta de la adjunta

$$(A^T)^* = (A^*)^T$$

Ejemplo

Calcular la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ → $|A| = 1$

Solución

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Índice de contenidos

- Introducción
- Propiedades de los determinantes
- Regla de Cramer
- Inversión de matrices
- Áreas y volúmenes

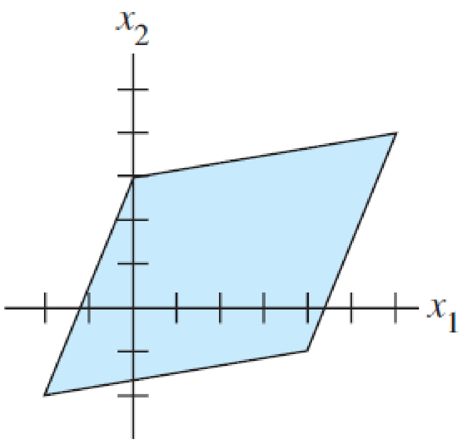
Áreas y volúmenes

Teorema: Área de un paralelogramo, Volumen de un paralelepípedo

Si $A \in \mathcal{M}_{2x2}$, entonces $|\det\{A\}|$ es el área del paralelogramo formado por las columnas de A. Si $A \in \mathcal{M}_{3x3}$, entonces $|\det\{A\}|$ es el volumen del paralelepípedo formado por la columnas de A.

Ejemplo

Sea el paralelogramo *ABCD* con *A*=(-2, -2), *B*=(0, 3), *C*=(4, -1) y *D*=(6, 4).



El área del paralelogramo puede ser calculado como:

$$\left|\det\begin{pmatrix} \mathbf{B}-\mathbf{A} & \mathbf{C}-\mathbf{A} \end{pmatrix}\right| =$$

$$\left|\det\left(\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}\right)\right| =$$

$$\left|\det\begin{pmatrix}2 & 6\\5 & 1\end{pmatrix}\right| = |-28| = 28$$

Teorema: Área después de una transformación lineal

Consideremos la transformación $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

- Si $A \in \mathcal{M}_{2x2}$ y S es un paralelogramo en $\mathbb{R}^2$, entonces:

$$Area\{T(S)\} = |\det\{A\}| \cdot Area\{S\}$$

- Si $A \in \mathcal{M}_{3x3}$ y S es un paralelepípedo en $\mathbb{R}^3$, entonces:

$$Volumen\{T(S)\} = |\det\{A\}| \cdot Volumen\{S\}$$

Demostración

Lo demostraremos para el caso de 2D (el caso 3D sería análogo).
Consideremos las columnas de A, $A = (\mathbf{a}_1 \ \ \mathbf{a}_2)$. Sin pérdida de generalidad, podemos considerar que S está en el origen y cuyos lados vienen dados por $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$:

$$S = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | \mathbf{x} = s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2 \ \forall s_1, s_2 \in [0,1]\right\}$$

La imagen de S bajo la transformación T sería:

$$T(S) = \{\mathbf{y} \in$$

que es otro paralelogramo.

Áreas y volúmenes

Teorema: Área después de una transformación lineal (…continuación)

Por lo tanto, el área de $T(S)$ es:

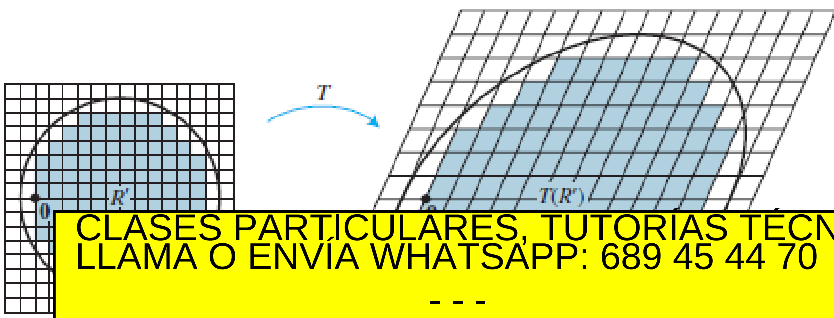
$$\begin{aligned}\text{Area}\{T(S)\} &= \left|\det\left(A\mathbf{b}_1 \quad A\mathbf{b}_2\right)\right| = \left|\det\left\{A\left(\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2\right)\right\}\right| = \left|\det\{AB\}\right| \\ &= \left|\det A\right|\left|\det B\right| = \left|\det A\right|\text{Area}\{S\}\end{aligned}$$

Teorema

El teorema anterior es válido para cualquier región cerrada en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ con área o volumen finito.

Demostración

Sólo necesitamos dividir la región en paralelogramos (o paralelepípedos) muy pequeños (infinitamente pequeños) y aplicar el teorema previo para cada una de sus piezas.



Ejemplo

Supongamos que el disco unitario definido como

$$D = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 | u_1^2 + u_2^2 \leq 1\}$$

es transformado con la transformación

$$T(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mathbf{u}$$

para producir

$$E \equiv T(D) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \middle| \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} au_1 \\ bu_2 \end{pmatrix} \right\}$$

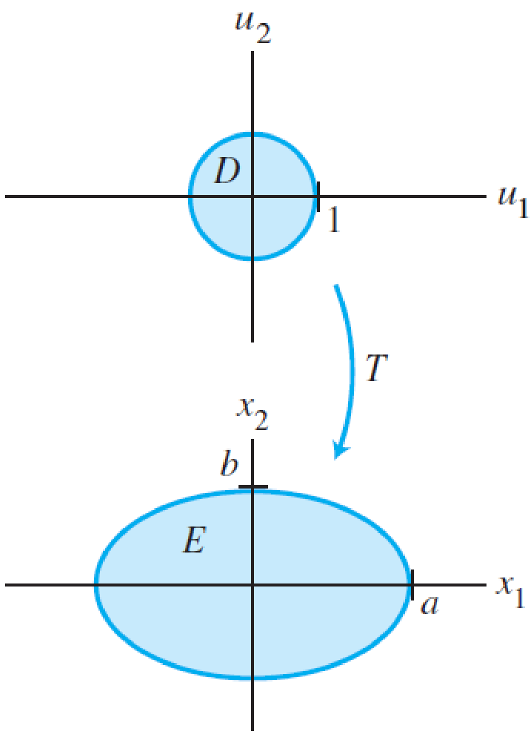
Explotando los hechos de que $x_1 = au_1 \Rightarrow u_1 = \frac{x_1}{a}$, $x_2 = bu_2 \Rightarrow u_2 = \frac{x_2}{b}$, podemos también caracterizar la región transformada como

$$E = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \middle| \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 \leq 1 \right\}$$

que es una elipse sólida.

Áreas y volúmenes

Ejemplo (…continuación)



$$
\begin{aligned}
\text{Area}\{E\} &= |\det A|\text{Area}\{D\} = (ab)(\pi(1)^2) \\
&= \pi ab
\end{aligned}
$$

Ejercicios

- Tema 4_Enunciados de ejercicios III
  - Ejercicio 3.3.1
  - Ejercicio 3.3.7
  - Ejercicio 3.3.11
  - Ejercicio 3.3.21
  - Ejercicio 3.3.25
  - Ejercicio 3.3.26
  - Ejercicio 3.3.29