Tema 4: Transformada de Fourier de Señales de Tiempo Continuo (FT)

* Introducción

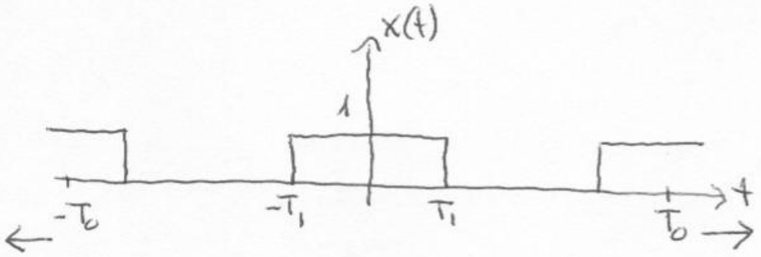
Representación de señales no periódicas y periódicas como C.L. de exponenciales complejas → Generalización del FS

* FT de señales aperiódicas

• Significado y expresión general de la FT

"La parte de la caracterización frecuencial de una señal periódica que se mantiene invariable cuando su periodo aumenta indefinidamente":

Ejemplo:



$$\xrightarrow{FS} \quad a_k = \frac{2\,\text{sen}(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T_0}, \quad a_0 = \frac{2T_1}{T_0}$$

① Representación de a_k en función de k:

- $|a_k|$ disminuye, ya que la potencia de $x(t)$ disminuye
- ω_0 disminuye $\Rightarrow$ un mismo coeficiente a_k corresponde a una pulsación menor, $k\omega_0$.

$x(t)$ presenta armónicos cada vez más juntos en ω y de menor valor

② Representación de a_k en función de ω:

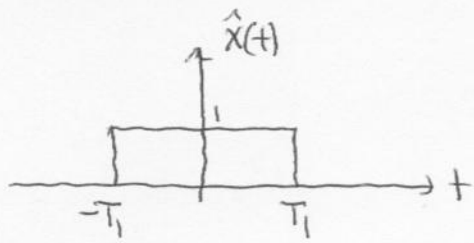
$$a_k = \frac{2\,\text{sen}(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T_0} = \left.\frac{2\,\text{sen}(\omega T_1)}{\omega T_0}\right|_{\omega = k\omega_0}$$

Se observa que la envolvente de los coeficientes varía su amplitud pero no su forma, al aumentar T_0

③ REPRESENTACIÓN DE $T_0 a_k$ EN FUNCIÓN DE ω

$$T_0 a_k = \left.\frac{2\,\text{sen}(\omega T_1)}{\omega}\right|_{\omega = k\omega_0}$$

SE OBSERVA QUE LA ENVOLVENTE DE $T_0 a_k$ NO VARÍA CON T_0:
CONCLUSIÓN:

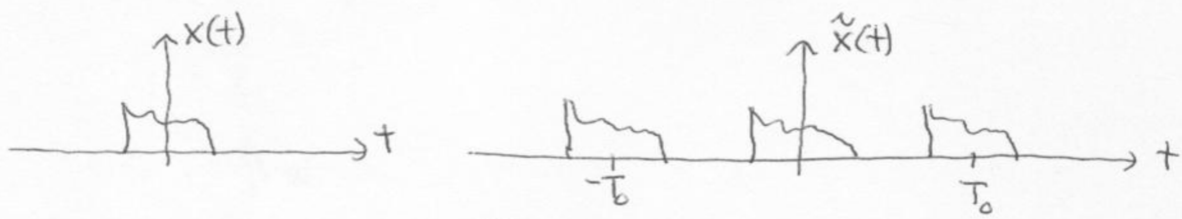


$$\xrightarrow{FT} X(j\omega) = \frac{2\,\text{sen}(\omega T_1)}{\omega}$$

$T_0 a_k$ PUEDEN INTERPRETARSE COMO MUESTRAS EQUIESPACIADAS DE LA FT DE $\hat{x}(t)$.

EN GENERAL:

- DADA UNA SEÑAL APERIÓDICA $x(t)$ DE DURACIÓN FINITA:



$$\tilde{x}(t) \xrightarrow{FS} a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_0 a_k = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$

SABIENDO QUE $T_0 a_k = X(j\omega)\Big|_{\omega = k\omega_0} \Rightarrow \boxed{X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\,dt}$

- PARA SINTETIZAR O RECUPERAR $x(t)$ A PARTIR DE $X(j\omega)$:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X(jk\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow$$

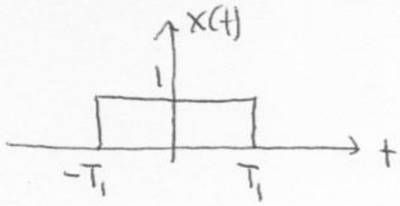
$$\Rightarrow \tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t} \cdot \omega_0$$

SACANDO LÍMITES:

$$x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} \tilde{x}(t) = \lim_{\substack{\omega_0 \to d\omega \\ k\omega_0 \to \omega}} \tilde{x}(t) = \boxed{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega}$$

• CÁLCULO Y DUALIDAD EN LA FT. LA FUNCIÓN $sinc(x)$

Ⓐ DADA $x(t)$

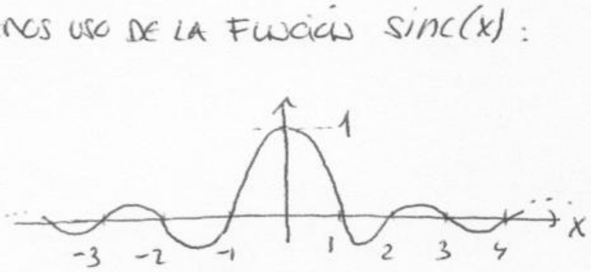


$$\xrightarrow{FT} X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt =$$

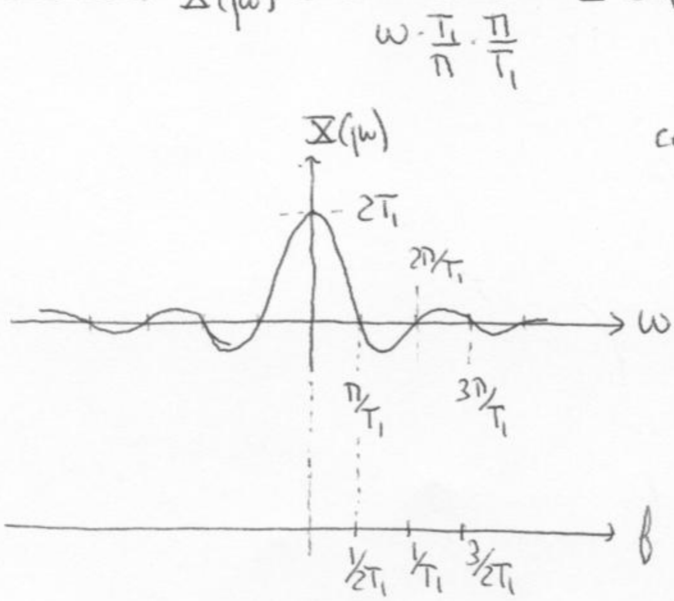
$$= \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t}\, dt = \left.\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right|_{-T_1}^{T_1} = \frac{e^{-j\omega T_1} - e^{j\omega T_1}}{-j\omega} = \frac{2\,sen(\omega T_1)}{\omega}$$

PARA REPRESENTAR $X(j\omega)$ HACEMOS USO DE LA FUNCIÓN $sinc(x)$:

$$sinc(x) = \frac{sen(\pi x)}{\pi x} \longrightarrow$$



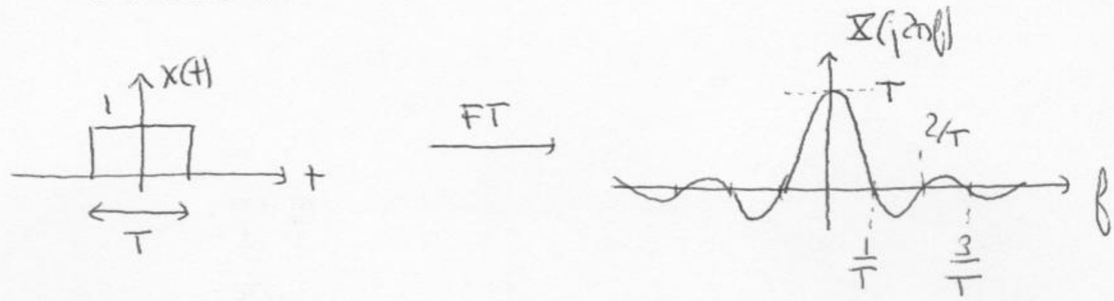
$$x(t) \xrightarrow{FT} X(j\omega) = \frac{2\,sen\left(\omega T_1 \cdot \frac{\pi}{\pi}\right)}{\omega \cdot \frac{T_1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{T_1}} = 2T_1\, sinc\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$



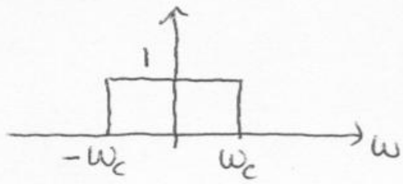
CEROS EN $\frac{\omega T_1}{\pi} = k \Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega = \frac{k\pi}{T_1}$$

* De interés para TCO:



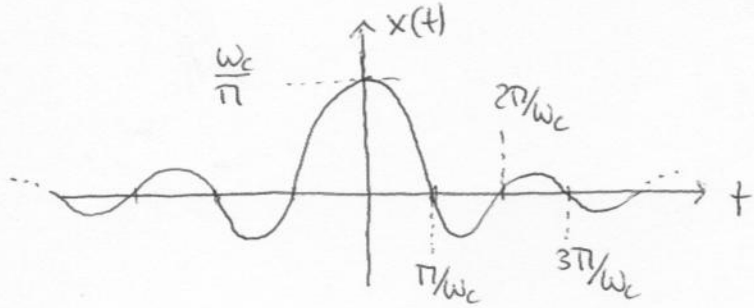
(B) Dada $X(j\omega)$



$$\xrightarrow{FT^{-1}} \quad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\cdot \left.\frac{e^{j\omega t}}{jt}\right|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}}{jt} =$$

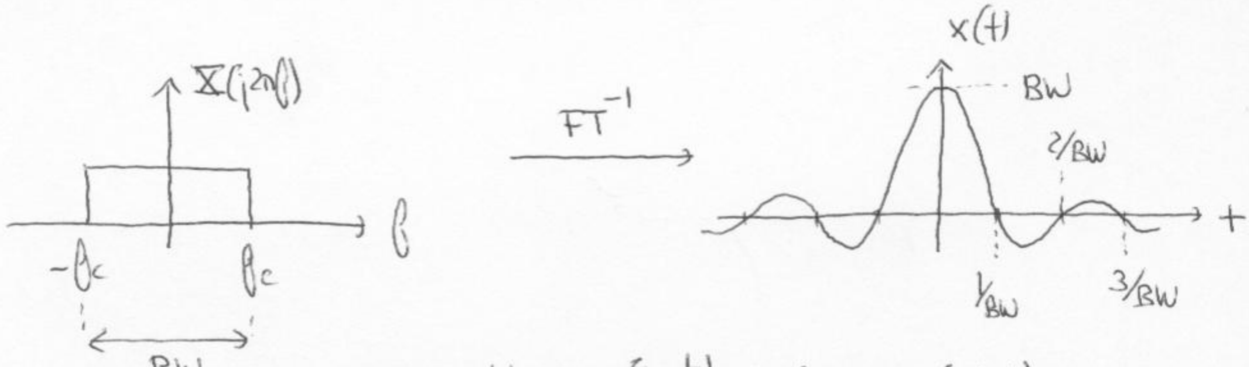
$$= \frac{\operatorname{sen}(\omega_c t)}{\pi t} = \frac{\operatorname{sen}\left(\omega_c t \cdot \frac{\pi}{\pi}\right)}{\pi t \cdot \frac{\omega_c}{\omega_c}\cdot\frac{\pi}{\pi}} = \frac{\omega_c}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right)$$



ceros en $\frac{\omega_c t}{\pi} = k \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{k\pi}{\omega_c}$

* De interés para TCO



$$x(t) = \frac{\omega_c}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right) = 2 f_c \cdot \operatorname{sinc}(2 f_c t)$$

- CONVERGENCIA DE LA FT

EN GENERAL, AUNQUE $x(t)$ NO TENGA DURACIÓN FINITA, ES POSIBLE DEMOSTRAR QUE:

$$x(t) \xrightarrow{FT} X(j\omega) \xrightarrow{FT^{-1}} x'(t)$$

, SIENDO $e(t) = x'(t) - x(t)$, SE VERIFICA QUE:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |e(t)|^2 dt = 0$$

UNAS CONDICIONES ALTERNATIVAS SON LAS DE DIRICHLET VISTAS EN EL FS, PERO APLICADAS A CUALQUIER INTERVALO FINITO DE $x(t)$ EN VEZ DE A T_0.

* FT DE SEÑALES PERIÓDICAS

$$\tilde{x}(t) \text{ PERIÓDICA} \Rightarrow \tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

ASUMIENDO QUE LA FT ES LINEAL, SI CONOZCO $e^{jk\omega_0 t} \xrightarrow{FT} ¿?$, CONOCERÍA LA FT DE $\tilde{x}(t)$.

SEA $s(t) = e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{FT} ¿S(j\omega)?$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

$$\downarrow$$

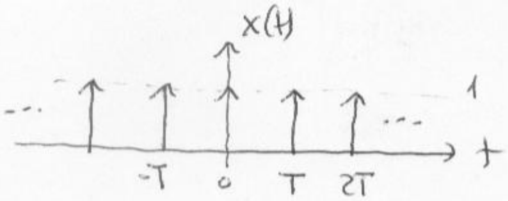
$$S(j\omega) = 2\pi\delta(j(\omega - \omega_0)) \text{ ó } 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$\Rightarrow \underset{T_0}{\tilde{x}(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \xrightarrow{FT} \tilde{X}(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot \delta(\omega - k\omega_0)$$

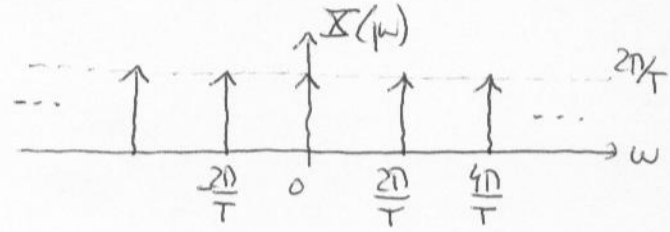
$$\tilde{x}(t) \xrightarrow{FS} a_k \longrightarrow \tilde{X}(j\omega)$$

Ejemplo:

$$x(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t - lT) \xrightarrow{FS} a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}, \ \forall k$$



$$x(t) \xrightarrow{FT} X(j\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right)$$



* Propiedades de la FT

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

① Linealidad

② Desplazamientos

a) En 't'

$$x(t) \xrightarrow{FT} X(j\omega)$$

$$x'(t) = x(t - t_0) \longrightarrow X'(j\omega) = e^{-j\omega t_0} \cdot X(j\omega)$$

$$x'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega(t - t_0)}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{X(j\omega)\, e^{-j\omega t_0}}_{X'(j\omega)} \cdot e^{j\omega t}\, d\omega$$

b) En 'ω'

$$x(t) \xrightarrow{FT} X(j\omega)$$

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \xleftarrow{FT^{-1}} X(j(\omega - \omega_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j(\omega - \omega_0)t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{j\omega_0 t} x(t)}\, e^{-j\omega t}\, dt$$

③ SIMETRÍAS:

$$x(t) \xrightarrow{FT} X(j\omega)$$
$$x(-t) \xrightarrow{FT} X(-j\omega)$$
$$x^*(t) \xrightarrow{FT} X^*(-j\omega)$$

$\Rightarrow$ PROPIEDADES ANÁLOGAS A LAS DEL FS

④ DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN

a) $$x(t) \xrightarrow{FT} X(j\omega)$$

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{FT} X'(j\omega) = j\omega X(j\omega)$$

$$x'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{j\omega X(j\omega)}_{X'(j\omega)} e^{j\omega t}\, d\omega$$

b) DIFERENCIACIÓN EN ω:

$$x(t) \xrightarrow{FT} X(j\omega)$$

$$x'(t) \xrightarrow{FT} \frac{dX(j\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{-jt\,x(t)}_{x'(t)} e^{-j\omega t}\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t\,x(t) \xrightarrow{FT} j\,\frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$

c) INTEGRACIÓN

$$x(t) \xrightarrow{FT} X(j\omega)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \xrightarrow{FT} Y(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \underbrace{\pi X(0)\cdot\delta(\omega)}$$

SI $x(t)$ TIENE VALOR MEDIO NO NULO $\left(\Rightarrow X(0) = T_0 a_0 \neq 0\right) \Rightarrow y(t)$ TIENE VALOR MEDIO IGUAL A LA MITAD DEL ÁREA NETA ACUMULADA EN $x(t)$, ES DECIR, $X(0)/2$

POR LO TANTO:

$$y(t) = \underbrace{y'(t)}_{\substack{\text{VALOR} \\ \text{MEDIO NULO}}} + \frac{X(0)}{2} \xrightarrow{FT} \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\,\delta(\omega)$$

5 ESCALADO

$$x(t) \xrightarrow{FT} X(j\omega)$$

$$x'(t) = x(at) \xrightarrow{FT} X'(j\omega) = \frac{1}{a} \cdot X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

$$x(at) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\cdot e^{j\omega ta}\,d\omega \underset{\omega' = a\omega}{=} \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} X\left(j\frac{\omega'}{a}\right) e^{j\omega' t}\,\frac{d\omega'}{a} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{a} X\left(j\frac{\omega'}{a}\right)}_{X'(j\omega)} e^{j\omega' t}\,d\omega'$$

EXPANSIÓN EN t $(a<1)$ $\Rightarrow$ COMPRESIÓN Y AMPLIFICACIÓN EN ω

COMPRESIÓN EN t $(a>1)$ $\Rightarrow$ EXPANSIÓN Y ATENUACIÓN EN ω

6 DUALIDAD

$$x(t) \xrightarrow{FT} X(j\omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t}\,d\omega \underset{\substack{\omega \to t \\ t \to \omega}}{\Rightarrow} x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(jt) e^{j\omega t}\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\pi x(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(jt) e^{-j\omega t}\,dt \Rightarrow X(jt) \xrightarrow{FT} 2\pi x(-\omega)$$

⑦ RELACIÓN DE PARSEVAL

ENERGÍA DE $x(t) \rightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot x^*(t)\, dt =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega)\, e^{-j\omega t} d\omega\right] dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega)\cdot\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt\right] d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega)\cdot X(j\omega)\, d\omega = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega}_{\text{ENERGÍA DE } X(j\omega)}$$

* FT y SISTEMAS LTI

① LA PROPIEDAD DE CONVOLUCIÓN

- $x(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t} d\omega = \lim_{\omega_0 \to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t}\cdot \omega_0$
- $e^{jk\omega_0 t} \xrightarrow{\text{LTI}} H(jk\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t}$, con $\underbrace{H(jk\omega_0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-jk\omega_0 t} dt}$ $\Rightarrow$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$ ← $h(t) \xrightarrow{\text{FT}} H(j\omega)$ si LA INTEGRAL CONVERGE ⇒ LTI ESTABLE

$$\Rightarrow x(t) \xrightarrow{\text{LTI}} y(t) = \lim_{\omega_0 \to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0)\cdot H(jk\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t}\cdot\omega_0 =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{X(j\omega)\cdot H(j\omega)}\, e^{j\omega t} d\omega \Rightarrow Y(j\omega) = X(j\omega)\, H(j\omega)$$

EN CONCLUSIÓN: $\boxed{y(t) = x(t) * h(t) \xrightarrow{\text{FT}} Y(j\omega) = X(j\omega)\, H(j\omega)}$

Ejemplos:

① Sea un LTI / $h(t) = \delta(t-t_0)$

$$x(t) \xrightarrow{LTI} y(t) = x(t) * h(t) = x(t-t_0)$$

Por la propiedad de convolución:

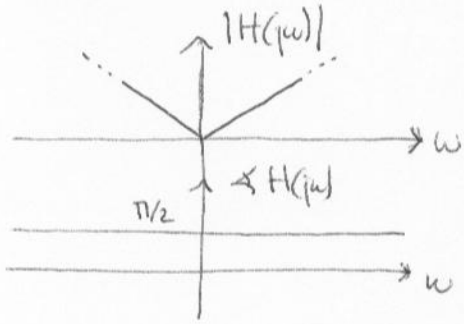
$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = e^{-j\omega t_0}$$

$$\Rightarrow Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega) = e^{-j\omega t_0} X(j\omega) \; :$$

$$x(t-t_0) \xrightarrow{FT} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

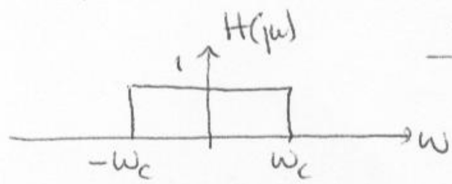
② $x(t) \xrightarrow{LTI} y(t) = dx(t)/dt \xrightarrow{FT} j\omega X(j\omega) \Rightarrow$

$\Rightarrow H(j\omega) = j\omega$

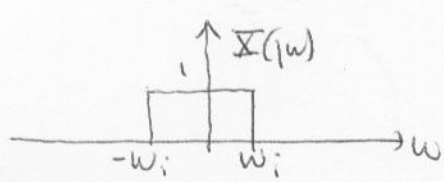


③ $x(t) = \dfrac{\operatorname{sen} \omega_i t}{\pi t} \xrightarrow{FPB} \; ¿?$

$$H(j\omega) = u(\omega+\omega_c) - u(\omega-\omega_c)$$



$\xrightarrow{FT^{-1}} h(t) = \dfrac{\operatorname{sen} \omega_c t}{\pi t}$



$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega) \Rightarrow$

Teniendo en cuenta que

$$x(t) \xrightarrow{FT} X(j\omega) = u(\omega+\omega_i) - u(\omega-\omega_i)$$

$$\Rightarrow y(t) = x(t), \; \omega_i \leq \omega_c \; ; \; y(t) = h(t), \; \omega_i \geq \omega_c$$

② La propiedad de multiplicación

$r(t) = s(t)\cdot p(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow R(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cdot p(t)\, e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\theta)\, e^{j\theta t}\cdot d\theta\right]\cdot p(t)\, e^{-j\omega t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\theta)\left[\int_{-\infty}^{\infty} p(t)\, e^{-j(\omega-\theta)t}\,dt\right] d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\theta)\cdot P(j(\omega-\theta))\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\cdot S(j\omega) * P(j\omega)$$

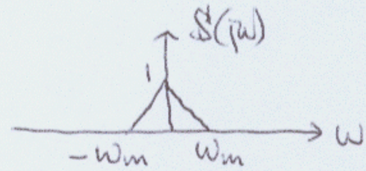
En conclusión:

$$r(t) = s(t)\cdot p(t) \xrightarrow{FT} R(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\cdot S(j\omega) * P(j\omega)$$

Aplicación a la modulación / demodulación de señales:

a) Modulación

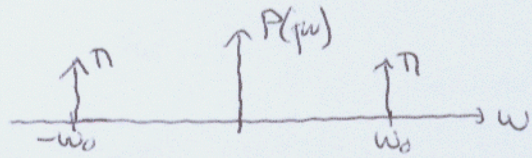
- $s(t) \xrightarrow{FT} S(j\omega)$



- $p(t) = \cos \omega_0 t$

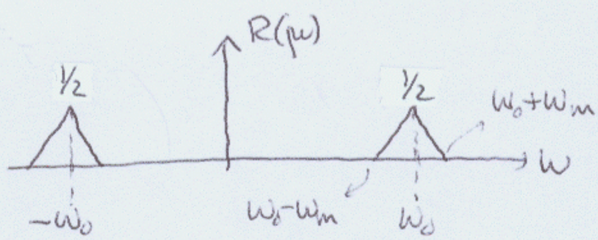
$\downarrow FS \qquad \xrightarrow{FT}$

$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$



$P(j\omega) = \pi\,\delta(\omega-\omega_0) + \pi\,\delta(\omega+\omega_0)$

- $r(t) = s(t)\cdot p(t) \xrightarrow{FT}$



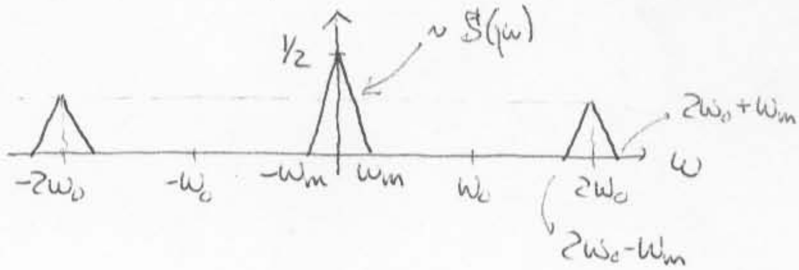
$$R(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[S(j\omega) * P(j\omega)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[S(j(\omega+\omega_0)) + S(j(\omega-\omega_0))\right]$$

b) DEMODULACIÓN

$$r(t)\cdot p(t) \xrightarrow{FT} R(j\omega) * P(j\omega)\cdot\frac{1}{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[R(j(\omega+\omega_0)) + R(j(\omega-\omega_0))\right] :$$



$S(j\omega)$ ES RECUPERABLE VÍA FILTRADO PASO-BAJO.

③ SISTEMAS DESCRITOS A PARTIR DE EDO'S LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot \frac{d^k x(t)}{dt^k} \longrightarrow ¿H(j\omega)?$$

$$FT\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot \frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = FT\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k \cdot \frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\} \overset{\text{LINEALIDAD}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k \cdot FT\left\{\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot FT\left\{\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\} \overset{\text{DERIVACIÓN EN 't'}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k \cdot (j\omega)^k \cdot Y(j\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k \cdot X(j\omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = H(j\omega) = \boxed{\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}}$$

EJEMPLOS:

a) $$\frac{dy(t)}{dt} + a\,y(t) = x(t) \Rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(t) = e^{-at} \cdot u(t)$$

b) $$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{2+j\omega}{3+4j\omega+(j\omega)^2} = \frac{2+j\omega}{(1+j\omega)(3+j\omega)} =$$

$$s^2+4s+3 = (s-s_1)(s-s_2)$$

$$s_i = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \begin{cases} -3 \\ -1 \end{cases}$$

$$= \frac{B_1}{1+j\omega} + \frac{B_2}{3+j\omega} = \frac{1/2}{1+j\omega} + \frac{1/2}{3+j\omega} \Rightarrow$$

$$B_1 = H(j\omega)(1+j\omega)\Big|_{j\omega=-1} = 1/2$$

$$B_2 = H(j\omega)(3+j\omega)\Big|_{j\omega=-3} = 1/2$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t} \cdot u(t)$$

c) OBTENER LA RESPUESTA DEL SISTEMA ANTERIOR A LA SEÑAL $x(t) = e^{-2t} \cdot u(t)$

$$x(t) \xrightarrow{FT} X(j\omega) = \frac{1}{(2+j\omega)}$$

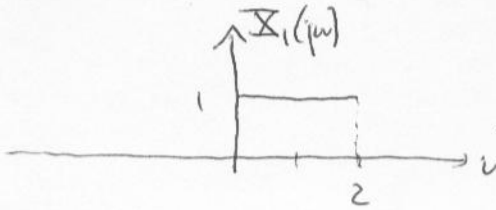
$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)(3+j\omega)} = \frac{1/2}{1+j\omega} - \frac{1/2}{3+j\omega} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} \cdot u(t) - \frac{1}{2}e^{-3t} \cdot u(t)$$

PROBLEMA 4.7

DETERMINAR, APLICANDO PROPIEDADES, SI LAS SIGUIENTES SEÑALES SON REALES, IMAGINARIAS O COMPLEJAS, Y SI SON PARES IMPARES O SIN SIMETRÍA:

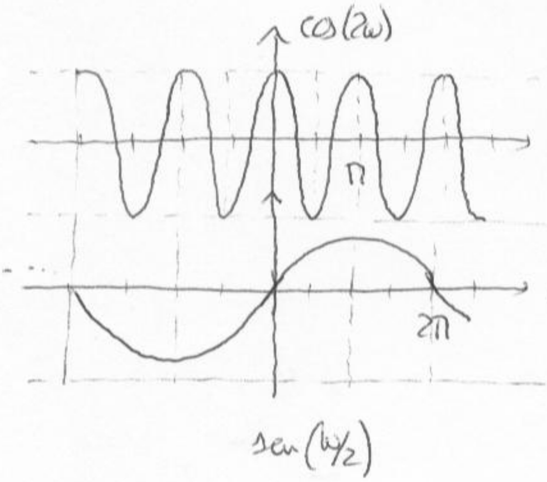
a) $x_1(t)$ / $X_1(j\omega) = u(\omega) - u(\omega-2)$



→ NO PAR, NO IMPAR ⇒ $x_1(t)$ NI PAR NI IMPAR

→ $|X_1(j\omega)|$ NO PAR ⇒ $x_1(t)$ NI REAL NI IMAGINARIA

b) $x_2(t)$ / $X_2(j\omega) = \cos(2\omega)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)$



IMPAR — REAL

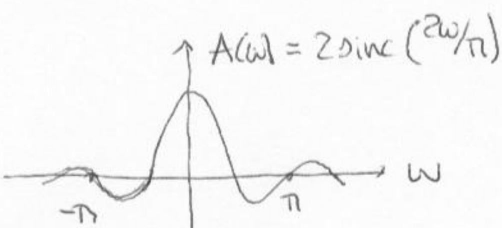
$X_2(j\omega) = -X_2(-j\omega) = X_2^*(j\omega) \Rightarrow$

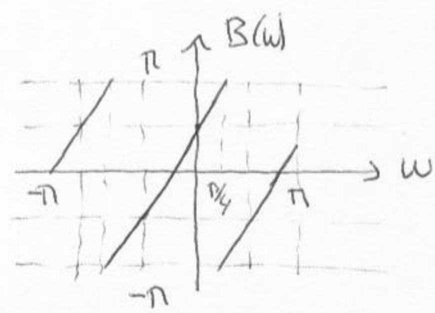
$\Rightarrow X_2(j\omega) = -X_2^*(-j\omega)$

$\otimes \Rightarrow$ $X_2(j\omega)$ IMPAR, $X_2(j\omega)$ REAL $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_2(t)$ IMAGINARIA, IMPAR

c) $x_3(t)$ / $X_3(j\omega) = A(\omega)e^{jB(\omega)}$, CON $A(\omega) = \dfrac{\operatorname{sen} 2\omega}{\omega}$, $B(\omega) = 2\omega + \pi/2$





$A(\omega) = |X_3(j\omega)|$ PAR

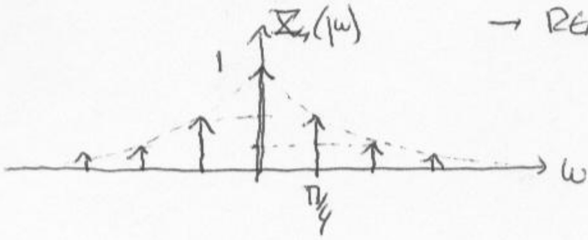
$B(\omega) = \sphericalangle X_3(j\omega)$ NO PAR NI IMPAR

SEA $Y(j\omega) = A(\omega)e^{j2\omega}$ ⇒ MÓDULO PAR, FASE IMPAR ⇒ $y(t)$ REAL

$X_3(j\omega) = Y(j\omega)\cdot e^{j\pi/2} = jY(j\omega) \Rightarrow x_3(t) = jy(t)$, IMAGINARIA

PROBLEMA 4.7 | (cont.)

d) $x_4(t)$ / $X_4(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} \cdot \delta\left(\omega - k\frac{\pi}{4}\right)$



PAR REAL

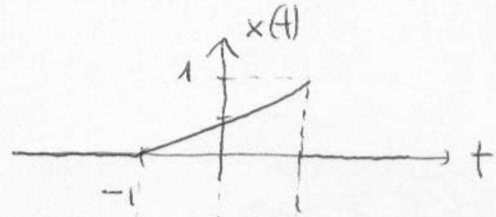
→ REAL Y PAR $\Rightarrow \underbrace{X_4(j\omega) = X_4(-j\omega)}_{\Downarrow} = X_4^*(j\omega) \Rightarrow$

$x_4(t)$ PAR

$\Rightarrow X_4(j\omega) = X_4^*(-j\omega) \Rightarrow x_4(t)$ REAL

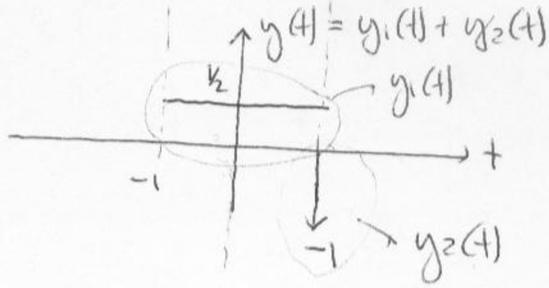
PROBLEMA 4.9

$$x(t) = \begin{cases} 0 & , \ |t|>1 \\ (t+1)/2 & , \ |t| \leq 1 \end{cases} \rightarrow$$



a) ¿ $X(j\omega)$?

Sea $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$:



$$y_1(t) = \frac{1}{2}\{u(t+1)-u(t-1)\} \xrightarrow{FT} Y_1(j\omega) = \frac{sen(\omega)}{\omega}$$

$$y_2(t) = -\delta(t-1) \xrightarrow{FT} Y_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} -\delta(t-1)e^{-j\omega t}dt = -e^{-j\omega}$$

$$\Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{FT} Y(j\omega) = \frac{sen\,\omega}{\omega} - e^{-j\omega}$$

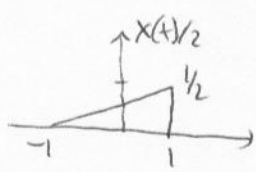
$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau \xrightarrow{FT} X(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{j\omega} + \pi Y(0)\delta(\omega) =$$

$Y(0)=0$

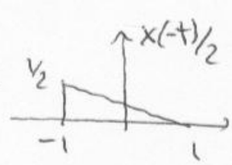
$$= \boxed{\frac{sen\,\omega}{j\omega^2} - \frac{e^{-j\omega}}{j\omega}}$$

b) $$Re[X(j\omega)] = Re\left[-j\frac{sen\,\omega}{\omega^2} + \frac{j}{\omega}(\cos(-\omega) + j\,sen(-\omega))\right] = \frac{-sen(-\omega)}{\omega} = \frac{sen\,\omega}{\omega}$$

$$x_e(t) = \frac{1}{2}\{x(t) + x(-t)\} \rightarrow$$

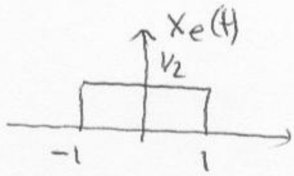


+



=

=



$$\xrightarrow{FT} \frac{sen\,\omega}{\omega} \rightarrow =$$

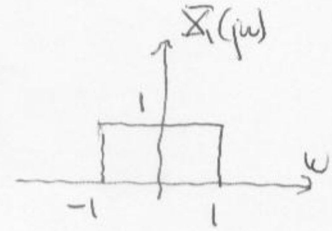
c) $x(t)$ REAL $\Rightarrow x_o(t) \xrightarrow{FT} j\,Im[X(j\omega)] = \boxed{\dfrac{j}{\omega}\left[\cos\omega - \dfrac{sen\,\omega}{\omega}\right]}$

PROBLEMA 4.10

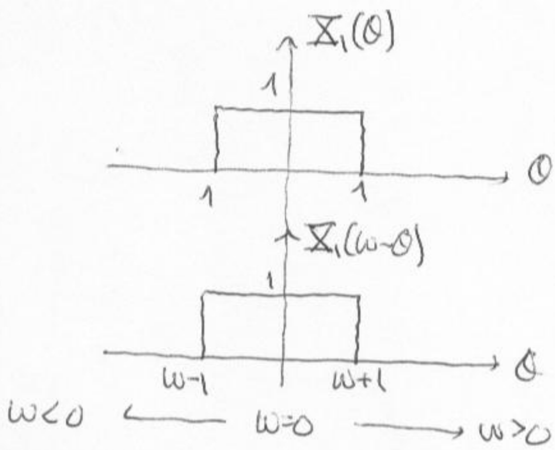
a) $x(t) = t \cdot \underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen} t}{\pi t}\right)^2} \xrightarrow{FT} ¿?$

$x_2(t) = x_1^2(t)$;

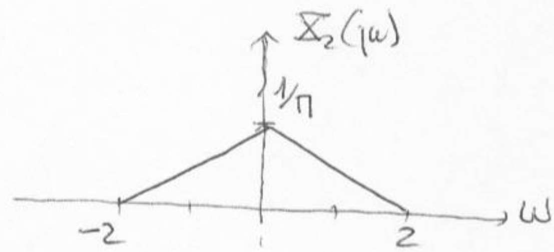
- $x_1(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{\pi t} \xrightarrow{FT} X_1(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le 1 \\ 0, & |\omega| > 1 \end{cases}$



- $x_2(t) = x_1(t) \cdot x_1(t) \xrightarrow{FT} X_2(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_1(j\omega)$

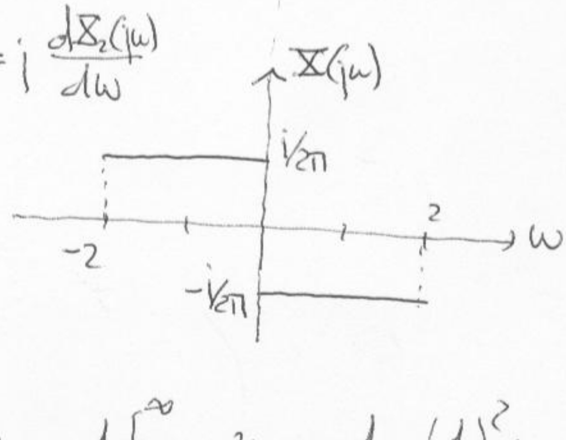


$$X_2(j\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| > 2 \\ \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{\omega+1} d\theta = \frac{\omega+2}{2\pi}, & -2<\omega<0 \\ \frac{1}{2\pi}\int_{\omega-1}^{1} d\theta = \frac{2-\omega}{2\pi}, & 0<\omega<2 \end{cases}$$



- $x(t) = t x_2(t) \xrightarrow{FT} X(j\omega) = j \frac{dX_2(j\omega)}{d\omega}$

$$\boxed{X(j\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| > 2 \\ j/2\pi, & -2<\omega<0 \\ -j/2\pi, & 0<\omega<2 \end{cases}}$$



b) $A = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} t}{\pi t}\right)^4 dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega}_{\text{R. PARSEVAL}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \cdot 4 = \boxed{\frac{1}{2\pi^3}}$

PROBLEMA 4.12

$$e^{-|t|} \xrightarrow{FT} \frac{2}{1+w^2}$$

a) ¿ $FT\{te^{-|t|}\}$?

$$te^{-|t|} \xrightarrow{FT} j\frac{d}{dw}\left(\frac{2}{1+w^2}\right) = \boxed{\frac{-4jw}{(1+w^2)^2}}$$

b) ¿ $FT\left\{\frac{4t}{(1+t^2)^2}\right\}$?

DUALIDAD:

$$\frac{-4jt}{(1+t^2)^2} \xrightarrow{FT} 2\pi(-w)e^{-|-w|} = -2\pi w e^{-|w|} \quad \times j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4t}{(1+t^2)^2} \xrightarrow{FT} \boxed{-2\pi j w e^{-|w|}}$$

PROBLEMA 4.14

Sea $x(t) \xrightarrow{FT} X(j\omega)$ tal que:

1- $x(t)$ real y no negativa

2- $Ae^{-2t}\cdot u(t) \xrightarrow{FT} \dfrac{X(j\omega)}{(1+j\omega)^{-1}}$, A no depende de t

3- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 = 2\pi$

2- $Ae^{-2t}u(t) \xrightarrow{FT} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-2t}u(t)\cdot e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} Ae^{-(2+j\omega)t}dt =$

$$= \frac{A}{2+j\omega} = (1+j\omega)X(j\omega) \Rightarrow X(j\omega) = \frac{A}{(1+j\omega)(2+j\omega)} =$$

$$= \frac{B_1}{1+j\omega} + \frac{B_2}{2+j\omega} = \frac{A}{1+j\omega} - \frac{A}{2+j\omega} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} B_1 = X(j\omega)\cdot(1+j\omega)\Big|_{j\omega=-1} = A \\ B_2 = X(j\omega)(2+j\omega)\Big|_{j\omega=-2} = -A \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(t) = [Ae^{-t}u(t) - Ae^{-2t}u(t)]$$

$$\left.\begin{array}{l} 3- \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt = 1 \\ 1- x(t) \text{ real y } \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = 1 \Rightarrow \int_0^{\infty} A^2(e^{-t}-e^{-2t})^2dt =$$

$$= A^2\int_0^{\infty}(e^{-2t}+e^{-4t}-2e^{-3t})dt = \frac{A^2}{12} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \sqrt{12}\,(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$$