Señales y Sistemas

Sistemas LIT Discretos: La Suma de Convolución

Resumiendo, se tiene entonces que la suma de convolución está compuesta de cuatro operaciones básicas:

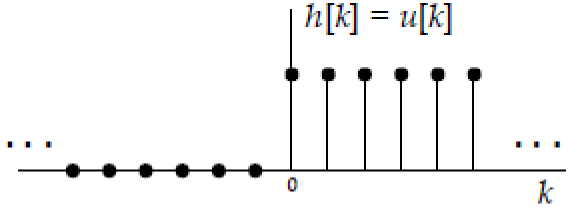
1. Tomar la imagen especular de $h[k]$ sobre el eje vertical a través del origen para obtener $h[-k]$.
2. Desplazar $h[n]$ en una cantidad igual al valor de n, en donde la secuencia de salida se evalúa para calcular $h[n - k]$.
3. Multiplicar la secuencia desplazada $h[n - k]$ por la secuencia de entrada $x[k]$.
4. Sumar la secuencia de valores resultantes para obtener el valor de la convolución en n.
5. Los pasos 1 a 4 se repiten conforme n varía de $-\infty$ a $+\infty$ para producir toda la salida $h[n]$.

Ejemplo 1. Consideremos una entrada $x[n]$ y la respuesta al impulso unitario $h[n]$ dadas por

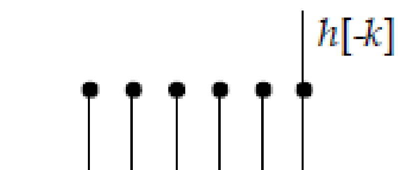
$$x[n] = \alpha^n u[n]$$

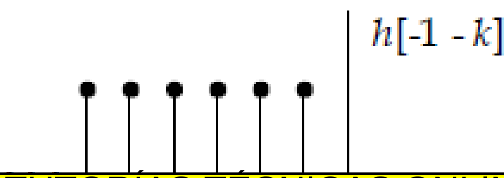
$$h[n] = u[n]$$

donde $0 < \alpha < 1$.



(a)





sistemas LIT

Ejemplo 1.

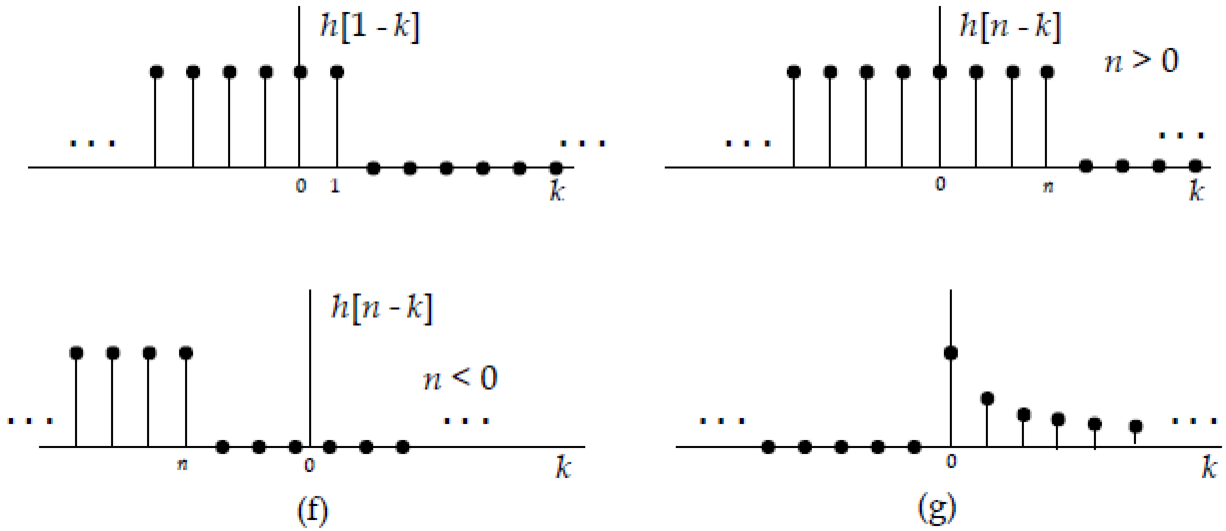


Figura 2.4

En la Fig. 2.4 se muestran $h[k]$, $h[-k]$ y $h[1-k]$, es decir, $h[n-k]$ para $n=0, -1$ y $h[n-k]$ para cualquier valor positivo arbitrario de n. Finalmente, $x[k]$ se ilustra en la Fig. 2.4g. En la figura se observa que para $n<0$ no hay solapamiento entre los puntos que no son iguales a cero en $x[k]$ y $h[n-k]$. Por ello, para $n<0$, $x[k]h[n-k]=0$ para todos los valores de k y, en consecuencia, $y[n]=0$ para

Ejemplo 1.

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^k, & 0 \le k \le n \\ 0, & \text{otros valores de } n \end{cases}$$

Entonces, para $n \ge 0$,

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k$$

El resultado se grafica en la Fig. 2.5.

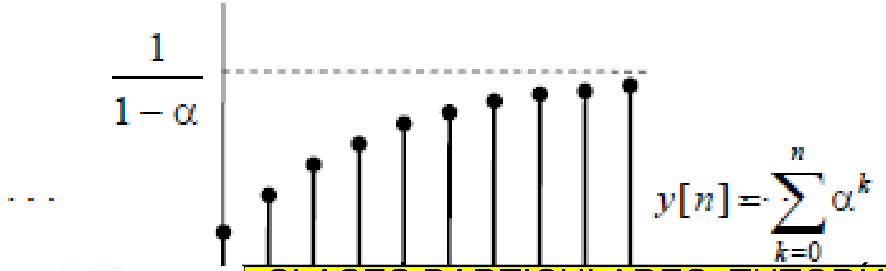


Figura 2.5

Ejemplo 2. Considere ahora las dos secuencias $x[n]$ y $h[n]$ dadas por

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 4 \\ 0, & \text{otros valores de } n \end{cases}$$

$$h[n] = \begin{cases} \alpha^n, & 0 \le n \le 6 \\ 0, & \text{otros valores de } n \end{cases}$$

Estas señales se muestran en la Fig. 2.6. Para calcular la convolución de las dos señales, conviene considerar cinco intervalos separados para n. Esto se ilustra en la Fig. 2.7.

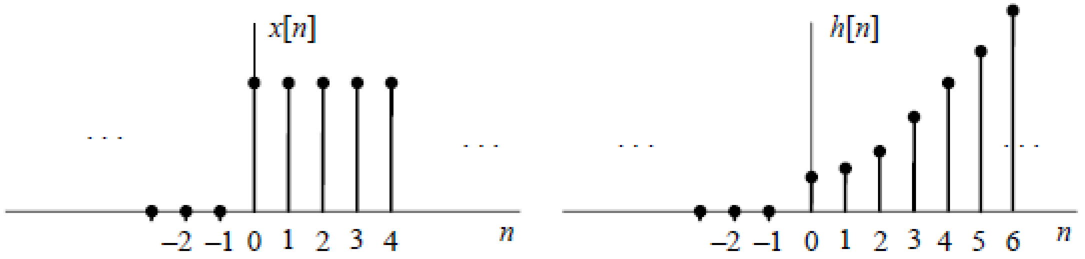


Figura 2.6

Ejemplo 2.

Intervalo 1. Para $n < 0$ no hay solapamiento entre las porciones diferentes de cero de $x[k]$ y $h[n-k]$ y, por lo tanto, $y[n] = 0$.

Intervalo 2. Para $0 \le n \le 4$, el producto $x[k]h[n-k]$ está dado por

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & 0 \le k \le n \\ 0, & \text{otros valores de } k \end{cases}$$

Por lo que en este intervalo, se tiene

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k}$$

Intervalo 3. Para $n > 4$ pero $n - 6 \le 0$ (es decir, $4 < n \le 6$), $x[k]h[n-k]$ está dada por

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & 0 \le k \le 4 \\ 0, & \text{otros valores de } k \end{cases}$$

Así que en este intervalo

Intervalo 4. Para $n > 6$ pero $n - 6 \leq 4$ (es decir, para $6 < n \leq 10$),

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & (n-6) \leq k \leq 4 \\ 0, & \text{otros valores de } k \end{cases}$$

de modo que

$$y[n] = \sum_{k=n-6}^{4} \alpha^{n-k}$$

Intervalo 5. Para $(n - 6) < 4$ o, equivalentemente, $n > 10$, no hay solapamiento entre las por diferentes de cero de $x[k]$ y $h[n - k]$ y, por tanto,

$$y[n] = 0$$

El resultado gráfico de la convolución se muestra en la Fig. 2.7.

Ejemplo 2.

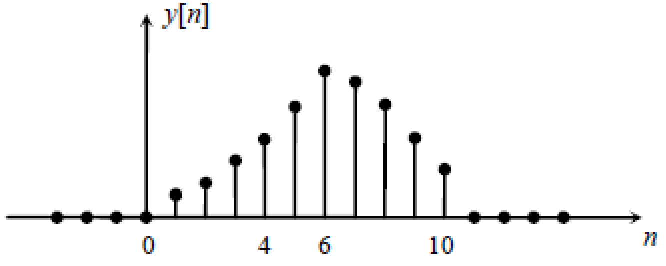


Figura 2.7

Ejemplo 3. Sean

$$x[n]=\alpha^n u[n] \quad \text{y} \quad h[n]=\beta^n u[n]$$

Entonces

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k u[k] \beta^{n-k} u[n-k]$$

Como $u[k] = 0$ para $k < 0$ y $u[n - k] = 0$ para $k > n$, podemos escribir la sumatoria como

$$y[n]=\sum_{k=0}^{n} \alpha^k \beta^{n-k} = \beta^n \sum_{k=0}^{n} (\alpha\beta^{-1})^k$$

Claramente, $y[n] = 0$ si $n < 0$.

Para $n \geq 0$, si $\alpha = \beta$, tenemos

Si $\alpha \neq \beta$, la sumatoria puede escribirse en forma compacta usando la fórmula

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} a^k = \frac{a^{n_1} - a^{n_2+1}}{1-a}, \quad a \neq 1$$

Suponiendo que $\alpha\beta^{-1} \neq 1$, entonces podemos escribir

$$y[n] = \beta^n \frac{1-(\alpha\beta^{-1})^{n+1}}{1-\alpha\beta^{-1}} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$$

Como un caso especial de este ejemplo, sea $\alpha = 1$, de modo que $x[n]$ representa a la función escalón unitario. La respuesta al escalón para este sistema se obtiene haciendo $\alpha = 1$ en la última expresión para $y[n]$ y es

$$1-\beta^{n+1}$$

Ejemplo 4. Se desea determinar la convolución de la muestra unitaria $\delta[n]$ con una secuencia arbitraria $x[n]$. De la Ec. (2.9), el n-ésimo término de la secuencia resultante será

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Sin embargo, cada término de $\delta[n - k]$ es cero excepto cuando $n = k$. En este caso se tiene que $\delta[0]=1$, por lo que el único término que es diferente de cero en la sumatoria aparece cuando $n=k$ y, en consecuencia,

$$y[n]=x[n]$$

En otras palabras, la convolución de $x[n]$ y $\delta[n]$ reproduce la secuencia $x[n]$.

Ejemplo 5. Determinar la convolución de las secuencias $x[n]$ y $h[n]$, donde

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

y

$$h[n] = \begin{cases} b^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

Solución:

La secuencia resultante, $y[n]$, está dada por

$$y[n] = \sum^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum^{n} x[k]h[n-k]$$

Los límites en la última sumatoria se deben a que $x[n] = 0$ para $n < 0$ y $h[n] = 0$ para $k > n$. En consecuencia,

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}, & n \geq 0 \end{cases}$$

Ejemplo 6. Determinar, empleando la suma de convolución, la salida del circuito digital de la Fig. 2.9, correspondiente a la secuencia de entrada $x[n]=\{3 \;\; -1 \;\; 3\}$. Suponga que la ganancia G es igual a 1/2.

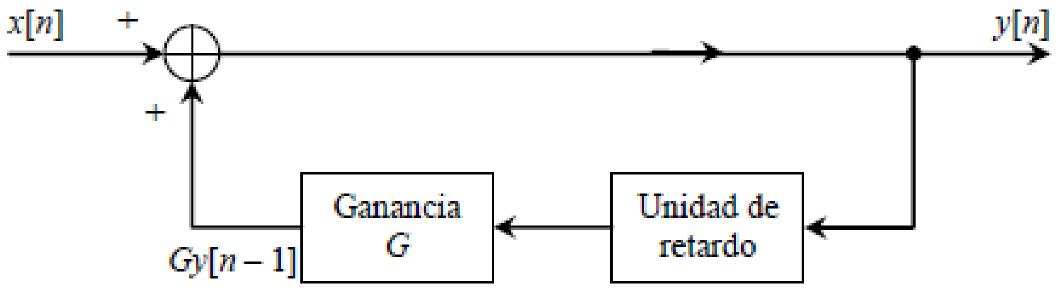


Figura 2.9

Solución: La ecuación que describe al sistema se puede obtener igualando la salida del sumador $y[n]$ con las dos entradas, es decir,

$$y[n]=\tfrac{1}{2}y[n-1]+x[n] \qquad (2.11)$$

Ejemplo 6.

Solución

La Ec. (2.11) es un ejemplo de una ecuación en diferencias. Se supone que el sistema está inicialmente en reposo, de modo que $y[-1] = 0$. Para emplear la suma de convolución, primero se debe calcular la función de respuesta al impulso $h[n]$. Un método para obtener dicha respuesta es emplear la ecuación en diferencias y determinar la salida en forma iterativa. De la Ec. (2.11) se tiene que

$$h\{0\} = \delta[0] + \tfrac{1}{2} h[-1] = 1 + 0 = 1$$

$$h[1] = \delta[1] + \tfrac{1}{2} h\,[0]] = 0 + \tfrac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$h[2] = \delta[2] + \tfrac{1}{2} h[1] = 0 + \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$h[n] = \delta[n] + \tfrac{1}{2} h[n-1] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n$$

La función de respuesta al impulso es entonces y la salida estará dada por

$$y[n] = \{\, 3 \;\; -1 \;\; 3 \,\} * \left\{ \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n} \right\}, \quad n \geq 0$$

Una forma sencilla de calcular esta convolución es emplear la matriz con el método de "gira y suma", como se ilustra en la Fig. 2.10. De esta figura se obtiene la secuencia de salida como

$$y[n] = \left\{ \; 3 \;\; \tfrac{1}{2} \;\; \tfrac{13}{4} \;\; \tfrac{13}{8} \;\; \tfrac{13}{16} \;\; \cdots \;\; \tfrac{13}{2^{n}} \;\; \cdots \right\}$$

		$h[n]$ →					
		1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	…
$x[n]$ ↓	3	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$	…
	−1	−1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{16}$	…
	3	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$	…

Figura 2.10

Propiedades de la Suma de Convolución

La primera propiedad básica de la suma de convolución es que es una operación *conmutativa*, es decir,

$$x[n]*h[n]=h[n]*x[n] \tag{2.13}$$

Una segunda propiedad útil de la convolución es que es *asociativa*, es decir,

$$\{x[n]*h_1[n]\}*h_2[n]=x[n]*\{h_1[n]*h_2[n]\} \tag{2.14}$$

Una tercera propiedad de la convolución es la *distributiva con respecto a la suma*, es decir,

$$x[n]*\{h_1[n]+h_2[n]\}=x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n] \tag{2.15}$$

lo que corresponde al lado izquierdo de la Ec. (2.15). En consecuencia, por la propiedad distributiva de

sistemas LIT

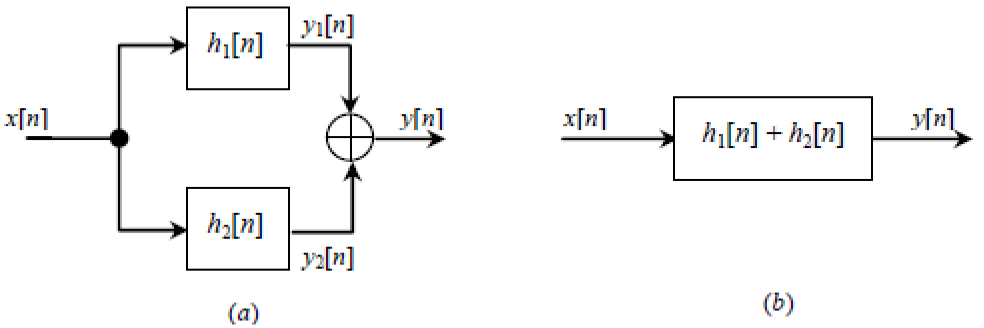


Figura 2.12

Ejemplo 7.

Considere el sistema mostrado en la Fig. 2.13 con

$$h_1[n] = \delta[n] - a\,\delta[n-1]$$

$$h_2[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$h_3[n] = a^n u[n]$$

$$h_4[n] = (n-1)\,u[n]$$

$$h_5[n] = \delta[n] + n\,u[n-1] + \delta[n-2]$$

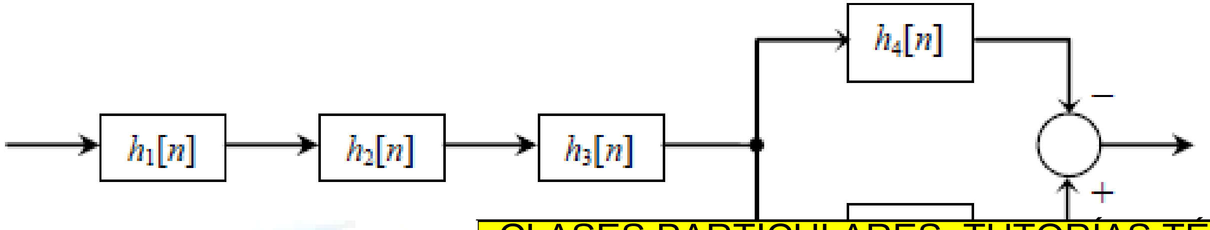


Figura 2.13

Ejemplo 7.

De la figura está claro que

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] * h_3[n] * \{h_5[n] - h_4[n]\}$$

Para evaluar $h[n]$, calculamos primero la convolución $h_1[n] * h_3[n]$

$$h_1[n] * h_3[n] = \{\delta[n] - a\delta[n-1]\} * a^n u[n]$$

$$= a^n u[n] - a^n u[n-1] = \delta[n]$$

También,

$$h_5[n] - h_4[n] = \delta[n] + n u[n-1] + \delta[n-2] - (n-1) u[n]$$

$$= \delta[n] + \delta[n-2] + u[n]$$

de modo que

Ejemplo 7.

donde s_2 representa la respuesta al escalón correspondiente a $h_2[n]$; En consecuencia, tenemos que

$$h[n]=\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n}u[n]+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-2}u[n-2]+\sum_{k=0}^{n}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k}$$

este resultado puede escribirse como

$$h[n]=\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-2}u[n-2]+2u[n]$$

$$\sum_{k=n_1}^{n_2}a^{k}=\frac{a^{n_1}-a^{n_2+1}}{1-a},\quad a\neq 1$$

Sistemas de Tiempo Continuo: La Integral de Convolución

La convolución es una operación integral que puede evaluarse analítica, gráfica o numéricamente. Aplicando la propiedad de conmutatividad de la convolución, Ec. (2.24), a la Ec., se obtiene

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

De esta última ecuación observamos que el cálculo de la integral de convolución involucra los cuatro pasos siguientes:

1. La respuesta al impulso $h(\tau)$ es invertida en el tiempo (es decir, reflejada con respecto al origen) para obtener $h(-\tau)$ y luego desplazada por t para formar $h(t-\tau)$, la cual es una función de τ con parámetro t.

2. Las señal $x(\tau)$ y la respuesta al impulso $h(t-\tau)$ se multiplican para todos los valores de τ con t fijo en algún valor.

Propiedades de la Integral de Convolución

La convolución en tiempo continuo satisface las mismas propiedades ya discutidas para la convolución de tiempo discreto. En particular, es *conmutativa*, *asociativa* y *distributiva*:

***Conmutativa*:**

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \tag{2.24}$$

***Asociativa*:**

$$\{x(t) * h_1(t)\} * h_2(t) = x(t) * \{h_1(t) * h_2(t)\} \tag{2.25}$$

***Distributiva*:**

$$x(t) * \{h_1(t) + h_2(t)\} = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \tag{2.26}$$

Ejemplo 8. La entrada $x(t)$ y la respuesta al impulso $h(t)$ de un sistema LIT de tiempo continuo están dadas por

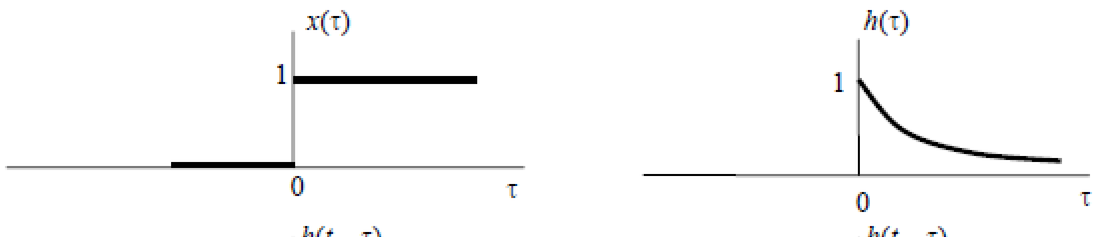
$$x(t)=u(t) \qquad h(t)=e^{-\alpha t}u(t),\ \ \alpha>0$$

Calcule la salida $y(t)$.

Solución: Por la Ec.

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

Las funciones $x(\tau)$ y $h(t-\tau)$ se muestran en la Fig. 2.15 para $t<0$ y $t>0$.



De la figura vemos que para $t < 0$, $x(\tau)$ y $h(t-\tau)$ no se solapan, mientras que para $t > 0$, se solapan desde $\tau = 0$ hasta $\tau = t$. En consecuencia, para $t < 0$, $y(t) = 0$. Para $t > 0$, tenemos

$$y(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$$

y podemos escribir la salida $y(t)$ como

$$y(t) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right) u(t)$$

Ejemplo 9

Ejemplo 9. Calcule la respuesta $y(t)$ para un sistema LIT de tiempo continuo cuya respuesta al impulso $h(t)$ y la entrada $x(t)$ están dadas por

$$h(t) = e^{-\alpha t}u(t) \qquad x(t) = e^{\alpha t}u(-t), \ \alpha > 0$$

Solución:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha\tau}u(-\tau)e^{-\alpha(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

Las funciones $x(\tau)$ y $h(t-\tau)$ se muestran en la Fig. 2.16a para $t < 0$ y $t > 0$.

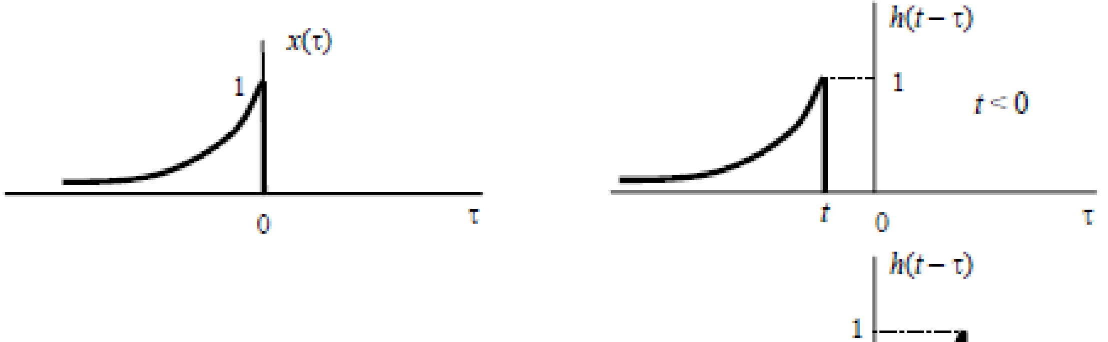


Figura 2.16 (a)

Ejemplo 9

Solución:

De la Fig. 2.16*a* vemos que para $t < 0$, $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ se solapan desde $\tau = -\infty$ hasta $\tau = t$, mientras que para $t > 0$, se solapan desde $\tau = -\infty$ hasta $\tau = 0$. En consecuencia, para $t < 0$, tenemos

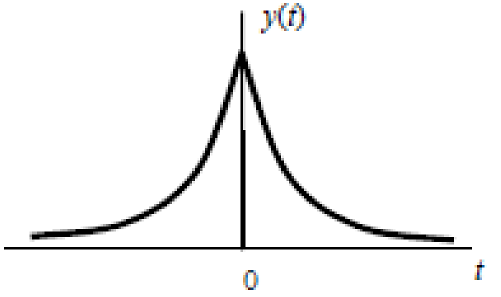
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\alpha\tau} e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = e^{-\alpha t} \int_{-\infty}^{t} e^{2\alpha\tau} d\tau = \frac{1}{2\alpha} e^{\alpha t}$$

y para $t > 0$,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t} e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = e^{-\alpha t} \int_{-\infty}^{0} e^{2\alpha t} dt = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha t}$$

Combinando las dos últimas relaciones, $y(t)$ se puede escribir como

$$y(t) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|t|}, \quad \alpha > 0$$



Este resultado se muestra en la Fig. 2.16*b*.

Ejemplo 10. Evalúe la convolución $y(t)=x(t)*h(t)$, donde $x(t)$ y $h(t)$ se muestran en la Fig. 2.17, mediante una técnica analítica.

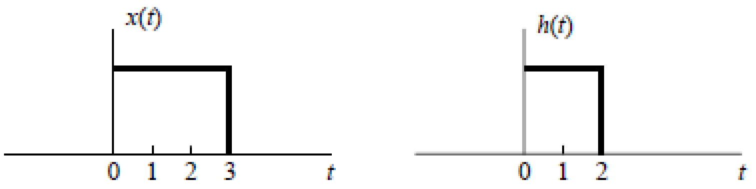


Figura 2.17

Solución: Primero expresamos $x(t)$ y $h(t)$ como funciones del escalón unitario:

$$x(t)=u(t)-u(t-3) \qquad h(t)=u(t)-u(t-2)$$

tenemos que

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [u(\tau)-u(\tau-3)][u(t-\tau)-u(t-\tau-2)]d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t-\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t-2-\tau)d\tau$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-3)u(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-3)u(t-2-\tau)d\tau$$

Puesto que

$$u(\tau)u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & 0<\tau<t,\ t>0 \\ 0, & \text{otros valores de } t \end{cases}$$

$$u(\tau-3)u(t-2-\tau) = \begin{cases} 1, & 3<\tau<t-2,\ t>5 \\ 0, & \text{otros valores de } t \end{cases}$$

$$u(\tau)u(t-2-\tau) = \begin{cases} 1, & 0<\tau<t,\ t>2 \\ 0, & \text{otros valores de } t \end{cases}$$

podemos expresar a $y(t)$ como

$$y(t)=\left[\int_0^t d\tau\right]u(t)-\left[\int_0^{t-2} d\tau\right]u(t-2)-\left[\int_3^t d\tau\right]u(t-3)+\left[\int_3^{t-2} d\tau\right]u(t-5)$$

$$=t\,u(t)-(t-2)u(t-2)-(t-3)u(t-3)+(t-5)u(t-5)$$

la cual se grafica en la Fig. 2.18.

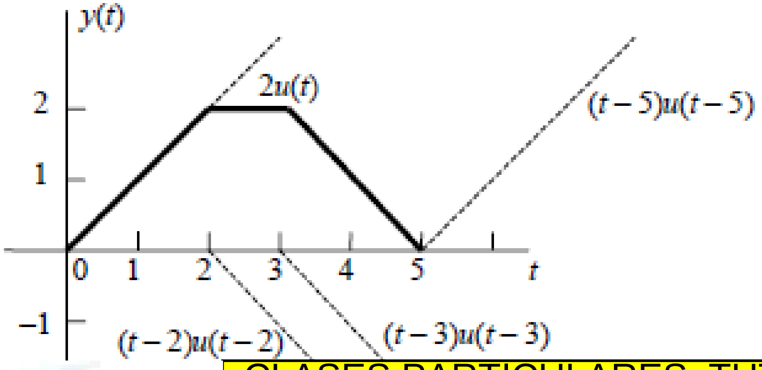


Figura 2.18

Ejemplo 11. Considere un sistema LIT de tiempo continuo descrito por

$$y(t)=\frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} x(\tau)\,d\tau \tag{2.48}$$

(a) Determine y dibuje la respuesta al impulso $h(t)$ del sistema.

(b) ¿Es causal este sistema?

Solución:

(a)
$$y(t)=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{t+T/2} x(\tau)\,d\tau-\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{t-T/2} x(\tau)\,d\tau$$

$$x(t)*u(t-t_0)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)u(t-\tau-t_0)\,d\tau=\int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau)\,d\tau$$

$$y(t)=\frac{1}{T}x(t)*u\left(t+\frac{T}{2}\right)-\frac{1}{T}x(t)*u\left(t-\frac{T}{2}\right)$$

$$=x(t)*\frac{1}{T}\left[u\left(t+\frac{T}{2}\right)-u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]=x(t)*h(t)$$

$$h(t)=\frac{1}{T}\left[u\left(t+\frac{T}{2}\right)-u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]=\begin{cases}\frac{1}{T}, & -\frac{T}{2}<t\leq\frac{T}{2}\\ 0, & \text{otros valores de } t\end{cases}$$

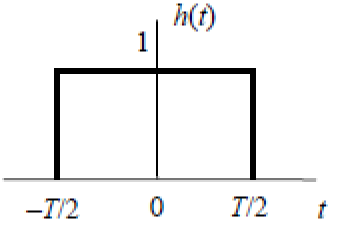


Figura 2.19

(b)

De la Ec. (2.50) o de la Fig. 2.19 vemos que $h(t)\neq 0$ para $t<0$. En consecuencia, el sistema no es causal.

Ejemplo 12. Considere un sistema LIT de tiempo discreto cuya entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ están relacionadas por la ecuación

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} 2^{k-n} x[k+1]$$

Determine si el sistema es causal.

Solución: Por definición, la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema está dada por

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} 2^{k-n} \delta[k+1] = \sum_{k=-\infty}^{n} 2^{-(n+1)} \delta[k+1] = 2^{-(n+1)} \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k+1]$$

Cambiando la variable $k+1=m$, obtenemos

$$h[n] = 2^{-(n+1)} \sum_{k=-\infty}^{n+1} \delta[m] = 2^{-(n+1)} u[n+1]$$

Ejemplo 13. Considere un sistema LIT de tiempo discreto cuya respuesta al impulso $h[n]$ está dada por

$$h[n] = \alpha^n u[n]$$

Determine si el sistema es estable.

Solución: Tenemos que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| h[k] \right| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \alpha^k u[k] \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \alpha \right|^k = \frac{1}{1-\left|\alpha\right|}, \qquad \left|\alpha\right| < 1$$

Por lo tanto, el sistema es estable si $\left|\alpha\right| < 1$.

Ejemplo 15. Considere un sistema LIT cuya respuesta al impulso es

$$h[n]=u[n]$$

La respuesta de este sistema a una entrada arbitraria $x[n]$ es

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]u[n-k]$$

Puesto que $u[n-k]=0$ para $n-k \geq 0$, esta última ecuación se puede escribir como

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

Es decir, el sistema es un sumador. Esta ecuación se puede escribir como

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]+x[n]=y[n-1]+x[n]$$

Este sistema es invertible y su inverso está dado por

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

Tomando $x[n] = \delta[n]$, la respuesta al impulso del sistema inverso es

$$h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

Mediante cálculo directo, se obtiene

$$h[n] * h_1[n] = u[n] * \{\delta[n] - \delta[n-1]\}$$

$$= u[n] * \delta[n] - u[n] * \delta[n-1] = u[n] - u[n-1]$$

$$= \delta[n]$$

lo que verifica que los sistemas especificados son inversos.