Capítulo 4

Fuerzas y equilibrio

La estática determina las condiciones bajo las cuales un cuerpo actuado por diversas fuerzas permanece en equilibrio, es decir en reposo. El desarrollo de la estática viene desde mucho tiempo atrás, mucho antes del desarrollo de la dinámica. Algunos de sus principios fueron formulados por los egipcios y los babilónicos en problemas relacionados con la construcción de las pirámides y de templos. Entre los más antiguos escritos sobre este tema se puede mencionar a Arquímedes quién formuló los principios del equilibrio de fuerzas actuando en palancas y algunos principios de la hidrostática. Por estas razones no creemos conveniente considerar a la estática como un caso particular de la dinámica.

La principal razón para que desarrollo de la dinámica fuera posterior, está directamente relacionada con el desarrollo de los métodos para medir el tiempo, es decir del desarrollo de los relojes.

Generalmente ocurre algo similar. Un avance en una teoría permite la construcción de nuevos aparatos de medición que a su vez ayudan a perfeccionar la teoría y así sucesivamente. El desarrollo de nuevas tecnologías permite el avance en las teorías y recíprocamente. ¿Qué fue primero?. Nuestra posición es que lo primero es la observación del mundo natural mediante los instrumentos naturales básicos, nuestros sentidos.

4.1. Condiciones de equilibrio. Leyes de la estática

4.1.1. Equilibrio de una partícula

La condición necesaria y suficiente para que una partícula permanezca en equilibrio (en reposo) es que la resultante de las fuerzas que actúan sobre ella sea cero

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = \vec{0}. \tag{4.1}$$

Naturalmente con esta condición la partícula podría también moverse con velocidad constante, pero si está inicialmente en reposo la anterior es una condición necesaria y suficiente.

4.1.2. De un sistema de partículas

Para que un sistema de partículas permanezca en equilibrio, cada una de sus partículas debe permanecer en equilibrio. Ahora las fuerzas que actúan sobre cada partícula son, en parte de interacción $\vec{f}_{ij}$ con las otras partículas del sistema y en parte proveniente del exterior $\vec{F}_i^{ext}$, es decir

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}. \tag{4.2}$$

Aquí $\vec{f}_{ij}$ representa la fuerza que la partícula j ejerce sobre la partícula i. Pero las fuerzas de interacción satisfacen la tercera ley de Newton, ley llamada de acción y reacción que dice

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}, \tag{4.3}$$

además que $\vec{f}_{ij}$ es paralela a la línea que une las partículas i con j

$$\vec{f}_{ij} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \vec{0}. \tag{4.4}$$

De este modo un sistema de partículas está en equilibrio si

$$\vec{F}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij} = \vec{0}, \text{ para todo } i.$$

En otras palabras la resultante de las fuerzas que actúan sobre cada partícula debe ser nula.

4.1.3. Cuerpo rígido

En el desarrollo de la estática consideraremos situaciones de equilibrio de cuerpos rígidos, es decir que no se deforman. En rigor no existen cuerpos indeformables, de manera que la aplicación de las leyes de la estática es una aproximación que es buena si las deformaciones son despreciables frente a otras dimensiones del problema. El tema de la estática de cuerpos deformable es el tema de otros cursos.

Si el cuerpo rígido permanece en equilibrio con el sistema de fuerzas exteriores aplicado, entonces para que todas las partículas estén en equilibrio es suficiente que tres de sus partículas no colineales estén en equilibrio. Las demás no pueden moverse por tratarse de un cuerpo rígido. Las condiciones bajo las cuales un cuerpo rígido permanece en equilibrio son que la fuerza externa resultante y el torque externo resultante respecto a un origen arbitrario son nulos, es decir

$$\vec{F}^{ext} = \sum \vec{F}_i^{ext} = \vec{0}, \tag{4.5}$$

$$\vec{\Gamma}_O^{ext} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} = \vec{0}, \tag{4.6}$$

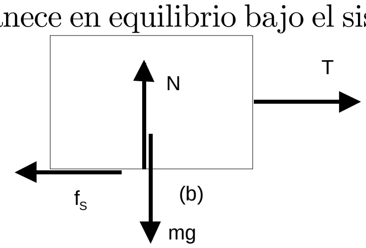
siendo O un punto arbitrario. De acuerdo a

$$\vec{\Gamma}_A = \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \vec{F}_i = \vec{\Gamma}_O - \vec{r}_A \times \vec{F}, \tag{4.7}$$

se constata que entonces el torque resultante es cero respecto a cualquier punto.

4.1.4. La fuerza de roce estática

Cuando los cuerpos están en equilibrio, la fuerza de roce se denomina fuerza de roce estática f_s. En la figura siguiente se ilustra lo que acontece cuando un cuerpo permanece en equilibrio bajo el sistema de fuerzas indicado



La resultante de las fuerzas en el sentido horizontal y vertical debe ser nula, entonces

$$\begin{aligned} T - f_S &= 0, \\ N - mg &= 0, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} f_S &= T, \\ N &= mg. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Es decir, la fuerza de roce permanece igual a la fuerza aplicada de tensión. Pero eso tiene un límite, La fuerza de roce estática puede aumentar hasta un límite, el cual depende de la naturaleza de las superficies en contacto a través de un coeficiente μ_S llamado coeficiente de roce estático, y del grado en que las superficies estén apretadas entre sí, esto es ese valor máximo es proporcional a la componente normal de la fuerza N. En este modelo entonces

$$f_S^{\text{máx}} = \mu_S N, \tag{4.9}$$

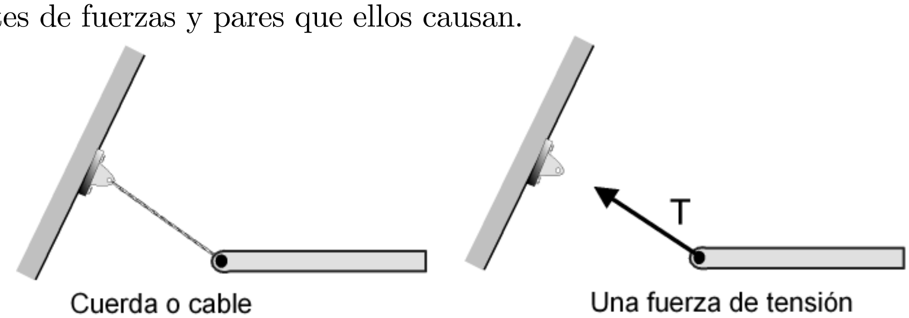
siendo entonces

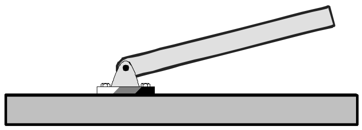
$$f_S \leqslant \mu_S N. \tag{4.10}$$

Si la fuerza aplicada T iguala a ese valor máximo se dice que el cuerpo está en equilibrio límite o bien a punto de resbalar. Para fuerzas aplicadas mayores el cuerpo se pondrá en movimiento acelerado, tema que será estudiado en el capitulo de dinámica.

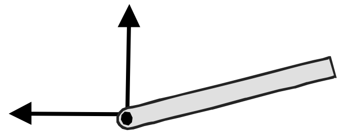
4.1.5. Fuerzas causadas por ciertos soportes

Es conveniente analizar en forma más o menos sistemática las fuerzas que causadas por ciertos tipos de soportes, cuerdas, resortes, empotraduras, articulaciones y otros, donde en las figuras que siguen se ilustran las componentes de fuerzas y pares que ellos causan.

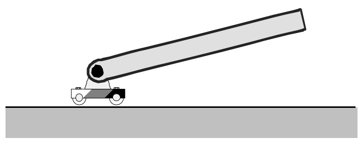




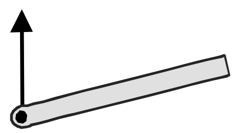
soporte de pasador



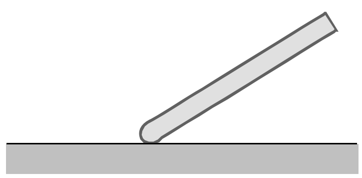
dos componentes de fuerzas



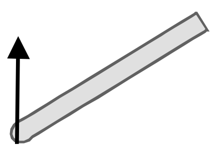
soporte de rodillo



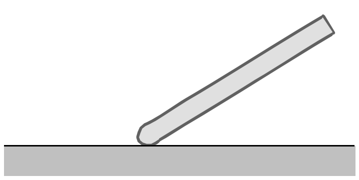
una componente de fuerza



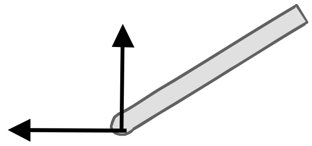
contacto con superficie lisa



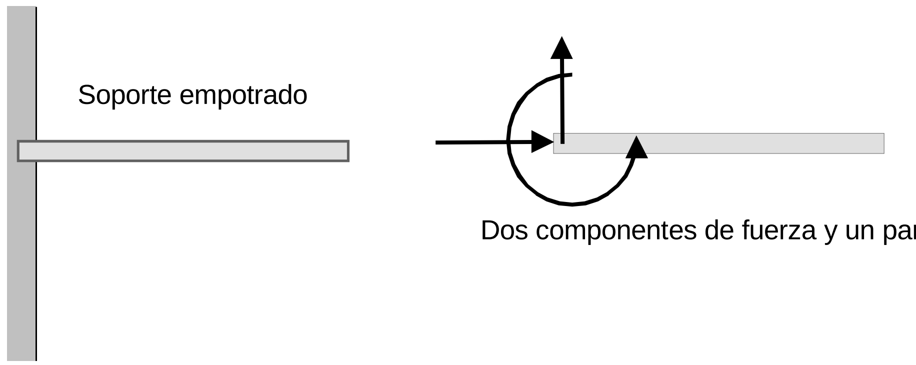
Una fuerza normal



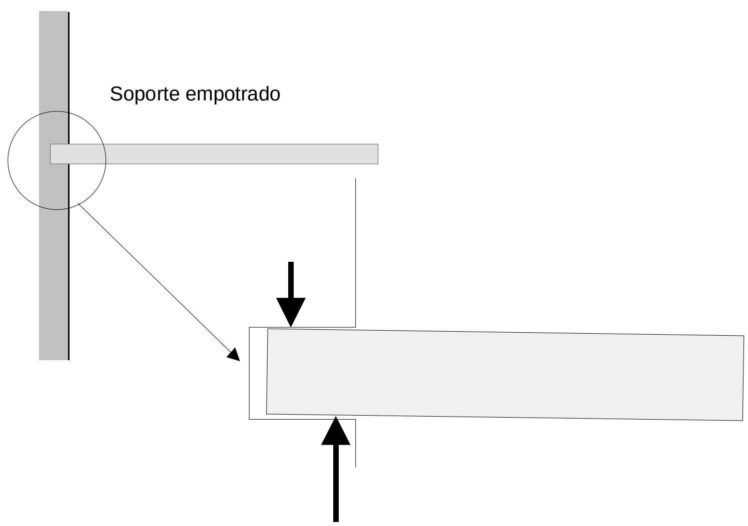
contacto con superficie rugosa



Una fuerza normal y una fuerza de roce

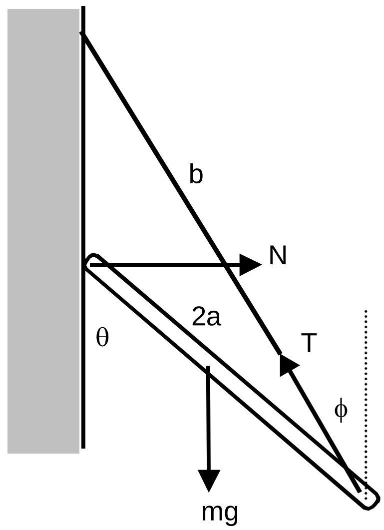


El origen del par se puede explicar de acuerdo a la figura que sigue donde en general se puede pensar que las reacciones verticales en la empotradura son dos, de diferente magnitud y, lo que es más importante, no están sobre la misma línea. Para sumarlas, es necesario trasladar una a la línea de acción de la otra y eso causa el denominado par de la fuerza.



4.2. Ejemplos

Ejemplo 4.2.1 *La barra de la figura de masa m y largo $2a$ está en equilibrio apoyada sobre una pared vertical lisa y sostenida por un extremo mediante un hilo de largo b. Determine los posibles ángulos θ de equilibrio.*



Solución. Tenemos

$$\begin{aligned} N - T\sin\phi &= 0, \\ T\cos\phi - mg &= 0, \\ mga\sin\theta - T2a\sin(\theta-\phi) &= 0, \end{aligned}$$

además de una relación geométrica

$$\sin\phi = \frac{2a}{b}\sin\theta.$$

De la segunda y la tercera

$$\sin\theta - 2\frac{\sin(\theta-\phi)}{\cos\phi} = 0,$$

$$\begin{aligned} -\sin\theta\cos\phi + 2\cos\theta\sin\phi &= 0, \\ \sin\theta\cos\phi &= 2\cos\theta\frac{2a}{b}\sin\theta \end{aligned}$$

de donde una solución es $\sin\theta = 0 \to \theta = 0$, $\theta = \pi$. La otra sigue de

$$\cos\phi = \frac{4a}{b}\cos\theta,$$

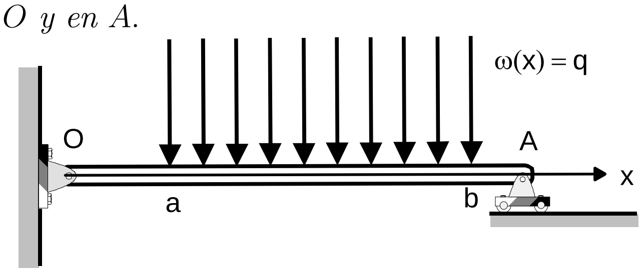
eliminando ϕ

$$\begin{aligned}1 &= \frac{4a^2}{b^2}\sin^2\theta + \frac{16a^2}{b^2}\cos^2\theta,\\ 1-\frac{4a^2}{b^2} &= \frac{12a^2}{b^2}\cos^2\theta,\\ \cos\theta &= \sqrt{\frac{b^2-4a^2}{12a^2}},\end{aligned}$$

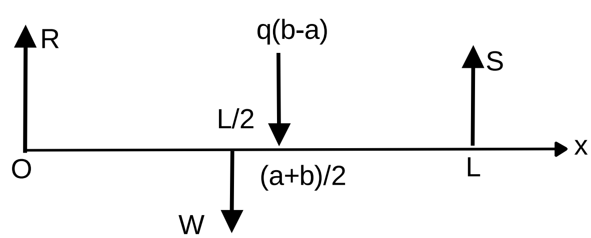
esta solución existe si $b > 2a$ y

$$\begin{aligned}b^2-4a^2 &< 12a^2,\\ b &< 4a.\end{aligned}$$

EJEMPLO 4.2.2 *La barra de la figura de longitud L está articulada en O, apoyada en A, tiene un peso total W y está cargada por una fuerza distribuida uniforme de magnitud $w(x) = q\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ desde a hasta b. Determine las reacciones en O y en A.*



Solución. El sistema equivalente de fuerzas es como en la figura siguiente



de modo que tenemos

$$\sum F_y = R + S - W - q(b-a) = 0$$

y momentando respecto a O

$$\sum \Gamma_O = SL - W\frac{L}{2} - q(b-a)\frac{a+b}{2} = 0,$$

de donde despejamos

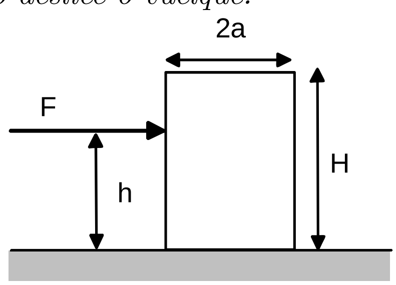
$$S = \frac{W}{2} + q(b-a)\frac{a+b}{2L},$$

y de la primera

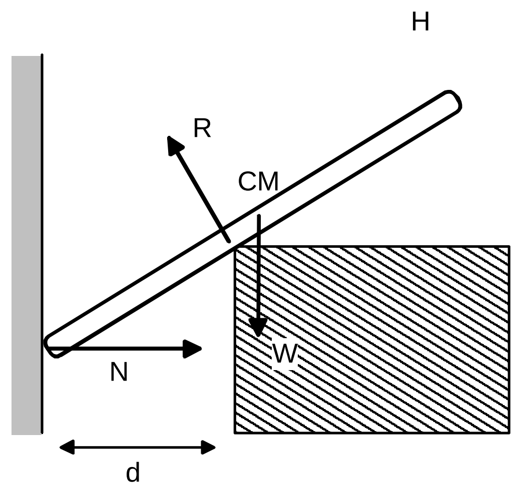
$$\begin{aligned} R &= W + q(b-a) - (\frac{W}{2} + q(b-a)\frac{a+b}{2L}), \\ &= \frac{W}{2} + q(b-a)(1 - \frac{a+b}{2L}). \end{aligned}$$

4.3. Ejercicios

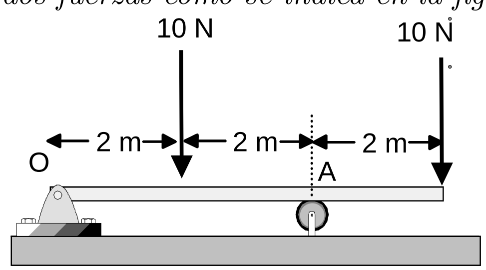
Ejercicio 4.1 *Un cuerpo homogéneo de masa M altura H y base de largo $2a$, es empujado por una fuerza horizontal F aplicada en un costado a la altura h del suelo. Si el coeficiente de roce estático entre el suelo y el cuerpo es μ_S, determine la condición para que al romperse el equilibrio debido al aumento de F el cuerpo deslice o vuelque.*



Ejercicio 4.2 *Una barra de masa M y de largo L se equilibra como se indica en la figura. No hay roce. Determine el ángulo que hace la barra con la horizontal cuando hay equilibrio.*



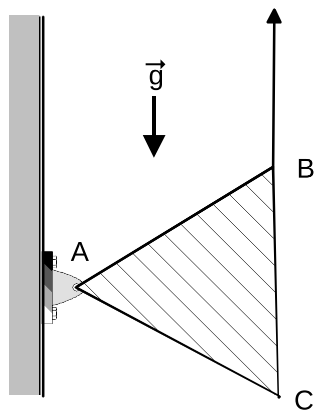
Ejercicio 4.3 *Una barra de largo $L = 6\,\mathrm{m}$ y de peso $W = 20\,\mathrm{N}$ está articulada en su extremo izquierdo a un punto fijo O, apoyada en un soporte liso en A y cargada por dos fuerzas como se indica en la figura*



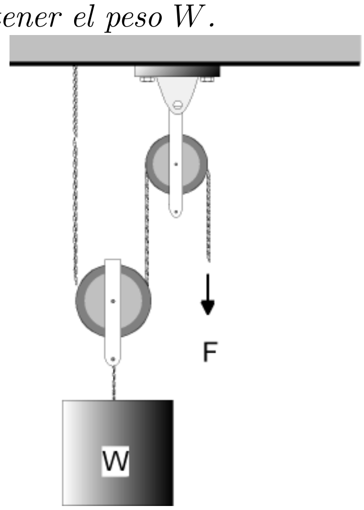
a) Determine la reacción vertical en la articulación.

b) Determine la reacción vertical en el soporte.

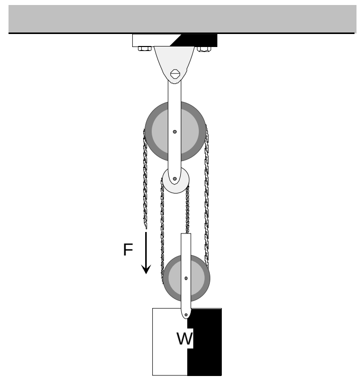
Ejercicio 4.4 *Una lámina de peso W en forma de triángulo equilátero de lado a, puede moverse en un plano vertical estando el vértice A articulado a un punto fijo. Si al vértice C se le aplica una fuerza vertical hacia arriba de magnitud F, determine el ángulo θ que hace la arista AC con la vertical en la situación de equilibrio.*



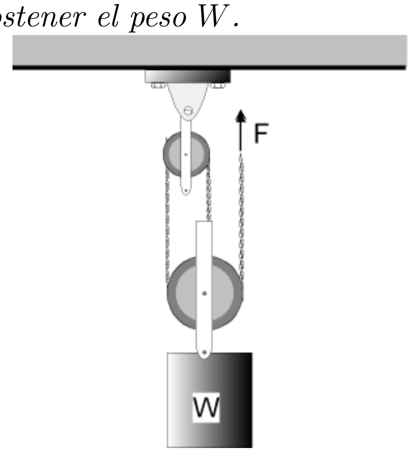
Ejercicio 4.5 *Considere el sistema de la figura sin roce, determine la fuerza F necesaria para sostener el peso W.*



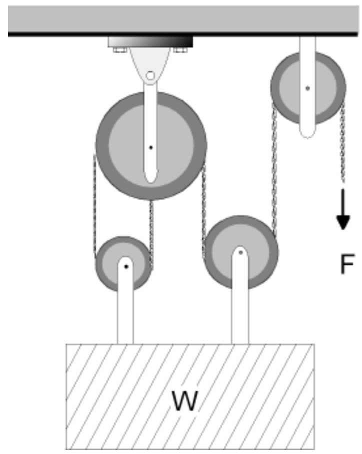
Ejercicio 4.6 *Para el sistema de la figura sin roce, determine la fuerza F necesaria para sostener el peso W.*



Ejercicio 4.7 *Para el sistema de la figura, no hay roce. Determine la fuerza F necesaria para sostener el peso W.*

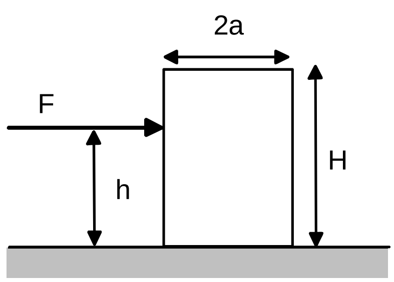


Ejercicio 4.8 *En el sistema indicado en la figura, no hay roce y las poleas son livianas. Determine la magnitud de la fuerza F necesaria para sostener el peso W.*

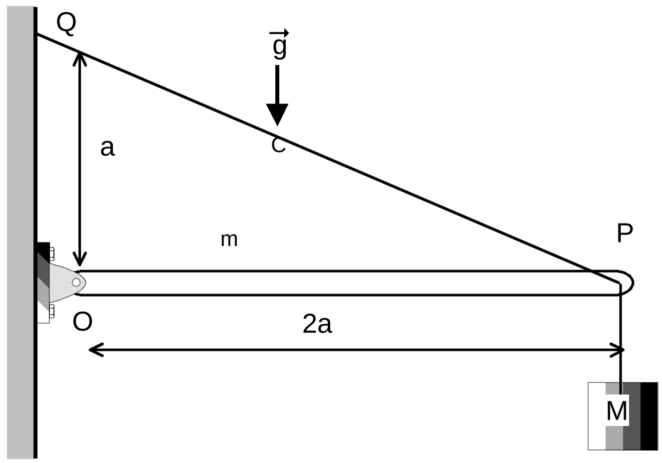


Ejercicio 4.9 *Tres esferas iguales de radio R están sobre un plano horizontal suave, en contacto entre ellas de modo que sus centros forman un triángulo equilátero de arista $2R$. A la altura de un radio, el conjunto se abraza por una cuerda inextensible que las sostiene. Una cuarta esfera se coloca sobre el centro del conjunto. Determine la tensión que se desarrolla en la cuerda.*

Ejercicio 4.10 *El bloque de la figura tiene masa M y el coeficiente de roce estático con el suelo es $\mu_S = 0{,}5$, las longitudes indicadas son $2a = 1\,\mathrm{m}$, $H = 2\,\mathrm{m}$, $h = 1{,}5\,\mathrm{m}$. Determine qué sucede al aumentar la fuerza aplicada F.*

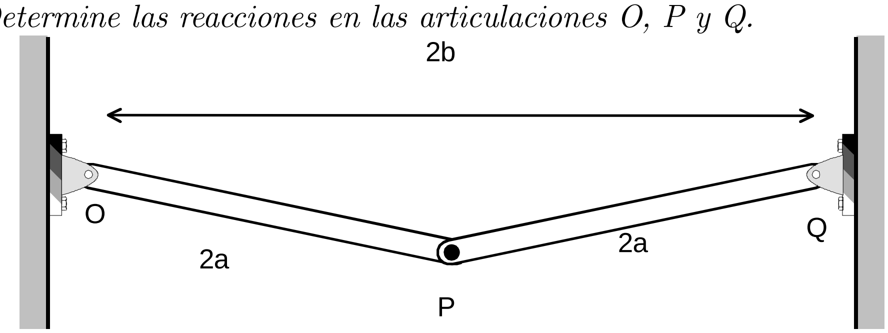


Ejercicio 4.11 *La barra OP de masa m y largo $2a$ esta articulada en un punto fijo O, sostenida por una cuerda amarrada al punto fijo Q a distancia a de O, y al extremo P de la barra, como se indica en la figura. En el extremo P, cuelga una masa M.*

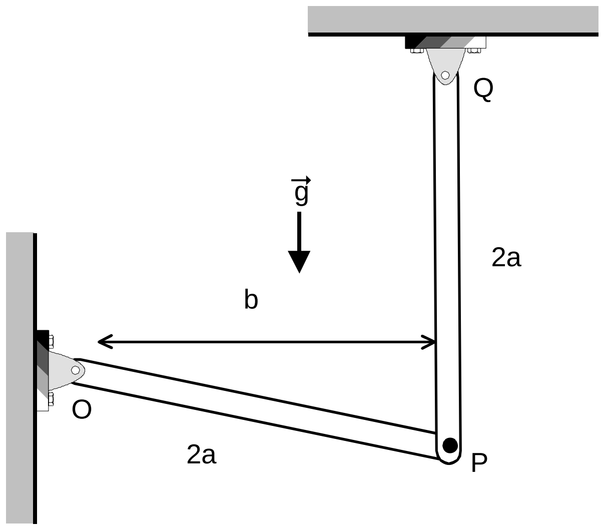


Determine la tensión en la cuerda QP y la reacción en O.

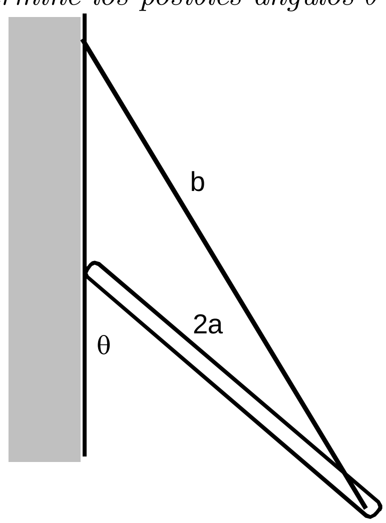
Ejercicio 4.12 *Dos barras de masa M y largo $2a$ están articuladas en puntos fijos O y Q separados una distancia $2b$ a la vez que están articuladas en P. Determine las reacciones en las articulaciones O, P y Q.*



Ejercicio 4.13 *Dos barras de masa M y largo $2a$ están articuladas en puntos fijos O y Q a la vez que están articuladas entre sí en P, como se indica en la figura. Determine las reacciones en O y en Q.*

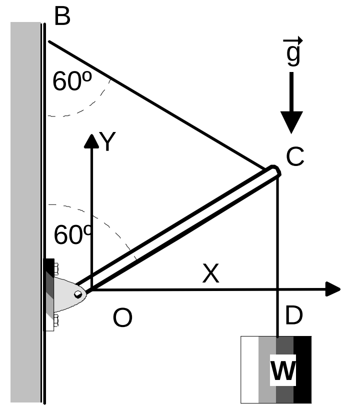


Ejercicio 4.14 *La barra de la figura de masa M y largo $2a$ está en equilibrio apoyada sobre una pared vertical lisa y sostenida por un extremo mediante un hilo de largo b. Determine los posibles ángulos θ de equilibrio.*

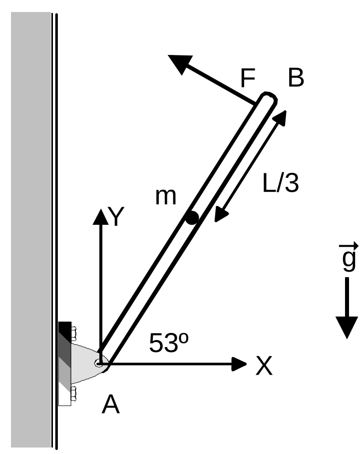


Ejercicio 4.15 *La figura muestra una barra homogénea OC de largo $L =$ $1\,\mathrm{m}$ y masa $M = 12\,\mathrm{kg}$, pivoteada en O y en el otro extremo ligada a una cuerda BC. En el extremo C de la barra cuelga un peso $W = 60\,\mathrm{N}$ por medio de una cuerda CD. Determinar (a) La tensión en la cuerda CD. (b) La*

tensión en la cuerda BC. (c) La reacción $\vec{R}$ en el extremo O de la barra. (R: (a) $60\,\mathrm{N}$*, (b)* $120\,\mathrm{N}$*, (c) (*$103{,}9; 120$*)* N*)*

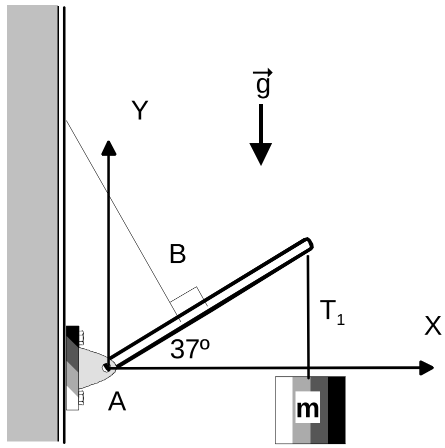


EJERCICIO 4.16 *La figura nuestra una barra delgada y homogénea AB de largo* $L = 2\,\mathrm{m}$ *y de masa* $M = 12\,\mathrm{kg}$*, la cual se encuentra pivoteada (articulada) en el extremo A. Sobre la barra en el punto C, se encuentra adherida una partícula de masa* $m = 1\,\mathrm{kg}$*. La barra se encuentra en equilibrio estático cuando se le aplica una fuerza de magnitud F en el extremo B perpendicular a la barra. Determine (a) La magnitud de la fuerza aplicada. (b)La reacción que ejerce la articulación sobre la barra. (c) La reacción que ejerce la barra sobre la articulación.*

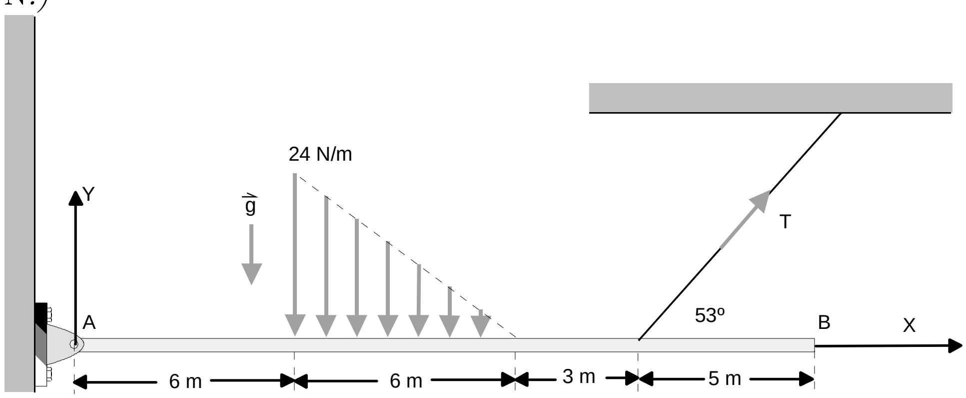


EJERCICIO 4.17 *El sistema de la figura está en equilibrio. Si la barra es de longitud L, de masa* $M = 8\,\mathrm{kg}$ *y la masa m es* $m = 10\,\mathrm{kg}$ *y* $AB = L/3$

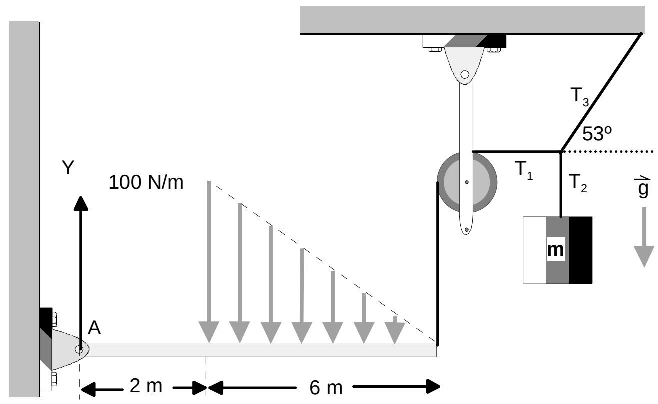
determine (a) La tensión T. (b) La tensión T_1. (c) La reacción en el pivote A.



EJERCICIO 4.18 *Una viga de masa* $m = 6\,\mathrm{kg}$ *y largo* $L = 20\,\mathrm{m}$ *está sometida a una carga distribuida y a una tensión como se indica en la figura. La distribución de carga es lineal con un máximo de* $24\,\mathrm{N\,m^{-1}}$*. Determine (a) La reacción en A. (b) La tensión en la cuerda. (R: (a)* $(-58{,}8; 53{,}6)\,\mathrm{N}$*. (b)* $98\,\mathrm{N}$*.)*



EJERCICIO 4.19 *La figura muestra un sistema en equilibrio, donde la barra tiene masa despreciable, la distribución de carga aplicada es lineal con un máximo de* $100\,\mathrm{N\,m^{-1}}$*. Determine la masa del cuerpo colgante. (R:* $20\,\mathrm{kg}$*)*

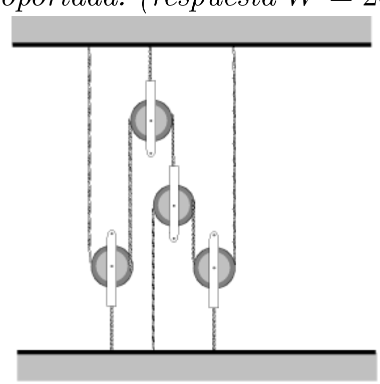


Ejercicio 4.20 *La placa de la figura pesa* $90\,\mathrm{N}$ *y está sostenida por el sistema de cables y poleas ideales. (sin masa y sin roce). Si la placa está en equilibrio en forma horizontal, determine*

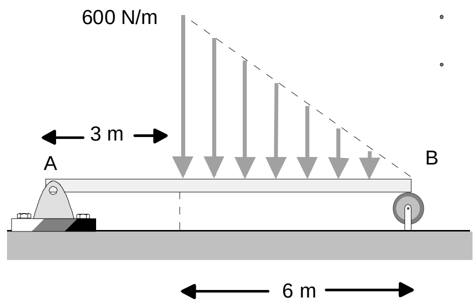
a) La tensión en el cable que pasa por la polea A.

b) La tensión en el cable que pasa por la polea B.

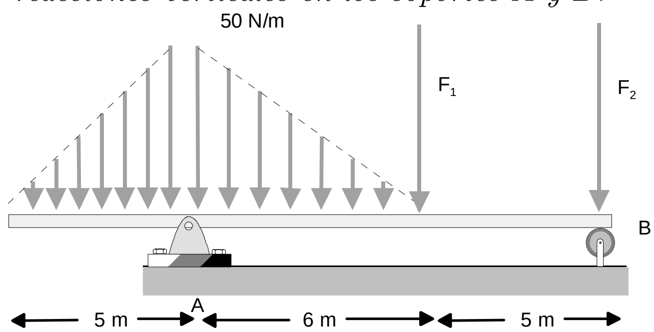
Ejercicio 4.21 *Las cinco cuerdas del sistema de la figura pueden soportar una tensión máxima de* $1500\,\mathrm{N}$ *sin cortarse. Determine el peso máximo de la placa que puede ser soportada. (respuesta* $W = 2625\,\mathrm{N}$*)*



Ejercicio 4.22 *La placa liviana de la figura de longitud* $9\,\mathrm{m}$ *está soportando una fuerza distribuida en forma lineal con un máximo de* $600\,\mathrm{N\,m^{-1}}$*. Determine las reacciones verticales en los soportes A y B.*



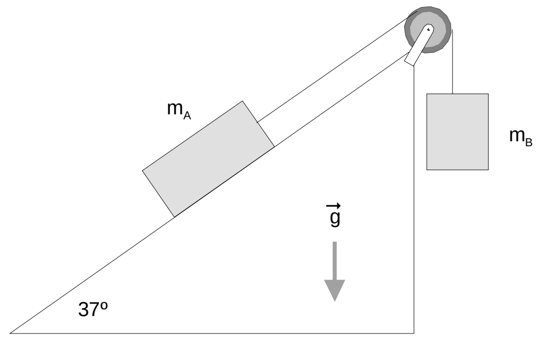
Ejercicio 4.23 *La placa de la figura de longitud* $16\,\mathrm{m}$ *y de masa* $2\,\mathrm{kg}$ *está soportando dos fuerzas distribuidas en forma lineal con máximos de* $50\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ *además de dos fuerzas hacia abajo de magnitudes* $F_1 = 600\,\mathrm{N}$ *y* $F_2 = 400\,\mathrm{N}$. *Determine las reacciones verticales en los soportes* A *y* B.



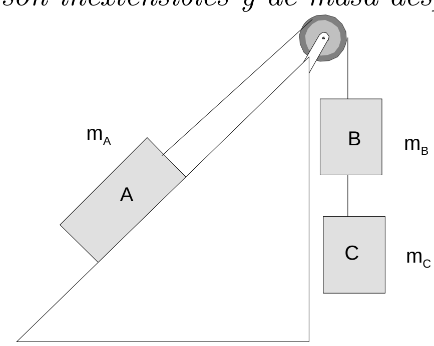
Ejercicio 4.24 *La figura muestra un plano inclinado rugoso que forma un ángulo de* 37^o *con la horizontal y dos bloques* A *y* B *en reposo, unidos por una cuerda inextensible y de masa despreciable. Si la masa del cuerpo* A *es* $m_A = 3\,\mathrm{kg}$ *y el coeficiente de roce estático es* $\mu_S = 0{,}2$, *determine*

i) Los valores máximos y mínimos de m_B *compatibles con el equilibrio.*

ii) El valor de la tensión de la cuerda en los dos casos anteriores.



EJERCICIO 4.25 *Tres cuerpos de masa* $m_A = 3\,\mathrm{kg}$, $m_B = 2\,\mathrm{kg}$ *y* $m_C = 1\,\mathrm{kg}$ *se encuentran en reposo como muestra la figura, de tal forma que cualquier pequeña perturbación haría que el cuerpo A subiera por el plano. Las cuerdas que unen los cuerpos son inextensibles y de masa despreciable. Se pide*

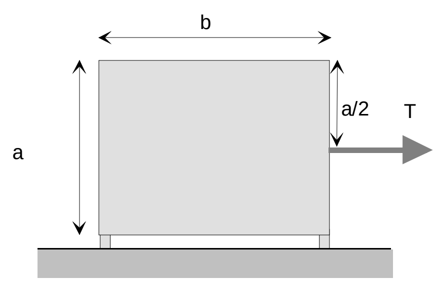


a) *El diagrama de fuerzas que actúan sobre* m_A.

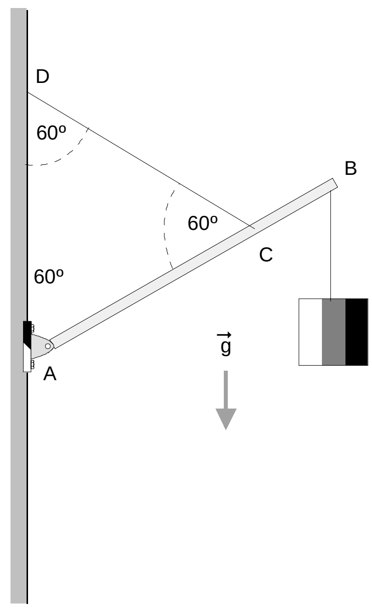
b) *El coeficiente de roce estático entre* m_A *y la superficie.*

c) *Las tensiones en las cuerdas.*

EJERCICIO 4.26 *Un objeto homogéneo en forma de paralelepípedo de altura* a *y de ancho* b *está en reposo soportado por dos patitas de masa despreciable en uno y otro extremo como se indica en la figura. Si se aplica una fuerza horizontal* T *a altura* $a/2$ *determine el valor máximo de* μ_S *tal que al romperse el equilibrio aumentando* T, *el cuerpo deslice sin volcar. (respuesta:* $\mu_S = b/a$*)*



Ejercicio 4.27 *Se tiene un sistema formado por una barra uniforme de* 6 m *de longitud, de masa* 100 kg *articulada en el punto* A *a un mástil vertical. En el extremo* B *de la barra cuelga un cuerpo de masa* 400 kg*. La barra está sostenida por un cable inextensible atado a los puntos* C *sobre la barra a distancia* 1,5 m *del extremo* B *y* D *sobre el mástil, de tal modo que el triángulo* ACD *es equilátero. Determine*



a) La magnitud de la tensión del cable CD.

b) Las componentes de la fuerza que hace el pivote en A *sobre la barra.*

c) El torque ejercido por la tensión del cable sobre el mástil, respecto al punto A*.*

EJERCICIO 4.28 *Se ata un cuerpo de* 200 N *de peso al punto medio de una cuerda y dos personas tiran de la misma manera de sus extremos de tal modo que el cuerpo queda suspendido como se indica en la figura. Determine la fuerza de tensión que deben ejercer las personas.*