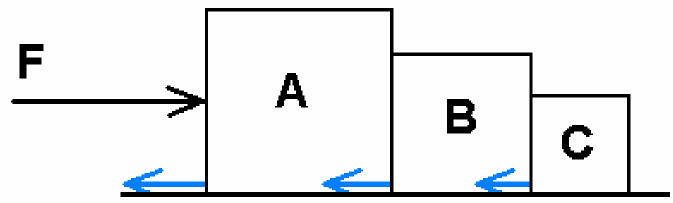
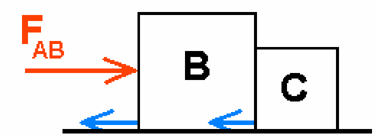
PROBLEMA 1. PROBLEMA DE DINÁMICA

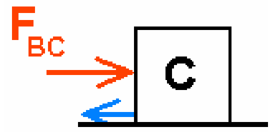
Tres bloques A, B y C de 30, 20 y 10 kg respectivamente, se encuentran juntos sobre una superficie horizontal con un coeficiente de rozamiento de 0’4.



a) ¿Qué fuerza, F, hay que aplicar al bloque A para que el conjunto adquiera una aceleración constante de 3 m/s^2?



b) Calcula la fuerza, F_{AB}, que el bloque A ejerce sobre el B, y la F_{BC}, que el bloque B ejerce sobre el bloque C.



c) Calcula la fuerza, F_{BA}, que el bloque B ejerce sobre el A, y la F_{CB}, que el bloque C ejerce sobre el bloque B.

SOLUCIÓN:

a) Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica, y teniendo en cuanta que las fuerzas que actúan a favor del movimiento se toman con signo positivo y las que se oponen al movimiento de toman con signo negativo:

$$\mathbf{a} = \frac{\Sigma \mathbf{F}}{\Sigma \mathrm{m}} = \frac{\mathbf{F} - \mathbf{F}_{RA} - \mathbf{F}_{RB} - \mathbf{F}_{RC}}{m_A + m_B + m_C}$$

$F_{RA} = \mu.m_A.g = 0’4.30.9’8 = 117’6$ N
$F_{RB} = \mu.m_B.g = 0’4.20.9’8 = 78’4$ N
$F_{RC} = \mu.m_{AC}g = 0’4.10.9’8 = 39’2$ N

$$3 = \frac{\mathbf{F} - 117'6 - 78'4 - 39'2}{30 + 20 + 10} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = 415'2\ \mathrm{N}$$

b) Separamos el bloque A y resolvemos sólo con el B y C:

$$\mathbf{a} = \frac{\Sigma \mathbf{F}}{\Sigma \mathrm{m}} = \frac{\mathbf{F}_{AB} - \mathbf{F}_{RB} - \mathbf{F}_{RC}}{m_B + m_C} \quad \Rightarrow \quad 3 = \frac{\mathbf{F}_{AB} - 78'4 - 39'2}{20 + 10} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_{AB} = 207'6\ \mathrm{N}$$

Nos quedamos sólo con el bloque C:

$$\mathbf{a} = \frac{\Sigma \mathbf{F}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathbf{F}_{BC} - \mathbf{F}_{RC}}{m_C} \quad \Rightarrow \quad 3 = \frac{\mathbf{F}_{BC} - 39'2}{10} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_{BC} = 69'2\ \mathrm{N}$$

c) Aplicando el tercer principio de la dinámica, acción y reacción, la fuerza que el bloque B ejerce sobre el bloque A será simultánea, de igual módulo y sentido opuesto a la que el bloque A ejerce sobre el B:

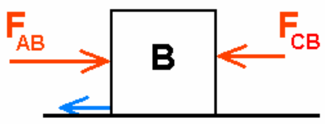
$\mathbf{F}_{BA} = -\mathbf{F}_{AB} = -207'6$ N

Por la misma razón:

$\mathbf{F}_{CB} = -\mathbf{F}_{BC} = -69'2$ N

Comprobemos los resultados, aplicando la ecuación fundamental sólo al bloque B, si las fuerzas son correctas el bloque se moverá con una aceleración de 3 m/s^2.

Sobre el bloque B actúan tres fuerzas: La que el bloque A hace sobre él, $\mathbf{F}_{AB}$, que le hace moverse, la que el bloque C hace sobre él, $\mathbf{F}_{CB}$, que lo frena, y la fuerza de rozamiento, $\mathbf{F}_{RB}$, que también lo frena.



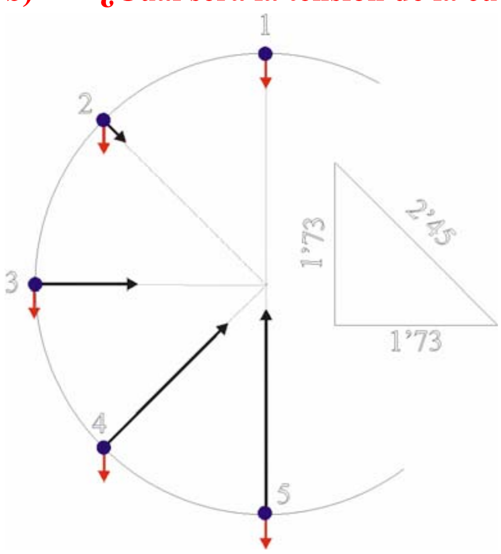
$$\mathbf{a} = \frac{\Sigma \mathbf{F}}{\Sigma m} = \frac{\mathbf{F}_{AB} - \mathbf{F}_{CB} - \mathbf{F}_{RB}}{m_B} = \frac{207'6 - 69'2 - 78'4}{20} = 3\ \mathrm{m/s^2}$$

PROBLEMA 2. FUERZA CENTRÍPETA

Se hace girar, en una circunferencia vertical, un cuerpo de 2 kg, atado a una cuerda de 2'45 m.

a) Calcular la velocidad mínima de éste en el punto superior (1) para que la cuerda esté tensa.

b) ¿Cuál será la tensión de la cuerda en los puntos: 1, 2, 3, 4 y 5.



SOLUCIÓN:

a) Arriba (1), la velocidad mínima coincide con la tensión mínima (T = 0), la única fuerza que apunta hacia el centro es el peso, en rojo en el dibujo, y éste es la fuerza centrípeta:

$$m.g = m\frac{v_1^2}{R} \Rightarrow v_1 = \sqrt{g.R}$$

$$v_1 = \sqrt{9'8.2'45} = 4'9\ \mathrm{m/s}$$

b) Aplicando el principio de conservación de la energía, ya que no hay pérdidas por rozamiento, calculamos la velocidad en el punto (2) para poner hallar la fuerza centrípeta. Con ésta y la componente normal del peso calculamos la tensión:

Punto 2: $h_{12} = R - R.\mathrm{sen}\ \varphi = 2'45 - 2'45.\mathrm{sen}\ 135 = 0'717$ m (altura de 1 respecto a 2)

$$\frac{1}{2}m.v_1^2 + m.g.h_{12} = \frac{1}{2}m.v_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2.g.h_{12}} \quad F_{c2} = m\frac{v_2^2}{R} = 2\frac{6'17^2}{2'45} = 31'08\ N$$

$$v_2 = \sqrt{4'9^2 + 2.9'8.0'717} = 6'17\ m/s$$

La fuerza centrípeta es la suma de la tensión y la componente normal del peso (medimos ángulos respecto al radio):

$T_2 + mg.\cos\varphi = F_{c2}$ => $T_2 + 2.9'8.\cos 45 = 31'08$ => $T_2 = 17'22$ N

Punto 3: $h_{13} = 2'45$ m, $v_3 = 8'487$ m/s, $F_{c3} = 58'8$ N

$T_3 + mg.\cos\varphi = F_{c3}$ => $T_2 + 2.9'8.\cos 90 = 58'8$ => $T_2 = 58'8$ N

Punto 4: $h_{14} = 4'18$ m, $v_4 = 10'294$ m/s, $F_{c4} = 86'51$ N

$T_4 + mg.\cos\varphi = F_{c4}$ => $T_4 + 2.9'8.\cos 135 = 86'51$ => $T_4 = 100'37$ N

Punto 5: $h_{15} = 4'9$ m, $v_5 = 10'956$ m/s, $F_{c5} = 98$ N

$T_5 + mg.\cos\varphi = F_{c5}$ => $T_5 + 2.9'8.\cos 180 = 98$ => $T_5 = 117'6$ N

Punto 1: $T_1 + mg = F_{c1}$ => $T_1 + 19'6 = 19'6$ => $T_1 = 0$ N (condición que impusimos al principio para calcular v_1)

¿Podemos encontrar una fórmula para realizar los cálculos para cualquier ángulo?

Midiendo los ángulos respecto a OX (ver dibujo):

$$h = R(1 - \text{sen}\varphi)$$

$$v = \sqrt{gR + 2gh}$$

$$F_c = mg(3 - 2.\text{sen}\varphi)$$

$$P_c = mg.\text{sen}\varphi$$

$$T = F_c - P_c = 3mg(1 - \text{sen}\varphi)$$

La solución es: $T = 3.m.g.(1 - \text{sen}\ \varphi)$

Para el punto (2): $T = 3.2.9'8.(1 - \text{sen}\ 135) = 17'22$ N

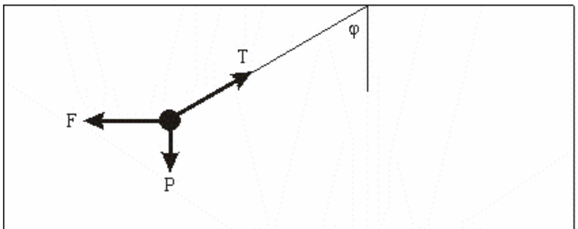
Para un punto situado en 30º: $T = 3.2.9'8.(1 - \text{sen}\ 30) = 29'4$ N

PROBLEMA 3. RELATIVIDAD DEL OBSERVADOR

Una masa de 10 kg cuelga del techo de un vagón suspendida de una cuerda que forma un ángulo 60º con la vertical. Dentro del vagón se encuentra un observador O' y fuera, en reposo sobre la superficie terrestre, un observador O.

a) Dibuja el diagrama de fuerzas que corresponde a cada observador.

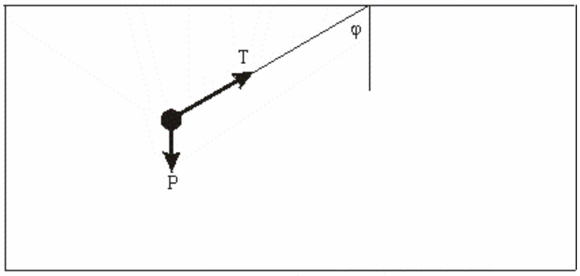
b) Calcula la aceleración con que se mueve el vagón, y la tensión de la cuerda.



Obsevador O' (dentro del vagón)

a) El observador O' ve al objeto en reposo respecto a él, por lo que piensa que no tiene aceleración y en consecuencia la suma de las fuerza que actúan sobre éste se anulan, por lo que se imagina una fuerza, F (llamada fuerza de inercia), que compensa a la tensión y al peso de forma que:

$$\mathbf{T} + \mathbf{P} + \mathbf{F} = 0.$$



Observador O (fuera del vagón)

El observador O, que está fuera del vagón ve la realidad y es que el objeto se mueve hacia la derecha con una aceleración, **a**, que es la misma con la que se mueve el vagón a la que el objeto está unido. Sólo ve lo que hay, el **P** y la **T**. Sabe que esta aceleración es causada la componente horizontal de la tensión de la cuerda.

b) El cuerpo ni baja ni sube, por lo que la fuerza hacia abajo (**P**) se compensa con la fuerza hacia arriba ($\mathbf{T_y}$):

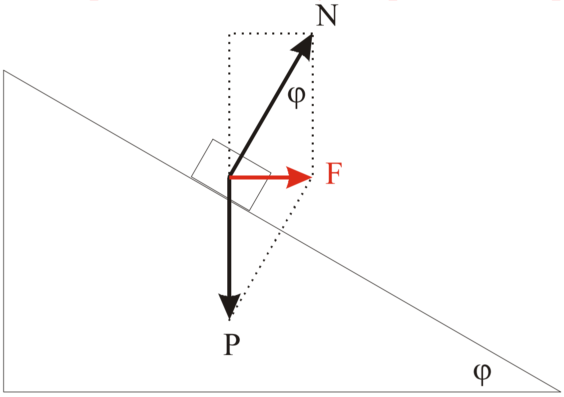
$$T_y = P \to T.\cos\varphi = mg \to T = \frac{mg}{\cos\varphi} = \frac{10.9'8}{\cos 60} = 196\ \text{N}$$

El objeto tiene una aceleración horizontal (**a**), causada por una fuerza horizontal que es ($\mathbf{T_x}$):

$$a = \frac{F}{m} = \frac{T_x}{m} = \frac{T.\text{sen}\,\varphi}{m} = \frac{196.\text{sen}\,60}{10} = 16'97\ \text{N}$$

PROBLEMA 4. POCOS DATOS, MUCHO RAZONAMIENTO

Sobre un plano inclinado 30º se tiene un cuerpo. Calcular la aceleración que hay que dar al plano inclinado, y en qué sentido, para que el cuerpo no descienda.



Las únicas fuerzas que actúan sobre el cuerpo son su peso, **P**, y la normal del plano, **N**.
La resultante de éstas es **F**, que debe ser horizontal para que el cuerpo adquiera una aceleración horizontal hacia la derecha y no descienda (ni ascienda) por el plano.
Al plano debemos imprimirle la misma aceleración (módulo, dirección y sentido) para que se mueva solidariamente con el cuerpo.

Si descomponemos **N**, la componente N_y debe ser igual y opuesta al peso, **P,** para que se anulen entre sí, y la componente N_x será la fuerza, **F,** que actúa sobre el cuerpo y le produce la aceleración horizontal, **a**, que es la que buscamos.

$$\text{tg}\ \varphi = \frac{N_x}{N_y} = \frac{F}{P} \quad \rightarrow \quad F = \text{mg.tg}\ \varphi$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{\text{mg.tg}\ \varphi}{m} = \text{g.tg}\ \varphi = 9'8.\text{tg}\ 30 = 5'658\ \text{m/s}^2$$

PROBLEMA 5. UNO DE ROZAMIENTO

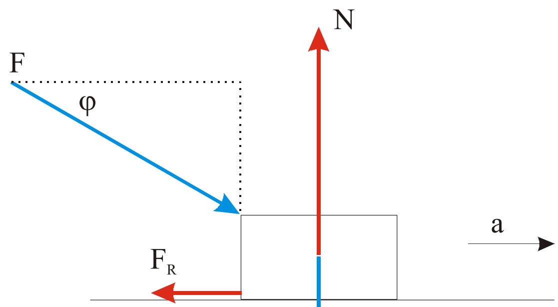
Sobre un sólido en reposo de masa 5 kg se aplica una fuerza, F, de 100 N formando un ángulo de 30º con la horizontal, sabiendo que el coeficiente de rozamiento dinámico es μ = 0'2.

a) Calcule la velocidad que habrá adquirido cuando se haya recorrido 10 m bajo la acción de esta fuerza.

b) Si en un momento determinado cesa la fuerza, ¿Qué recorrido realizará el cuerpo hasta pararse de nuevo.

Las fuerzas reales aplicadas al sólido son: la fuerza **F**, el peso **P**, la fuerza de rozamiento $\mathbf{F_R}$ y la normal **N**.

La componente vertical de la resultante se debe anular (el cuerpo se mueve por el plano horizontal)



$$\vec{N} + \vec{F}_y + \vec{P} = 0 \ \rightarrow \ \text{fuerzas hacia arriba igual a fuerzas hacia abajo}$$

$$N = F_y + P = F.\text{sen}\varphi + m.g = 100.\text{sen}30 + 5.9'8 = 99N$$

La componente horizontal de la resultante provoca una aceleración **a**, hacia la derecha. Recordando que las fuerzas que vayan a favor del movimiento se ponen positivas y las que se oponen al movimiento se ponen negativas:

$$a = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{F_x - F_R}{m} = \frac{F.\cos\varphi - \mu.N}{m} = \frac{100.\cos 30 - 0'2.99}{5} = 13'36\ m/s^2$$

Con la aceleración ya podemos calcular la velocidad: $v = \sqrt{2.a.e} = \sqrt{2.13'36.10} = 16'34\ m$

b) Si cesa la fuerza F, las fuerzas reales aplicadas al sólido son: el peso **P**, la fuerza de rozamiento $\mathbf{F_R}$ y la normal **N**.
La componente vertical de la resultante se debe anular:

$$\vec{N} + \vec{P} = 0 \quad \rightarrow \quad N = P = m.g = 5.9'8 = 49\ N$$

La fuerza de rozamiento (que siempre es negativa) es ahora la única fuerza horizontal:

$$F_R = \mu.N = 0'2.49 = 9'8\ N$$

$$a = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{F_R}{m} = \frac{-9'8}{5} = -1'96\ m/s^2$$

El espacio que recorre hasta detenerse es:

$$v^2 = v_o^2 + 2.a.e \quad \rightarrow \quad e = \frac{v^2 - v_o^2}{2.a} = \frac{0 - 16'34^2}{2.(-1'96)} = 68'16\ m$$

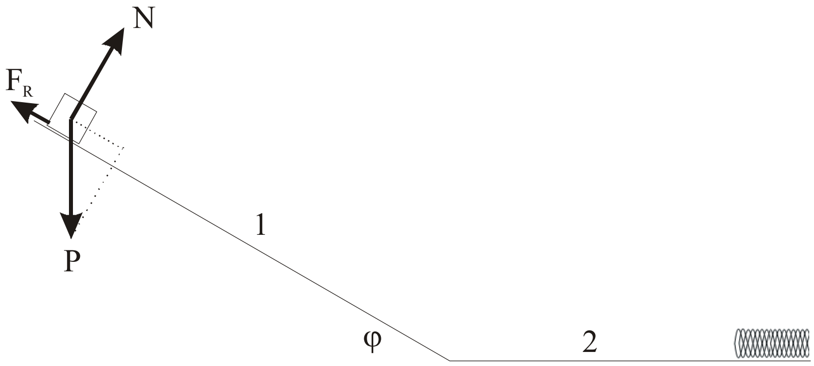
PROBLEMA 6. RESOLVER POR BALANCES DE ENERGÍA

Colocamos un cuerpo de 4 kg sobre un plano inclinado 25º que tiene 12 m de longitud, después de descender por éste recorre 5 m por un plano horizontal hasta que se encuentra con un muelle cuya constante elástica es 1000 N/m al que comprime.

a) Calcular cuánto se comprime el muelle si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y los planos es 0'22.

b) Si vuelve a ser despedido por el muelle ¿qué distancia recorrerá por el plano inclinado hasta detenerse?

c) Repetir el problema suponiendo que por el plano horizontal recorre 8 metros antes de encontrarse con el muelle.



a) Balance de energía: La energía final es igual a la energía inicial menos la que pierde por el camino.
La energía potencial elástica es igual a la energía potencial gravitatoria inicial menos el trabajo de rozamiento.

$$F_{R1} = \mu.mg.\cos\varphi = 0'22.4.9'8.\cos 25 = 7'81\ N; \quad F_{R2} = \mu.mg = 8'62\ N$$

Balance de energía:

$$E_{pg} - W_{R1} - W_{R2} = E_{pe}$$

$$m.g.h - F_{R1}.e_1 - F_{R2}.(e_2 + x) = \frac{1}{2}k.x^2$$

$$4.9'8.(12.sen25) - 7'81.12 - 8'62.(5 + x) = \frac{1}{2}.1000.x^2 \quad \rightarrow \quad x = 0'34 \text{ m}$$

Si no estamos atentos nos comemos la x en el W_{R2} y ponemos $F_{R2}.5$ en vez de $F_{R2}.(5+x)$

b) Balance de energía: La energía potencial elástica menos el trabajo de rozamiento es igual a la energía potencial gravitatoria.

$$E_{pe} - W_{R2} - W_{R1} = E_{pg}$$

$$\frac{1}{2}k.x^2 - F_{R2}.(e_2 + x) - F_{R1}.e_1 = m.g.h$$

$$\frac{1}{2}.1000.0'34^2 - 8'62.5'34 - 7'81.e_1 = 4.9'8.(e_1.sen25) \quad \rightarrow \quad e_1 = 0'52 \text{ m}$$

c) Si recorre 8 m por el plano horizontal antes de encontrarse con el muelle, repetimos las operaciones del apartado a y obtenemos que comprimirá al muelle: x = 0’26 m

Si repetimos las operaciones del apartado b nos sale e_1 negativo, lo que nos indica que al ser lanzado por el muelle el cuerpo se detiene antes de alcanzar al plano inclinado.

¿Cuánto recorre por el plano horizontal, al despegarse del muelle, hasta detenerse?

$$E_{pe} - W_{R2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}k.x^2 - F_{R2}.(e_2 + x) = 0$$

$$\frac{1}{2}.1000.0'26^2 - 8'62.(e_2 + 0'26) = 0 \quad \rightarrow \quad e_2 = 3'65 \text{ m}$$

PROBLEMA 7. CAMPO GRAVITATORIO

Tenemos tres masas puntuales m_1=300 kg, m_2=200 kg y m_3=100 kg, situadas en los puntos: $P_1(20,0)$, $P_2(0,80)$ y $P_3(-20,0)$ expresados en metros. Calcular el campo gravitatorio, g, creado por éstas en el punto $P_0(0,40)$.

El campo creado por una serie de masas puntuales en un punto es igual a la suma de los campos creados por cada una de ellas en dicho punto.

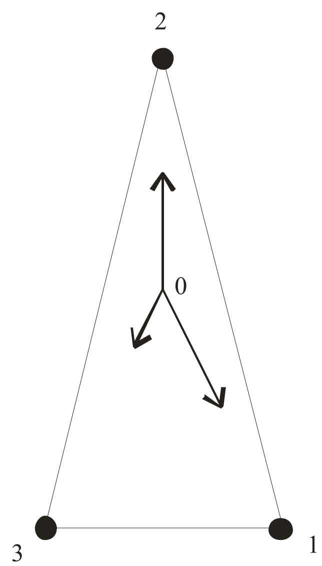
$$\mathbf{g} = \Sigma \mathbf{g}_i$$

Campo creado por m_1:

$$\text{Módulo: } g_1 = \frac{G.m_1}{r_1^2} = \frac{6'67.10^{-11}.300}{44'72^2} = 1'005.10^{-11} \ ^{N}\!/_{kg}$$

$$\text{Ángulo: } \varphi_1 = \text{arctg}\frac{-40}{20} = -63'43^{\circ}$$

$\mathbf{g}_1 = 1'005.10^{-11}(-63'43^{\circ}) = (4'47.10^{-12}, -8'94.10^{-12})$ N/kg



Campo creado por m_2:

$$g_2 = \frac{G.m_2}{r_2^2} = \frac{6'67.10^{-11}.200}{40^2} = 8'33.10^{-12}\ {}^{N}\!/_{kg}$$

$$\varphi_2 = \text{arctg}\frac{40}{0} = 90^o$$

$\mathbf{g}_2 = 8’33.10^{-12}(90^o) = (0, 8’33.10^{-12})$ N/kg

Campo creado por m_3:

$$g_3 = \frac{G.m_3}{r_3^2} = \frac{6'67.10^{-11}.100}{44'72^2} = 3'33.10^{-12}\ {}^{N}\!/_{kg}$$

$$\varphi_3 = \text{arctg}\frac{-40}{-20} = -116'56^o$$

$\mathbf{g}_3 = 3’33.10^{-12}(-116’56^o) = (-1’49.10^{-12}, -2’98.10^{-12})$ N/kg

El campo total es igual a la suma de los tres campos calculados:

$\mathbf{g} = (2’98.10^{-12}, -3’59.10^{-12}) = 4’67.10^{-12}(-50’3^o)$ N/kg

Si en el punto P_0 colocamos una masa de 1000 kg ¿cuál sería la fuerza inicial a la que estaría sometida? (no se considera el campo gravitatorio terrestre).

$\mathbf{F} = m.\mathbf{g} = 1000.4’67.10^{-12} = 4’67.10^{-9}$ N, en la dirección $-50’3^o$