

Fuerzas y equilibrio

La estática determina las condiciones bajo las cuales un cuerpo actuado por diversas fuerzas permanece en equilibrio, es decir en reposo. El desarrollo de la estática viene desde mucho tiempo atrás, mucho antes del desarrollo de la dinámica. Algunos de sus principios fueron formulados por los egipcios y los babilónicos en problemas relacionados con la construcción de las pirámides y de templos. Entre los más antiguos escritos sobre este tema se puede mencionar a Arquímedes quién formuló los principios del equilibrio de fuerzas actuando en palancas y algunos principios de la hidrostática. Por estas razones no creemos conveniente considerar a la estática como un caso particular de la dinámica.

La principal razón para que desarrollo de la dinámica fuera posterior, está directamente relacionada con el desarrollo de los métodos para medir el tiempo, es decir del desarrollo de los relojes.

Generalmente ocurre algo similar. Un avance en una teoría permite la construcción de nuevos aparatos de medición que a su vez ayudan a per-

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a background of a light blue triangle pointing upwards and an orange triangle pointing downwards, both overlapping the text.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

4.1. Condiciones de equilibrio. Leyes de la estática

4.1.1. Equilibrio de una partícula

La condición necesaria y suficiente para que una partícula permanezca en equilibrio (en reposo) es que la resultante de las fuerzas que actúan sobre ella sea cero

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = \vec{0}. \quad (4.1)$$

Naturalmente con esta condición la partícula podría también moverse con velocidad constante, pero si está inicialmente en reposo la anterior es una condición necesaria y suficiente.

4.1.2. De un sistema de partículas

Para que un sistema de partículas permanezca en equilibrio, cada una de sus partículas debe permanecer en equilibrio. Ahora las fuerzas que actúan sobre cada partícula son, en parte de interacción \vec{f}_{ij} con las otras partículas del sistema y en parte proveniente del exterior \vec{F}_i^{ext} , es decir

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}. \quad (4.2)$$

Aquí \vec{f}_{ij} representa la fuerza que la partícula j ejerce sobre la partícula i . Pero las fuerzas de interacción satisfacen la tercera ley de Newton, ley llamada de acción y reacción que dice

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}, \quad (4.3)$$

además que \vec{f}_{ij} es paralela a la línea que une las partículas i con j

$$\vec{f}_{ij} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \vec{0}. \quad (4.4)$$

De este modo un sistema de partículas está en equilibrio si

$$\vec{F}_i^{ext} + \sum \vec{f}_{ij} = \vec{0} \text{ para todo } i$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

4.1.3. Cuerpo rígido

En el desarrollo de la estática consideraremos situaciones de equilibrio de cuerpos rígidos, es decir que no se deforman. En rigor no existen cuerpos indeformables, de manera que la aplicación de las leyes de la estática es una aproximación que es buena si las deformaciones son despreciables frente a otras dimensiones del problema. El tema de la estática de cuerpos deformable es el tema de otros cursos.

Si el cuerpo rígido permanece en equilibrio con el sistema de fuerzas exteriores aplicado, entonces para que todas las partículas estén en equilibrio es suficiente que tres de sus partículas no colineales estén en equilibrio. Las demás no pueden moverse por tratarse de un cuerpo rígido. Las condiciones bajo las cuales un cuerpo rígido permanece en equilibrio son que la fuerza externa resultante y el torque externo resultante respecto a un origen arbitrario son nulos, es decir

$$\vec{F}^{ext} = \sum \vec{F}_i^{ext} = \vec{0}, \quad (4.5)$$

$$\vec{\Gamma}_O^{ext} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} = \vec{0}, \quad (4.6)$$

siendo O un punto arbitrario. De acuerdo a

$$\vec{\Gamma}_A = \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \vec{F}_i = \vec{\Gamma}_O - \vec{r}_A \times \vec{F}, \quad (4.7)$$

se constata que entonces el torque resultante es cero respecto a cualquier punto.

4.1.4. La fuerza de roce estática

Cuando los cuerpos están en equilibrio, la fuerza de roce se denomina fuerza de roce estática f_s . En la figura siguiente se ilustra lo que acontece cuando un cuerpo permanece en equilibrio bajo el sistema de fuerzas indicado



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

entonces

$$\begin{aligned} T - f_S &= 0, \\ N - mg &= 0, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} f_S &= T, \\ N &= mg. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Es decir, la fuerza de roce permanece igual a la fuerza aplicada de tensión. Pero eso tiene un límite, La fuerza de roce estática puede aumentar hasta un límite, el cual depende de la naturaleza de las superficies en contacto a través de un coeficiente μ_S llamado coeficiente de roce estático, y del grado en que las superficies estén apretadas entre sí, esto es ese valor máximo es proporcional a la componente normal de la fuerza N . En este modelo entonces

$$f_S^{\text{máx}} = \mu_S N, \tag{4.9}$$

siendo entonces

$$f_S \leq \mu_S N. \tag{4.10}$$

Si la fuerza aplicada T iguala a ese valor máximo se dice que el cuerpo está en equilibrio límite o bien a punto de resbalar. Para fuerzas aplicadas mayores el cuerpo se pondrá en movimiento acelerado, tema que será estudiado en el capítulo de dinámica.

4.1.5. Fuerzas causadas por ciertos soportes

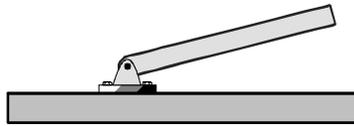
Es conveniente analizar en forma más o menos sistemática las fuerzas que causadas por ciertos tipos de soportes, cuerdas, resortes, empotradas, articulaciones y otros, donde en las figuras que siguen se ilustran las componentes de fuerzas y pares que ellos causan.



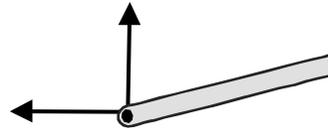
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

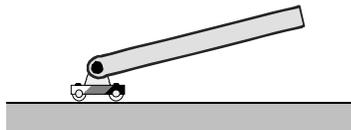
Cartagena99



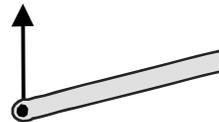
soporte de pasador



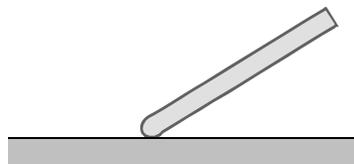
dos componentes de fuerzas



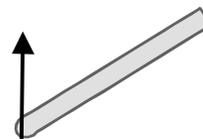
soporte de rodillo



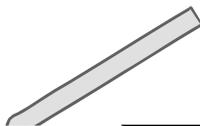
una componente de fuerza



contacto con superficie lisa



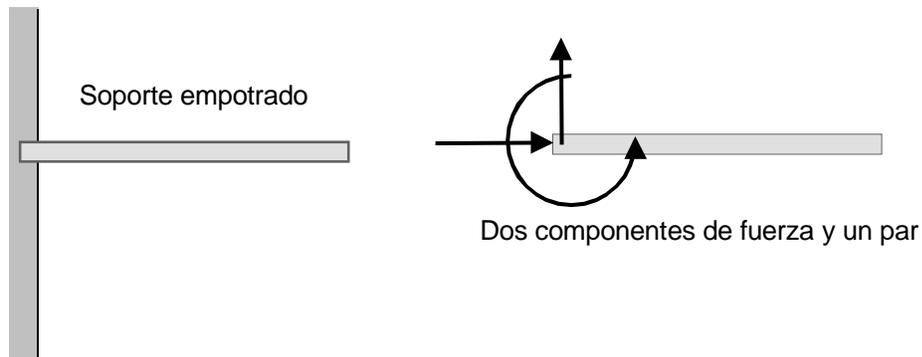
Una fuerza normal



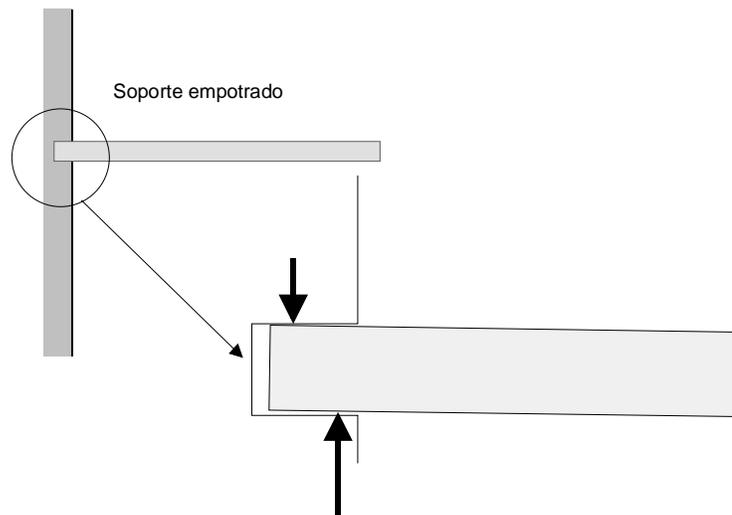
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



El origen del par se puede explicar de acuerdo a la figura que sigue donde en general se puede pensar que las reacciones verticales en la empotradura son dos, de diferente magnitud y, lo que es más importante, no están sobre la misma línea. Para sumarlas, es necesario trasladar una a la línea de acción de la otra y eso causa el denominado par de la fuerza.

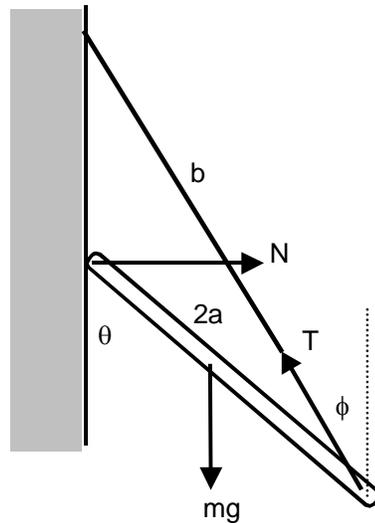


4.2. Ejemplos

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



Solución. Tenemos

$$\begin{aligned} N - T \sin \phi &= 0, \\ T \cos \phi - mg &= 0, \\ mga \sin \theta - T2a \sin(\theta - \phi) &= 0, \end{aligned}$$

además de una relación geométrica

$$\sin \phi = \frac{2a}{b} \sin \theta.$$

De la segunda y la tercera

$$\sin \theta - 2 \frac{\sin(\theta - \phi)}{\cos \phi} = 0,$$

$$-\sin \theta \cos \phi + 2 \cos \theta \sin \phi = 0,$$

$$\sin \theta \cos \phi = 2 \cos \theta \frac{2a}{b} \sin \theta$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

eliminando ϕ

$$1 = \frac{4a^2}{b^2} \sin^2 \theta + \frac{16a^2}{b^2} \cos^2 \theta,$$

$$1 - \frac{4a^2}{b^2} = \frac{12a^2}{b^2} \cos^2 \theta,$$

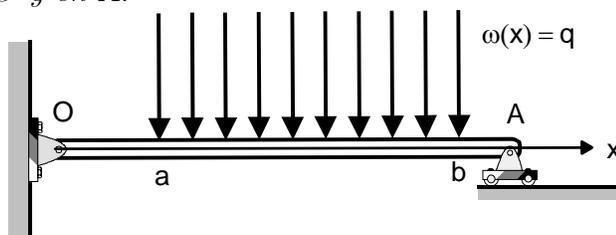
$$\cos \theta = \sqrt{\frac{b^2 - 4a^2}{12a^2}},$$

esta solución existe si $b > 2a$ y

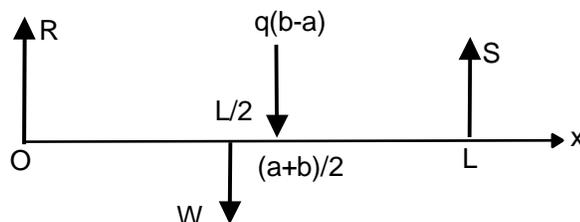
$$b^2 - 4a^2 < 12a^2,$$

$$b < 4a.$$

EJEMPLO 4.2.2 La barra de la figura de longitud L está articulada en O , apoyada en A , tiene un peso total W y está cargada por una fuerza distribuida uniforme de magnitud $w(x) = q \text{ N m}^{-1}$ desde a hasta b . Determine las reacciones en O y en A .



Solución. El sistema equivalente de fuerzas es como en la figura siguiente



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

y momentando respecto a O

$$\sum \Gamma_O = SL - W\frac{L}{2} - q(b-a)\frac{a+b}{2} = 0,$$

de donde despejamos

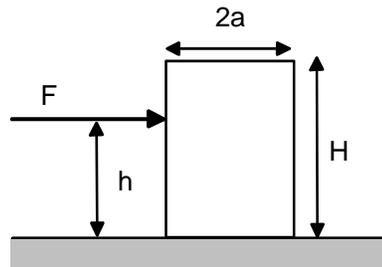
$$S = \frac{W}{2} + q(b-a)\frac{a+b}{2L},$$

y de la primera

$$\begin{aligned} R &= W + q(b-a) - \left(\frac{W}{2} + q(b-a)\frac{a+b}{2L}\right), \\ &= \frac{W}{2} + q(b-a)\left(1 - \frac{a+b}{2L}\right). \end{aligned}$$

4.3. Ejercicios

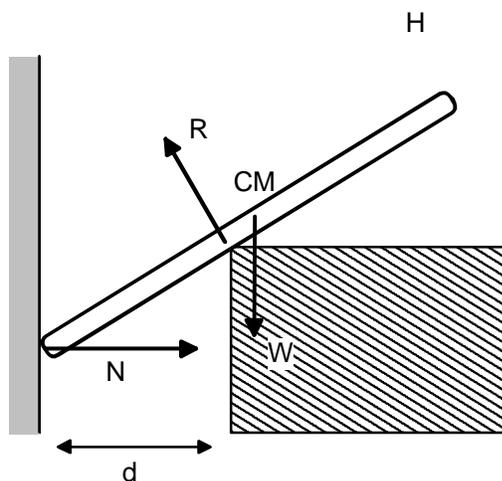
EJERCICIO 4.1 *Un cuerpo homogéneo de masa M altura H y base de largo $2a$, es empujado por una fuerza horizontal F aplicada en un costado a la altura h del suelo. Si el coeficiente de roce estático entre el suelo y el cuerpo es μ_S , determine la condición para que al romperse el equilibrio debido al aumento de F el cuerpo deslice o vuelque.*



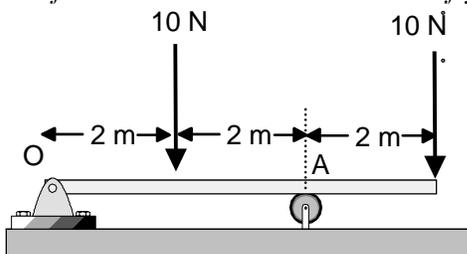
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



EJERCICIO 4.3 Una barra de largo $L = 6\text{ m}$ y de peso $W = 20\text{ N}$ está articulada en su extremo izquierdo a un punto fijo O , apoyada en un soporte liso en A y cargada por dos fuerzas como se indica en la figura



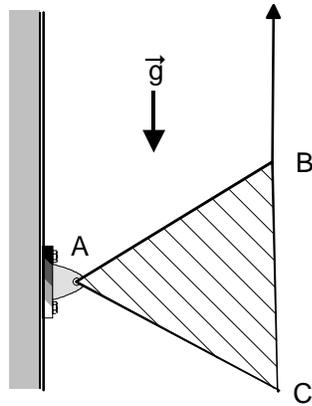
- Determine la reacción vertical en la articulación.
- Determine la reacción vertical en el soporte.

EJERCICIO 4.4 Una lámina de peso W en forma de triángulo equilátero de

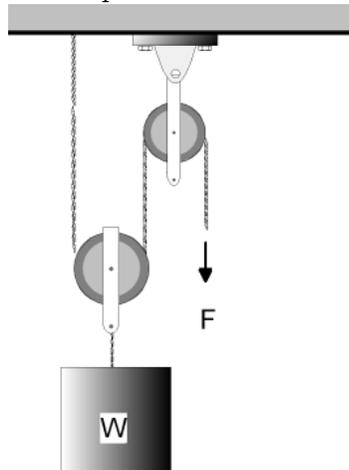
**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99



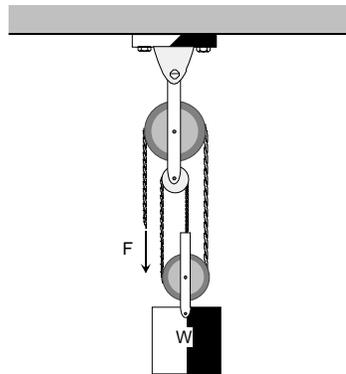
EJERCICIO 4.5 Considere el sistema de la figura sin roce, determine la fuerza F necesaria para sostener el peso W .



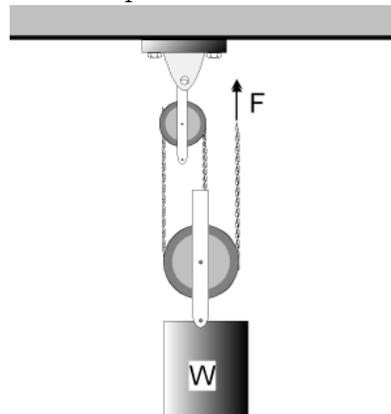
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



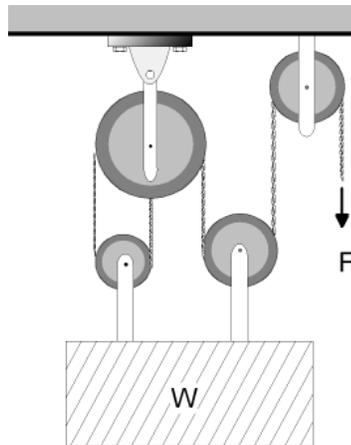
EJERCICIO 4.7 Para el sistema de la figura, no hay roce. Determine la fuerza F necesaria para sostener el peso W .



Cartagena99

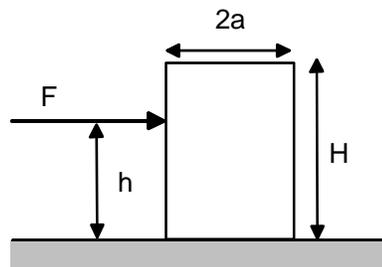
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



EJERCICIO 4.9 *Tres esferas iguales de radio R están sobre un plano horizontal suave, en contacto entre ellas de modo que sus centros forman un triángulo equilátero de arista $2R$. A la altura de un radio, el conjunto se abraza por una cuerda inextensible que las sostiene. Una cuarta esfera se coloca sobre el centro del conjunto. Determine la tensión que se desarrolla en la cuerda.*

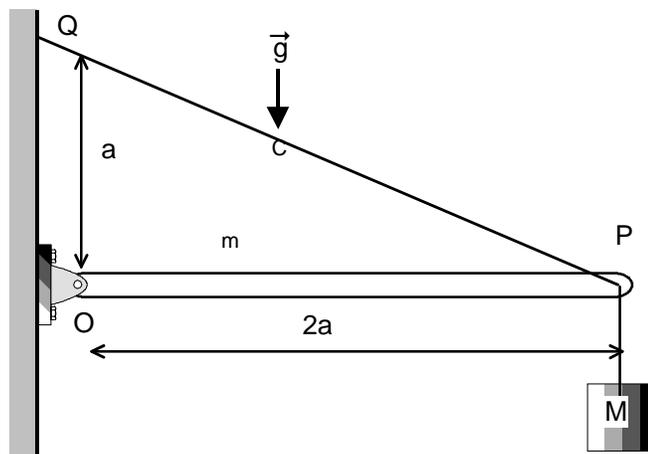
EJERCICIO 4.10 *El bloque de la figura tiene masa M y el coeficiente de roce estático con el suelo es $\mu_s = 0,5$, las longitudes indicadas son $2a = 1\text{ m}$, $H = 2\text{ m}$, $h = 1,5\text{ m}$. Determine qué sucede al aumentar la fuerza aplicada F .*



Cartagena99

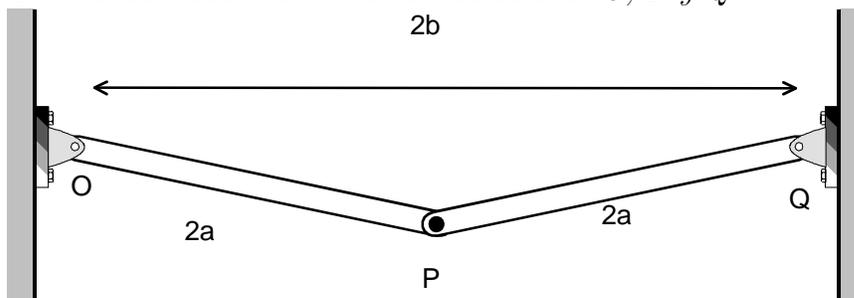
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Determine la tensión en la cuerda QP y la reacción en O .

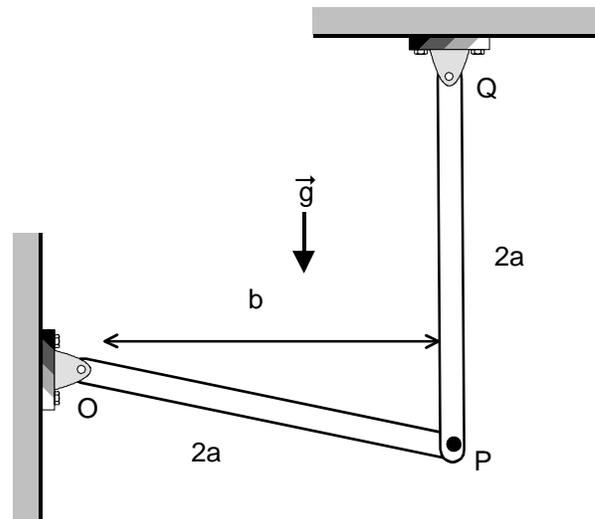
EJERCICIO 4.12 Dos barras de masa M y largo $2a$ están articuladas en puntos fijos O y Q separados una distancia $2b$ a la vez que están articuladas en P . Determine las reacciones en las articulaciones O , P y Q .



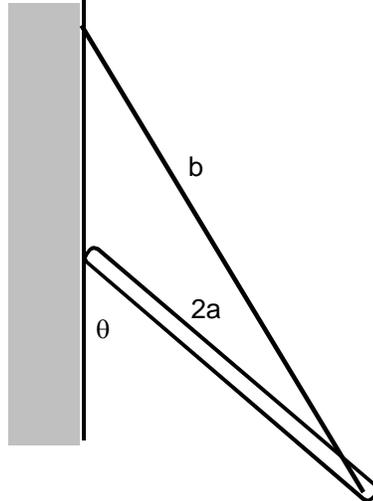
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



EJERCICIO 4.14 *La barra de la figura de masa M y largo $2a$ está en equilibrio apoyada sobre una pared vertical lisa y sostenida por un extremo mediante un hilo de largo b . Determine los posibles ángulos θ de equilibrio.*

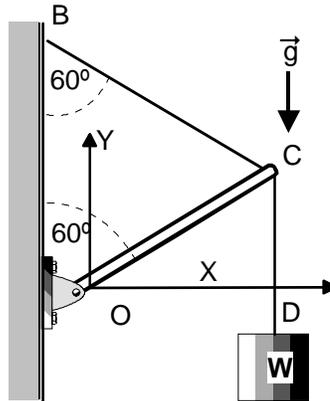


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

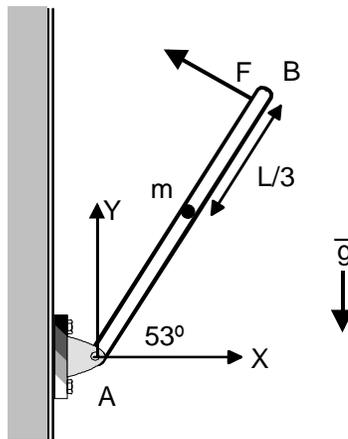
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

tensión en la cuerda BC. (c) La reacción \vec{R} en el extremo O de la barra. (R: (a) 60 N, (b) 120 N, (c) (103,9; 120) N)



EJERCICIO 4.16 La figura muestra una barra delgada y homogénea AB de largo $L = 2\text{ m}$ y de masa $M = 12\text{ kg}$, la cual se encuentra pivotada (articulada) en el extremo A. Sobre la barra en el punto C, se encuentra adherida una partícula de masa $m = 1\text{ kg}$. La barra se encuentra en equilibrio estático cuando se le aplica una fuerza de magnitud F en el extremo B perpendicular a la barra. Determine (a) La magnitud de la fuerza aplicada. (b) La reacción que ejerce la articulación sobre la barra. (c) La reacción que ejerce la barra sobre la articulación.

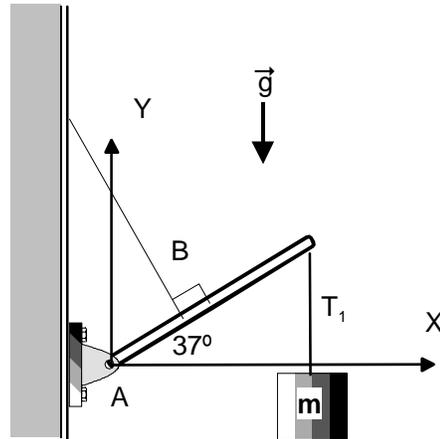


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

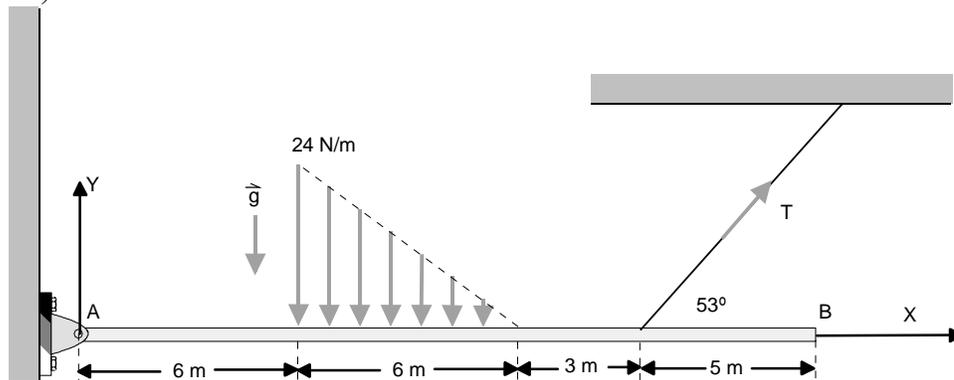
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

determine (a) La tensión T . (b) La tensión T_1 . (c) La reacción en el pivote A.



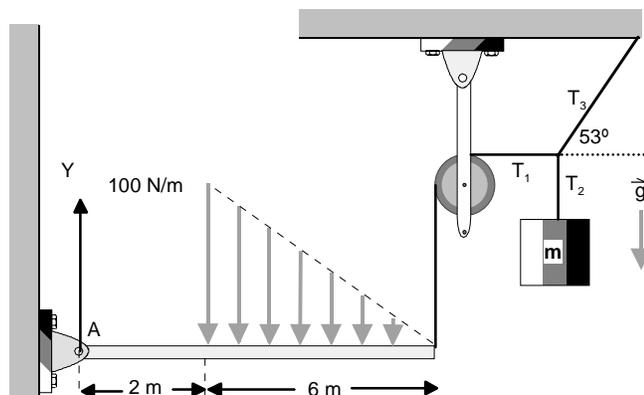
EJERCICIO 4.18 Una viga de masa $m = 6 \text{ kg}$ y largo $L = 20 \text{ m}$ está sometida a una carga distribuida y a una tensión como se indica en la figura. La distribución de carga es lineal con un máximo de 24 N m^{-1} . Determine (a) La reacción en A. (b) La tensión en la cuerda. (R: (a) $(-58,8; 53,6) \text{ N}$. (b) 98 N .)



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

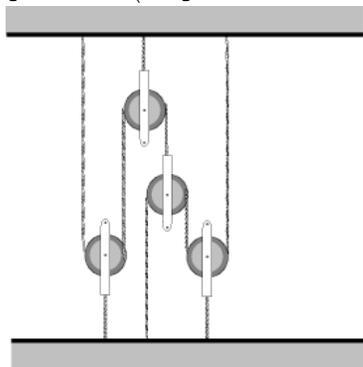
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



EJERCICIO 4.20 La placa de la figura pesa 90 N y está sostenida por el sistema de cables y poleas ideales. (sin masa y sin roce). Si la placa está en equilibrio en forma horizontal, determine

- La tensión en el cable que pasa por la polea A.
- La tensión en el cable que pasa por la polea B.

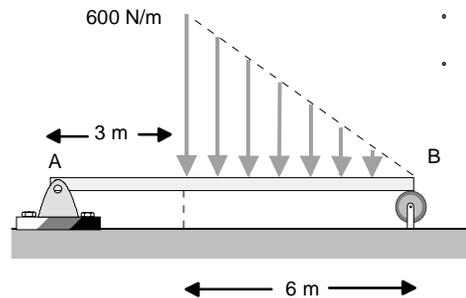
EJERCICIO 4.21 Las cinco cuerdas del sistema de la figura pueden soportar una tensión máxima de 1500 N sin cortarse. Determine el peso máximo de la placa que puede ser soportada. (respuesta $W = 2625$ N)



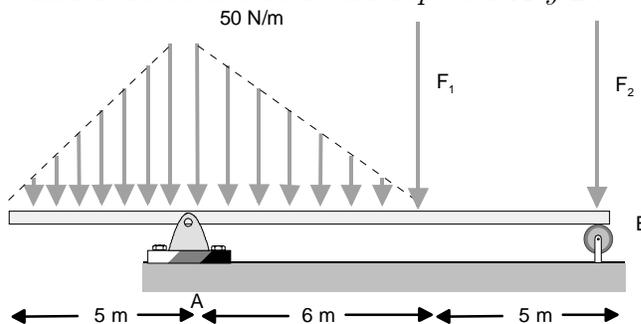
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



EJERCICIO 4.23 La placa de la figura de longitud 16 m y de masa 2 kg está soportando dos fuerzas distribuidas en forma lineal con máximos de 50 N m^{-1} además de dos fuerzas hacia abajo de magnitudes $F_1 = 600 \text{ N}$ y $F_2 = 400 \text{ N}$. Determine las reacciones verticales en los soportes A y B.

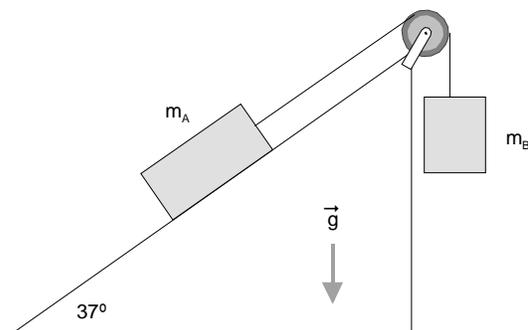


EJERCICIO 4.24 La figura muestra un plano inclinado rugoso que forma un ángulo de 37° con la horizontal y dos bloques A y B en reposo, unidos por una cuerda inextensible y de masa despreciable. Si la masa del cuerpo A es $m_A = 3 \text{ kg}$ y el coeficiente de roce estático es $\mu_S = 0,2$, determine

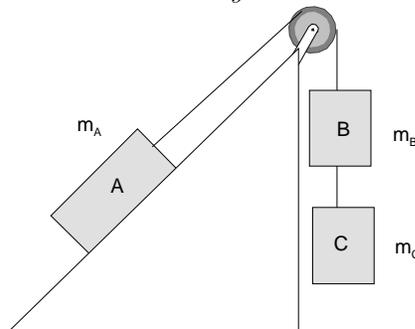
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



EJERCICIO 4.25 Tres cuerpos de masa $m_A = 3\text{ kg}$, $m_B = 2\text{ kg}$ y $m_C = 1\text{ kg}$ se encuentran en reposo como muestra la figura, de tal forma que cualquier pequeña perturbación haría que el cuerpo A subiera por el plano. Las cuerdas que unen los cuerpos son inextensibles y de masa despreciable. Se pide



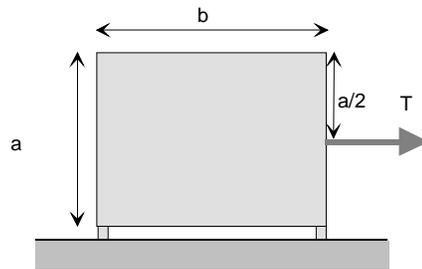
- El diagrama de fuerzas que actúan sobre m_A .
- El coeficiente de roce estático entre m_A y la superficie.
- Las tensiones en las cuerdas.

EJERCICIO 4.26 Un objeto homogéneo en forma de paralelepípedo de altura a y de ancho b está en reposo soportado por dos patitas de masa despreciable

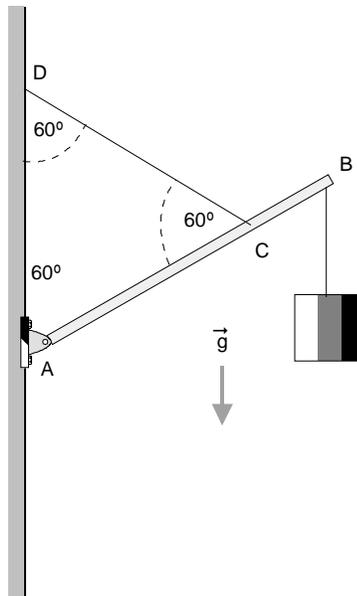
**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99



EJERCICIO 4.27 *Se tiene un sistema formado por una barra uniforme de 6 m de longitud, de masa 100 kg articulada en el punto A a un mástil vertical. En el extremo B de la barra cuelga un cuerpo de masa 400 kg. La barra está sostenida por un cable inextensible atado a los puntos C sobre la barra a distancia 1,5 m del extremo B y D sobre el mástil, de tal modo que el triángulo ACD es equilátero. Determine*



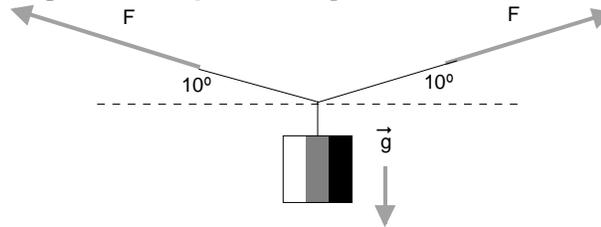
a) *La magnitud de la tensión del cable CD.*

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

EJERCICIO 4.28 *Se ata un cuerpo de 200 N de peso al punto medio de una cuerda y dos personas tiran de la misma manera de sus extremos de tal modo que el cuerpo queda suspendido como se indica en la figura. Determine la fuerza de tensión que deben ejercer las personas.*



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70