Áplicaciones lineales y endomorfismos

Aplicaciones lineales

Sean dos espacios vectoriales E = {**x**, **y**, **z** ...} (dim E = n) y E' = {**x'**, **y'**, **z'** ...} (dim E' = m) definidos sobre el mismo cuerpo conmutativo K. Se llama aplicación lineal a toda aplicación

$$E \to E'$$
$$(\mathbf{x}) \to \mathbf{x'} = f(\mathbf{x})$$

que verifica las propiedades:

$$\text{I. } f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$$
$$\text{II. } f(\lambda\, \mathbf{x}) = \lambda\, f(\mathbf{x})$$

Endormorfismo: Aplicación lineal de un espacio vectorial en sí mismo (E = E ')

Expresión matricial de la aplicación lineal:
Las columnas de la matriz de la aplicación lineal son las imágenes de los vectores de la base de E referidos a la base de E'.

$$f(\mathbf{x}) = A\,(\mathbf{x})$$

La matriz A tendrá dimensiones n x m.

Cambio de la matriz de la aplicación lineal al cambiar las bases
Tenemos inicialmente B_E y $B_{E'}$. La matriz es A_1.
Cambiamos de B_E a B'_E y de $B_{E'}$ a $B'_{E'}$ mediante matrices de paso P_1 y P_2, respectivamente. La nueva matriz será A_2.

$$A_2 = P_2^{-1}\, A_1\, P_1$$

En el caso de que se trate de un endomorfismo: $P_2 = P_1 = P \implies A_2 = P^{-1}\, A_1\, P$

Endomorfismos

Valores y vectores propios: $f(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$
donde λ es el valor propio (autovalor) y $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ el vector propio (autovector).

Cálculo de **valores propios**:

$$\det(A - \lambda\, I) = 0$$

Cálculo de **vectores propios**.

Para cada valor propio λ_i, resolvemos la ecuación matricial $(A - \lambda_i I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$
donde **x** y **0** son vectores columna.

A todo vector propio le corresponde un único valor propio.

Número de vectores propios (linealmente independientes) asociados al valor propio λ_i = dimensión de E - rango $(A - \lambda_i I)$

Diagonalización de endomorfismos.

Un endomorfismo es diagonalizable si existen tantos vectores propios como la dimensión del espacio vectorial en el que trabajamos (dimensión de la matriz del endomorfismo).

- Toda matriz simétrica (hermítica en general) siempre es diagonalizable.

- Si los valores propios son distintos entre sí, siempre es diagonalizable.

- Si hay valores propios repetidos, será diagonalizable cuando el número de vectores porpios asociados al valor propio repetido coincida con la multiplicidad de dicho valor propio.

La matriz diagonal D está formada por los valores propios en la diagonal principal (el resto de los elementos son nulos).
La base para la cual la matriz que caracteriza al endomorfismo es la diagonal está formada por los vectores propios.
La matriz de paso P que permite el paso de la base inicial (para la cual la matriz del endomorfismo en A) a la nueva base tiene por columnas a los vectores propios colocados en el mismo orden en que hemos colocado los valores propios en la matriz diagonal.

Relación entre las matrices: $D = P^{-1} A P$

Aplicación de la diagonalización al cálculo de la potencia enésima de una matriz.

$$A = P D P^{-1} \implies A^n = P D^n P^{-1}$$

pero el cálculo de D^n, es sencillo pues basta con elevar a la n los elementos de la diagonal principal.

Forma canónica de Jordan

En el caso de el endomorfismo no sea diagonalizable, es posible obtener una matriz que aunque no sea completamente diagonal, sí que tiene muchos elementos nulos. La forma canónica de Jordan va a ser una matriz triangular superior.