La Teoría de Conjuntos es una teoría matemática, que estudia básicamente a un cierto tipo de objetos llamados conjuntos y algunas veces, a otros objetos denominados no conjuntos, así como a los problemas relacionados con estos.

La importancia de la Teoría de Conjuntos radica en que a partir de ella se puede reconstruir toda la matemática, salvo la Teoría de Categorías.

Por ejemplo, con la Teoría de Conjuntos se pueden definir los siguientes conceptos y probar todas sus propiedades: par ordenado, relación, función, partición, orden, estructuras algebraicas, los naturales, los enteros, los racionales, los reales, y los complejos, entre otros.

Conceptos básicos de la Teoría de Conjuntos. Son dos los conceptos básicos de la Teoría de Conjuntos:

Conjunto: Colección de cualquier tipo de objetos considerada como un todo, una multiplicidad vista como unidad; entidad completa bien determinada. Los objetos que forman al conjunto son nombrados elementos del conjunto o miembros del conjunto.

Por colección entenderemos a una agrupación que está determinada por una propiedad enunciada por medio de un lenguaje preciso.

Todo conjunto es una colección de objetos, pero no toda colección de objetos es un conjunto.

Relación de Pertenencia: El ser elemento de es una relación binaria o de dos argumentos, entre dos objetos de la Teoría de Conjuntos. Esta relación va de un objeto a otro, donde el segundo objeto es necesariamente un conjunto y el primero puede ser o no un conjunto.

Para representar que un elemento "a" pertenece al conjunto "A" se aplica el símbolo de pertenencia $\in$. Se utiliza $a \in A$, que se lee: "a" pertenece a "A". y se conoce como relación de pertenencia, señala la relación entre elementos y conjuntos exclusivamente.

Si un elemento no pertenece a un conjunto se denota por $\notin$, por ejemplo si b no pertenece a **A** se expresara como $b \notin A$, que se lee: **b** no pertenece a **A**.

El conjunto Universo Local. En la Teoría de Conjuntos, se tiene como referencia, explícita o implícitamente, un universo local; es decir, un marco de referencia dentro del cual se trabaja.

Es el conjunto que contiene a todos los elementos del Universo. Se le denota por la letra U. El universo lo forman el conjunto de conjuntos que intervienen. Así, si se esta hablando de todos los números, el conjunto universal será los números complejos:

Ejemplos: Sean los conjuntos: A = { aves} B = { peces } C = { anfibios }

D = {tigres} . Existe otro conjunto que incluye a los conjuntos A, B, C y D y es conjunto de todos los animales U = { animales }

Sean los conjuntos: E = { mujeres } F = { hombres } . El conjunto que incluye a los conjuntos E y F es el universo, conformado por U = { seres humanos }

Teoría axiomática de conjuntos Los componentes de una teoría axiomática son:

1. El lenguaje o símbolos formales de la teoría.
2. Los axiomas, que son proposiciones acerca de los objetos de la teoría y que imponen el funcionamiento de dichos objetos.
3. Los teoremas, que son todas las proposiciones demostrables con herramientas lógicas a partir de los axiomas.

El concepto de conjunto, entonces, está referido a reunir o agrupar personas, animales, plantas o cosas, para estudiar o analizar las relaciones que se pueden dar con dichos grupos.

Formas de definir un conjunto: Extensión y Comprensión

Un conjunto queda perfectamente definido si se conocen con exactitud los elementos que lo integran o que pertenecen a él; es decir, si se nombran todos sus elementos o bien si se usa un enunciado o propiedad que lo identifique. Independientemente de la forma en que se lo represente, siempre se usa una letra mayúscula que lo define. Esta letra mayúscula representa a un conjunto específico de elementos. Y siempre entre llaves.

a) Por extensión o enumeración: se define nombrando a cada elemento del conjunto.

b) Por comprensión: se define mediante un enunciado o atributo que representa al conjunto (se busca una frase que represente a la totalidad de elementos sin nombrar a ninguno en particular).

A={**x** / propiedad característica}

Por comprensión	Por extensión
A = {Números dígitos}	A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
B = {Números pares]	B = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...}
C = {Múltiplos de 5}	C = {5, 10, 15, 20, 25, 30, 35...}

Conjunto FINITO - CONJUNTO INFINITO:

Llamaremos conjunto finito a aquel que tiene un número determinado de elementos.

Llamaremos conjunto infinito a aquel que tiene un número infinito de elementos.

CARDINAL DE UN CONJUNTO:

El cardinal de un conjunto es el número de elementos que tiene un conjunto: **#(A)**.

Diagrama DE VENN-EULER El matemático y lógico británico, John Venn (1834 – 1923) es especialmente conocido por su método de representación gráfica de proposiciones (según su cualidad y cantidad) y silogismos. Los diagramas de Venn permiten, además, una comprobación de verdad o falsedad de un silogismo. Entre sus obras destaca Lógica Simbólica y los principios de la lógica empírica o inductiva. Sin embargo, también fue importante la participación de Euler en la esquematización de las representaciones de algunas operaciones.

Cada conjunto de elementos se encuentra encerrado dentro de un circulo, o figura geométrica, y estos a su vez están encerrados dentro de otra figura, por lo general está es un rectángulo, se pueden dibujar cada elemento del conjunto o bien solo se puede indicar su existencia. Los diagramas de Venn son una buena herramienta, que nos permite realizar las operaciones entre los diversos conjuntos del universo de un forma más sencilla.

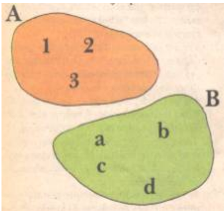
Tipos de Conjuntos

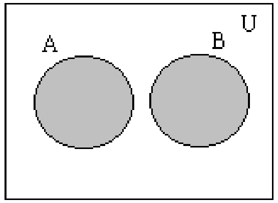
1) CONJUNTO VACÍO es aquel que no tiene elementos; se representa por: { } o bien por $\varnothing$. El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto.

2) CONJUNTOS DISJUNTOS: Son aquellos conjuntos que no tienen elementos en común. Por ejemplo:

El conjunto A tiene como elementos a los números 1, 2 y 3. El conjunto B tiene como elementos a las letras a, b, c y d. No hay elementos comunes entre los conjuntos A y B. En otras palabras, ningún elemento del conjunto A pertenece al conjunto B; a su vez, ningún elemento de B pertenece al conjunto A.

En consecuencia, los conjuntos A y B son disjuntos.





Tomando otro ejemplo:

Si E = { pizarrón, tiza, borrador} (Conjunto E formado por pizarrón, tiza, borrador)

F = { tiza, profesor, regla} (Conjunto F formado por tiza, profesor, regla)

G = { niño, cuaderno, sala, lápiz } (Conjunto G formado por niño, cuaderno, sala, lápiz)

E y G son conjuntos disjuntos porque: pizarrón, tiza, borrador no pertenecen al conjunto G.

E y F no son disjuntos ya que tiza pertenece a E y también a F.

F y G son conjuntos disjuntos porque: tiza, profesor, regla no pertenecen a G, y niño, cuaderno, sala, lápiz no pertenecen a F.

Ejemplos de conjuntos disjuntos y no disjuntos:

1.- Sea A = {x / x es par} B = {x / x es impar}

A y B son disjuntos pues no tienen ningún elemento en común.

2.- Sea A = {x / x es una vocal} y B = {x / x es una letra del abecedario }

estos dos conjuntos tienen a las vocales en común por lo que no son disjuntos.

3) CONJUNTO UNITARIO Es todo conjunto que está formado por sólo un elemento.

4) CONJUNTO SUBCONJUNTO: Un conjunto es subconjunto de otro si todos los elementos de un conjunto también pertenecen al otro.

Si se tienen los siguientes conjuntos: P = { a, e, i, o, u } y R = { a, i }

R es subconjunto de P porque todos los elementos de R están en P.

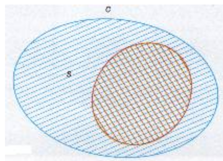
En general, para expresar que un conjunto es subconjunto de otro conjunto se pone entre ellos el símbolo $\subset$ (inclusión). En este ejemplo se escribe: $R \subset P$

Se lee " R es subconjunto de P" no es subconjunto de otro cuando al menos un elemento del primero no pertenece al segundo conjunto. El símbolo que representa (la no inclusión) la frase "no es subconjunto de" es $\not\subset$.

Si se tienen los siguientes conjuntos: C = { 3, 5, 7, 9 } y H = { 3, 5, 8 }

H no es subconjunto de C porque el elemento 8 no pertenece al conjunto C. Se escribe: $H \not\subset C$ Se lee " H no es subconjunto de C"

También los subconjuntos pueden representarse mediante Diagramas de Venn.

Ejemplo:  $S \subset C$

Propiedades de la relación subconjunto

1.- Todo conjunto es subconjunto de sí mismo. Si T = { x, z, y, z }, se tiene que T $\subset$ T

A = { Las personas que vuelan }	**A = { }**	**A = Ø**
B = { x / x numero racional e irracional}	**B = { }**	**B = Ø**
C = { x / x es una solución real de $x^2+1=0$}	**C = { }**	**C = Ø**
D = { x / x es rojo y verde a la vez}	**D = { }**	**D = Ø**
E = { x / x es un número real e imaginario}	**E = { }**	**F = Ø**

2.- El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto

RELACION DE INCLUSIÓN. Es una relación conjunto – conjunto. Se dice que un conjunto A está incluido en otro B, si todos los elementos del conjunto A pertenecen al conjunto B.

PROPIEDADES DE LOS SUBCONJUNTOS: Los subconjuntos tienen las siguientes propiedades:

REFLEXIVA Todo conjunto es subconjunto de si mismo. $A \subset A$

ANTISIMETRICA Si dados dos conjuntos A y B se verifica $A \subset B$, entonces se deduce que $B \not\subset A$. $A \subset B \implies A \not\subset B$

TRANSITIVA Dados tres conjuntos A, B y C, si se verifica

$$A \subset B \text{ y } B \subset C \text{ entonces } A \subset C$$

A = {x / x es par} B = {2,4,6,8} C = {vocales} D = {abecedario}

Los subconjuntos se expresan de la siguiente manera:

$A \subset B$ (A es subconjunto de B) $C \subset D$ (C es subconjunto de D)

Los elementos del conjunto A esta contenido en B pero al revés no es cierto, es decir B no es subconjunto de A y se representa, como se indicó anteriormente, por: $A \not\subset B$.

Conjunto complementario Dado un conjunto A de un conjunto de universal U, el conjunto complementario (A' o A con una raya encima o A^C) está formado por los elementos de U que no pertenecen a A.

Conjunto de las partes de un conjunto Dado un conjunto A, el conjunto formado por todos los subconjuntos de A, se llama conjunto de las partes de un conjunto. Se representa por $\mathcal{P}(A)$.

Una operación binaria interna (también llamada ley de composición interna) es una aplicación de A x A en A.

Ejemplo: Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ el producto cartesiano y apliquemos la función multiplicación. Podemos tomar cualquier par de números naturales, multiplicarlos y obtenemos otro número natural, por lo tanto la función multiplicación es una operación binaria interna.

Ejemplo: La función división no es una operación binaria interna porque se obtienen números que no pertenecen al conjunto de los números naturales.

Propiedades Asociativa

Ejemplo: Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$el producto cartesiano y apliquemos la función multiplicación. Tomemos tres (o más números naturales) a, b y c. Veremos que a x (b x c) = (a x b) x c. La función multiplicación tiene la propiedad asociativa en este ejemplo.

Conmutativa

Ejemplo: Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ el producto cartesiano y apliquemos la función multiplicación. Tomemos dos números naturales cualesquiera a y b. Veremos que a x b = b x a. La función multiplicación tiene la propiedad conmutativa.

Distributiva

Ejemplo: Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ el producto cartesiano y apliquemos la función multiplicación y la función suma. Cumple esta propiedad porque $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

Elemento neutro

Ejemplo: Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ el producto cartesiano y apliquemos la función multiplicación. El 1 es el elemento neutro para la multiplicación, pues $a \times 1 = a$.

Elemento simétrico

Ejemplo: Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ el producto cartesiano y apliquemos la función multiplicación. No tiene elemento simétrico porque el número $1/n$ no pertenece al conjunto de los números naturales.

Elemento regular

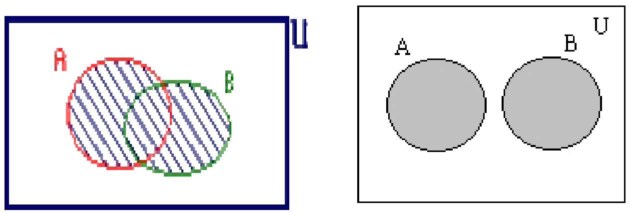
Ejemplo: Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ el producto cartesiano y apliquemos la función multiplicación. El 1 es el único elemento regular (por la derecha y por la izquierda) porque cumple $a \times 1 = b \times 1 \Rightarrow a = b$.

Elemento idempotente

Ejemplo: Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ el producto cartesiano y apliquemos la función multiplicación. El 1 es el único elemento idempotente porque $1 \times 1 = 1$.

Operaciones entre conjuntos

Unión Dados dos o más conjuntos, se define la unión de conjuntos, como el conjunto formado por los elementos de todos los conjuntos. O bien, $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ es el conjunto de elementos que están en A, en B o en ambos, es decir, están al menos en uno de los dos.



Ejemplo: Sean los conjuntos A = {a, b, c, d, e, f} y B = {a, h, j}. La unión de A y B es {a, b, c, d, e, f, h, j}

La unión tiene las siguientes propiedades:

Conmutativa. $A \cup B = B \cup A$ *Asociativa*. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

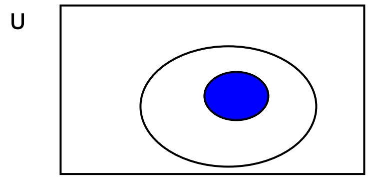
Distributiva: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Absorción: $A \cup (A \cap B) = A$ *Idempotencia*: $A \cup A = A$

Elemento neutro: $A \cup \phi = A$ *Dominación*: $U \cup A = U$

Inversa: $A \cup A' = U$ *Inversa de Morgan*: $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Intersección Dados dos o más conjuntos, se define la intersección de conjuntos, como el conjunto formado por los elementos que pertenecen a todos los conjuntos. Es decir, formado por los elementos comunes. $A \cap B$



Ejemplo: Sean los conjuntos A = {a, b, c, d, e, f} y B = {a, h, j}. La intersección de A y B es {a}

La intersección tiene las siguientes propiedades:

Conmutativa. $A \cap B = B \cap A$, *Asociativa*. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Distributiva: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Absorción: $A \cap (A \cup B) = A$ *Idempotencia*: $A \cap A = A$

Elemento neutro: $A \cap \phi = A$ *Dominación*: $\phi \cap A = U$

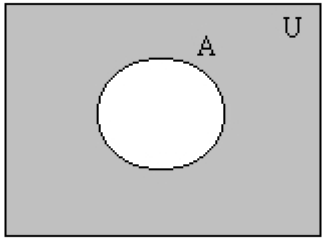
Inversa: $A \cap A' = U$ Inversa de Morgan: $(A \cap B)' = A' \cup B'$

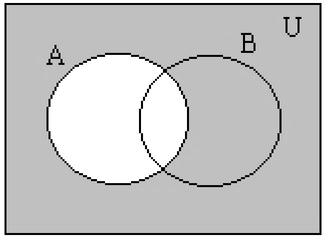
Igualdad de Conjuntos: Dos conjuntos **A** y **B** diremos que son iguales si todo elemento del primero pertenece al segundo y viceversa.

$\mathbf{A=B \Leftrightarrow A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in B}$ **y** $\mathbf{B \subset A \Leftrightarrow \forall x \in B, x \in A}$

El método que acabamos de emplear para saber si dos conjuntos son iguales se dice que es el de la doble inclusión. También se puede decir: dos conjuntos **A** y **B** diremos que son iguales si todo elemento del primero pertenece al segundo y viceversa.

Conjunto Complementario de A en U es el conjunto formado por los elementos de U que no pertenecen a A. $A^C = \{x \in U / x \notin A\}$.





Diferencia Dados dos conjuntos A y B, su diferencia, A - B, es los elementos de A que no pertenecen a B.

Ejemplo: Sean los conjuntos A = {a, b, c, d, e, f} y B = {a, h, j}. La diferencia A - B es {b, c, d, e, f}. La diferencia B - A es {h, j}

Diferencia simétrica Dados dos conjuntos A y B su diferencia simétrica es la unión de la diferencia A - B y B - A.

En el ejemplo anterior la diferencia simétrica es {b, c, d, e, f, h, j} .

Producto cartesiano Dados dos conjuntos A y B, el producto cartesianos de estos dos conjuntos es el conjunto formado por todos los pares ordenados (a,b) donde a es un elemento de A y b es un elemento de B.
Ejemplo: Sean A = {a, b, c} y B = {1, 2} dos conjuntos. El producto cartesiano A x B = {(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)}

El cardinal (número de elementos) del producto cartesiano es el producto de los cardinales de los dos conjuntos, $\#(A \times B) = \#(A) \times \#(B)$

Relación Dados dos conjuntos A y B, una relación es un subconjunto del producto cartesiano A x B.

Un elemento a, que pertenece al conjunto A, está relacionado con un elemento b, que pertenece al conjunto B, si el par (a, b) pertenece a un subconjunto G (llamado *grafo*) del producto cartesiano A x B.

Ejemplo: Sean A = {a, b, c} y B = {1, 2} dos conjuntos. El producto cartesiano A x B = {(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)}. Una relación sería R = {(a,1),(c,2)}.
A las relaciones también se les llama correspondencias.

Relación binaria Dado el producto cartesiano A x A, una relación binaria $\Re$ es un subconjunto G (llamado grafo*)* de este producto cartesiano.

Una relación binaria $\Re$ que cumple que para todo elemento a del conjunto A, el elemento (a,a) pertenece al grafo G tiene la propiedad reflexiva.
Una relación binaria $\Re$ que cumple que para todo elemento a del conjunto A, el elemento (a,a) no pertenece al grafo G tiene la propiedad irreflexiva o antireflexiva.

Una relación binaria $\Re$ que cumple que para todo elemento a y b perteneciente al conjunto A si (a,b) pertenece al grafo G entonces el elemento (b,a) también pertenece al grafo G, tiene la propiedad simétrica.

Una relación binaria $\Re$ tiene la propiedad antisimétrica si para todo elemento a y b perteneciente al conjunto A si (a,b) pertenece al grafo G y el elemento (b,a) también pertenece al grafo G, entonces a = b.

Una relación binaria tiene la propiedad transitiva si para todo elemento a, b y c perteneciente al conjunto A si (a,b) pertenece al grafo G y (b,c) también pertenece al grafo G, entonces (a, c) pertenece al grafo G.

Relación de equivalencia Una relación de equivalencia ℜ es una relación binaria que tiene las propiedades:
Reflexiva: a ℜ a Simétrica: Si a ℜ b, b ℜ a Transitiva: Si a ℜ b y b ℜ a, entonces a ℜ c.

Ejemplo: La relación a - b = 2.k (múltiplo de 2), siendo a y b números enteros es una relación de equivalencia porque cumple las propiedades:
Reflexiva: a - a = 0 = 2.k (k = 0).
Simétrica: a - b = b - a porque b - a = -(a - b). Si a - b es múltiplo de 2, -(a - b) también lo será.
Transitiva: a - b = 2.k_1 b - c = 2.k_2 Sumando queda a - c = 2.k_3 Entonces a - c es múltiplo de 2.

Al conjunto de los elementos del conjunto A que están relacionados con él se llama clase de equivalencia.
En el ejemplo anterior, la clase de equivalencia del número cero (uno de los elementos del conjunto de los números enteros) C(0) = {... -4, -2, 0, 2, 4, ...}, pues 0 - (-4) es múltiplo de 2, 0 - (-2) es múltiplo de 2 ya sí sucesivamente. La clase de equivalencia del número 1 será C(1) = {... -5, -3, -1, 1, 3, 5, ...} pues la diferencia entre 1 y los números indicados es múltiplo de 2. Del mismo modo podríamos calcular las clases de equivalencia de más números.

El conjunto formado por las clases de equivalencia se llama conjunto cociente.
En el ejemplo anterior el conjunto cociente Z / 2 es el conjunto formado por las clases de todos los elementos Z / 2 = {C(0), C(1), C(2), ... }.

Relación de orden Una relación binaria ℜ es una relación de orden que tiene las propiedades:
Reflexiva: a ℜ a Antisimétrica: Si a ℜ b y b ℜ a entonces a = b.
Transitiva: Si a ℜ b y b ℜ a, entonces a ℜ c.
Si en un conjunto se puede establecer una relación de orden el conjunto se dice ordenado.
Las relaciones de orden se representan con el símbolo menor igual (a $\leq$ b)
En un conjunto ordenado, el elemento 'mayor' (aquel que no hay otro que satisfaga que x $\geq$ a) se llama elemento maximal.

En un conjunto ordenado, el elemento 'menor' (aquel que no hay otro que satisfaga que x $\leq$ a) se llama elemento minimal.

Una relación entre A y B de grafo G es una aplicación de A en B si para cada x $\in$ A sólo existe un elemento y perteneciente a B tal que el par (x,y) $\in$ G.
Nuestro ejemplo no es una aplicación porque el elemento a_1 está relacionado con dos elementos: b_1 y b_2.

Al igual que en las funciones, en las aplicaciones existen los conceptos dominio e Imagen
Dominio es el conjunto de elementos de A para los que la aplicación produce una imagen, tal que el par (x,y) $\in$ G.
Imagen es el conjunto de elementos de B para los que existe un elemento en el conjunto A tal que el par (x,y) $\in$ G.

Tipos de aplicaciones Inyectiva: Si ningún elemento de A comparte imagen. Dicho de otra manera: cuando si f(a) = f(b) entonces a = b. También se puede decir que dos elementos distintos tienen distinta imagen.

Por ejemplo: si una aplicación relaciona a1 con b1 y a2 con b1, no es inyectiva porque dos elementos distintos comparten la misma imagen.

Sobreyectiva (también se llama suprayectiva, exhaustiva y sobre): Si todos los elementos de B son imagen de alguno de A.

Biyectiva: Si es inyectiva y sobreyectiva. También se denomina 1-1.

Composición de aplicaciones Sea f es una aplicación de A en B y g es una aplicación de B en C. Si la imagen de f está contenida en el dominio de g, entonces se puede definir una aplicación h de A en C de la forma:

h(x) = (g ∘ f) (x) = g[f(x)] para todo x perteneciente al dominio de f.

Aplicación recíproca (o inversa) Es una aplicación que se representa por f^{-1} tal que la composición f^{-1}[f(x)] = x.

Un conjunto (pensemos en el conjunto de los números naturales, por ejemplo) en el que hemos definido una, o dos, operaciones binarias internas (o ley de composición interna) cumple una serie de propiedades. Según las propiedades que se cumplan el conjunto y la operación (u operaciones) el conjunto tendrá una u otra estructura algebraica: grupo, cuerpo, anillo y espacio.

Supongamos que tenemos un conjunto A y que en ese conjunto definimos una operación (que representamos por *) sobre los elementos del conjunto, de tal manera que para cualquier par de elementos del conjunto A, el elemento resultante de la operación x*y, también pertenece al conjunto A.

Si la operación * tiene la propiedad *asociativa* x*(y*z) = (x*y)*z, existe un elemento e (llamado *elemento neutro*) que cumple e*x = x para todos los elementos de A y existe un elemento x' (llamado *elemento inverso*) que cumple x*x' = e , para todos los elementos de A, entonces se dice que A tiene estructura de grupo para la operación *.

Esta definición es muy abstracta y se comprende mejor con un ejemplo. Sea A el conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$), y la operación * sea la suma (+). Repasemos ahora la definición: El conjunto $\mathbb{Z}$ y la suma cumple la propiedad asociativa (dados varios números, podemos sumarlos en cualquier orden) , el cero es el elemento neutro y todos los números tienen inverso (el inverso del número a es -a), por lo tanto el conjunto de los números enteros y la operación suma tiene estructura de grupo.

También tiene estructura de grupo el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) y la operación multiplicación.

Grupo conmutativo (o Abeliano) Si la operación * tiene la propiedad conmutativa x*y = y*x, entonces el grupos se llama conmutativo (o abeliano)

Subgrupos Si un subconjunto B, del conjunto A (que es grupo respecto a una operación) es, a su vez, grupo respecto a la misma operación, entonces se dice que B es un subgrupo.

Otro ejemplo nos aclarará este concepto. El subconjunto de los múltiplos de 2 (en realidad de cualquier número) es un subgrupo.

Orden Se llama orden de un grupo al número de elementos de un conjunto que tiene estructura de grupo respecto a una operación. El número de elementos del conjunto debe ser finito.

Supongamos que tenemos un conjunto A y que en ese conjunto definimos una operación (que llamaremos *) sobre los elementos del conjunto, de tal manera que para cualquier par de elementos del conjunto A, el elemento resultante de la operación x*y, también pertenece al conjunto A.

Si la operación * tiene la propiedad *asociativa* x*(y*z) = (x*y)*z para todos los elementos de A, entonces se dice que A tiene estructura de semigrupo para la operación *.

Esta definición es muy abstracta y se comprende mejor con un ejemplo. Sea A el conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$), y la operación * sea la suma (+). Repasemos ahora la definición: El conjunto de los números enteros y la suma cumple la propiedad asociativa (dados varios números, podemos sumarlos en cualquier orden), por lo tanto el conjunto de los números enteros y la operación suma tiene estructura de semigrupo.

También tiene estructura de semigrupo el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) y la operación multiplicación.

Semigrupo conmutativo (o Abeliano)

Si la operación * tiene la propiedad conmutativa x*y = y*x, entonces el semigrupo se llama conmutativo (o abeliano).

Semigrupo con elemento neutro

Si la operación * tiene elemento neutro x*e = x, entonces el semigrupo se llama semigrupo con elemento neutro.

Supongamos que tenemos un conjunto A y que en ese conjunto definimos dos operaciones (que llamaremos + y *) sobre los elementos del conjunto, de tal manera que para cualquier par de elementos del conjunto A, los elementos resultantes de las operaciones x+y, y, x*y también pertenece al conjunto A.

Si la operación + tiene la propiedad *asociativa* x + (y + z) = (x + y) + z, tiene la propiedad *conmutativa*, x + y = y + x, existe un elemento **0** (llamado *elemento neutro*) que cumple 0 + x = x para todos los elementos de A, existe un elemento x' (llamado *elemento inverso*) que cumple x + x' = 0, si la operación * tiene la propiedad *asociativa* x*(y*z) = (x*y)*z y tiene la propiedad distributiva x*(y + z) = x*y + y*z, para todos los elementos de A, entonces se dice que A tiene estructura de anillo para las operaciones + y *.

Esta definición es muy abstracta y se comprende mejor con un ejemplo. Sea A el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$), y la operación + sea la suma y la operación * sea la multiplicación. Repasemos ahora la definición y veremos que el conjunto de los números reales tiene estructura de anillo.

Si existe un elemento 1 que cumple x*1 = x se dice que el anillo tiene una *unidad*.

Anillos conmutativos Si el conjunto A tiene, además, la propiedad *conmutativa* respecto a la operación *, entonces el conjunto A tiene estructura de *anillo conmutativo*.

Supongamos que tenemos un conjunto A y que en ese conjunto definimos dos operaciones (que llamaremos + y *) sobre los elementos del conjunto, de tal manera que para cualquier par de elementos del conjunto A, los elementos resultantes de las operaciones x+y, y, x*y también pertenece al conjunto A.

Si la operación + tiene, para todos los elementos de A, las propiedades:

interna para todo x e y, el elemento x + y pertenece al conjunto A
asociativa: x + (y + z) = (x + y) + z *conmutativa:* x + y = y + x
elemento neutro: 0 + x = x *elemento inverso:* x + x' = 0

y la operación * tiene las propiedades:

interna para todo x e y, el elemento x * y pertenece al conjunto A
asociativa x*(y*z) = (x*y)*z *elemento neutro*: x*1 = x
conmutativa: x*y = y*x *elemento inverso*: x*x' = 1
distributiva x*(y + z) = x*y + y*z

y además el elemento neutro de la operación + es distinto del elemento neutro de la operación *, entonces el conjunto A tiene estructura de cuerpo.

Esta definición es muy abstracta y se comprende mejor con un ejemplo. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, y la operación + sea la suma y la operación * sea la multiplicación. Repasemos ahora la definición y veremos que el conjunto de los números reales tiene estructura de cuerpo.

Espacio vectorial Supongamos que tenemos un conjunto K con estructura de cuerpo. A los elementos de K le llamaremos escalares y los nombraremos como a_1, a_2, a_3,... .
El conjunto V (a sus elementos le llamaremos vectores y nombraremos como b_1, b_2, b_3, ...) tiene estructura de espacio vectorial si:

1.- El conjunto V tiene estructura de grupo abeliano para una ley de composición interna que llamaremos +.

2- En el conjunto V existe una ley de composición externa (cuyo dominio es el cuerpo V) que cumple lo siguiente:

Distributiva respecto a la suma de escalares: $(a_1 + a_2)b_1 = a_1b_1 + a_2b_1$.
Distributiva respecto a la suma de vectores: $a_1(b_1 + b_2) = a_1b_1 + a_1b_2$.
Asociativa respecto a los escalares: $a_1(a_2b_1) = (a_1a_2)b1$.
Elemento neutro en V: $1b_1 = b_1$.

Combinación lineal de vectores Un vector es combinación lineal de otros vectores si se puede obtener mediante operaciones de suma de otros vectores.

Por ejemplo: el vector (3,5) es combinación lineal del vector (1,1) y (0,2) pues se puede obtener multiplicando por 3 el vector (1,1) y sumándole el vector (0,2).

Sistema de vectores Un sistema de vectores es un conjunto de vectores.

Un sistema de vectores es libre si son linealmente independientes entre si. En caso contrario se dice que es ligado (dependientes).

Base de un espacio vectorial Un sistema de vectores libre, que permite generar todos los vectores de su espacio vectorial es una base.
Todo espacio vectorial tiene al menos una base.

El número de elementos de una base de un sistema de vectores se llama dimensión del espacio vectorial.
Por ejemplo: Los vectores (0,0,1), (0,1,0) y (1,0,0) son la base (canónica) que se utiliza normalmente en un espacio de tres dimensiones.

Coordenadas de un vector Dada una base $B = \{e_i\}$ de un espacio vectorial, un vector $\mathbf{x}$ de ese espacio se representará en función de esa base como $\mathbf{x} = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$. Siendo e_i los vectores de la base, x_i son las coordenadas del vector en la base B.

Por ejemplo: Sean $u_1 = (0,0,1)$, $u_2 = (0,1,0)$ y $u_3 = (1,0,0)$ los vectores que forman la base. Un vector $x = 5u_1 + 2u_2 + 9u_3$ se representa como (5,2,9).

Subespacio vectorial Para que un subconjunto W (que tiene estructura de espacio vectorial) de V (teniendo V estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo K) sea un subespacio vectorial, es necesario y suficiente que cumpla la siguiente condición:
Para todo $c_1,c_2 \in W$ y para todo $a_1,a_2 \in K$ se cumpla $a_1c_1 + a_2c_2 \in W$.