Ejercicio para entregar

a) El 28 de noviembre de 1963, EE.UU. lanzó el Explorer 18. Sus puntos más alto y más bajo sobre la superficie de la Tierra fueron 119 millas y 122000 millas. El centro de la Tierra es el foco de la órbita. Hallar la ecuación en polares de la órbita $r = f(\alpha)$ y la distancia entre la superficie de la Tierra y el satélite cuando $\alpha = 60^\circ$. (Suponer que el radio de la Tierra es 4000 millas y que el foco mencionado es el izquierdo).

b) Hallar la ecuación en polares de la circunferencia de radio "a" y centro en el punto C de coordenadas polares C = (b, θ), suponiendo "b" positivo.

¿ Cómo queda la ecuación si la circunferencia pasa por el origen?

¿Y si además el centro está sobre el eje de abscisas? ¿y sobre el de ordenadas?

SOLUCIÓN

a) 2a = 119mi + 122000mi + 2(4000mi) , a = 65059.5 millas, c = 122000mi + 4000mi – a = 126000mi – 65059.5mi, c = 60940.5 millas, excentricidad = c/a= e = 0.94

La directriz está a la izquierda del polo y la ecuación en polares de la órbita del satélite debe tener una ecuación del siguiente tipo:

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\alpha}$$

$$p = b^2/a = \frac{(a^2 - c^2)}{a} = 518994000/a = 7977.22$$

Ecuación: $r = f(\alpha) = \dfrac{p}{1 - e\cos\alpha} = \dfrac{7977.22}{1 - 0.94\cos\alpha}$

$$r = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{7977.22}{1 - 0.94\cos\frac{\pi}{3}} = 15051.34 \text{ millas}$$

Distancia entre la superficie de la Tierra y el satélite es: $\{f(\frac{\pi}{3})$ – radio de la Tierra$\}$.

Distancia = 15051.34mi – 4000mi = 11051.36 millas.

La ecuación en coordenadas polares de la órbita del satélite es: $r = \dfrac{7977.22}{1 - 0.94\cos\alpha}$

La distancia entre la superficie de la Tierra y el satélite cuando $\alpha = 60^\circ$ es de 11051.36 millas.

b)

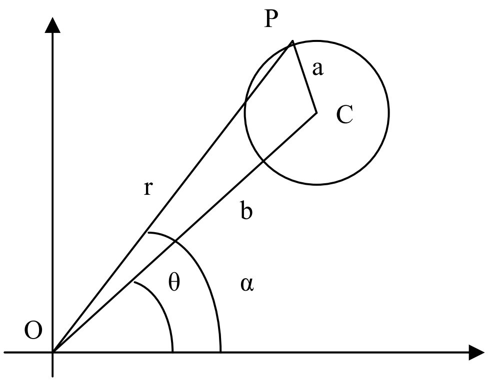

Figura 1

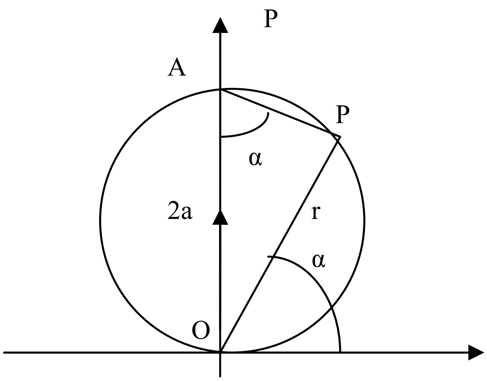

Figura 2

Sea P = (r, α) un punto cualquiera de la circunferencia, como se muestra en la figura 1. Aplicando la fórmula del coseno al triángulo OPC, se obtiene:

$$a^2 = r^2 + b^2 - 2br\cos(\alpha - \theta) \Rightarrow r^2 - 2br\cos(\alpha - \theta) + b^2 - a^2 = 0 \Rightarrow$$

$$r = \frac{2b\cos(\alpha - \theta) \pm \sqrt{4b^2\cos^2(\alpha - \theta) - 4(b^2 - a^2)}}{2} = b\cos(\alpha - \theta) \pm \sqrt{b^2\cos^2(\alpha - \theta) + (a^2 - b^2)}$$

Para circunferencias que pasan por el origen, es a = b y la ecuación puede escribirse como

$$r = 2a\cos(\alpha - \theta)$$

En particular, cuando $\theta = 0$ (centro sobre el eje de abscisas), queda:

$$r = 2a\cos\alpha$$

Cuando $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ (centro sobre el eje de ordenadas), al ser $\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\alpha$, queda:

$$r = 2a\operatorname{sen}\alpha$$

En este caso el triángulo OAP de la figura 2 nos proporciona un método geométrico más directo de obtener la ecuación anterior, ya que r es aquí el cateto opuesto al ángulo agudo α.