1.- La Luna es el satélite natural de la Tierra y tiene una órbita elíptica con el centro de la Tierra en uno de sus focos. Esta órbita tiene los siguientes datos: a= 384400 km, e=0.05. Tomando como radio de la Tierra R= 6370 km y como radio de la Luna 1738 km

a) Hallar una ecuación polar de la órbita de la Luna.

b) Hallar la distancia más lejana de la superficie de la Tierra a la superficie de la Luna y la distancia para $\alpha = \pi/2$.

Solución

a) a= 384400km, c=a·e=19220km, $b^2 = a^2-c^2$ = 147393951600, p= b^2/a= 383439 km

$$r = \frac{383439}{1 - 0.05\ cos\alpha}$$

b) La distancia más lejana es el punto apogeo y hemos de tener en cuenta los radios, luego,

$$d_1 = a+c-R_T-R_L = 395512 \text{ km}$$

La distancia para $\alpha = \pi/2$ es $d_2 = \frac{383439}{1-0.05\cos\pi/2}$ - 6370-1738= **375331 km** (obsérvese que se trata de la longitud del parámetro p menos los radios de los astros)

2.- Los planetas describen órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos.

a) Hallar la ecuación polar de la órbita de Marte sabiendo que tiene por excentricidad e = 0,0934 y que el semieje mayor es a = 227,94 x 106 km.

b) Hallar la distancia más lejana de Marte al Sol (afelio) y la distancia para $\alpha = \pi/6$.

c) Hallar una ecuación cartesiana de la órbita.

Solución

a) Ecuación polar de la órbita de Marte

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\alpha}, \text{ con } p = \frac{b^2}{a}.$$

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow c = e \cdot a \approx 212.89 \times 10^5 \Rightarrow p = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{515.03 \times 10^{14}}{227.94 \times 10^6} = 225.95 \times 10^6$$

$$\boxed{r = \frac{p}{1 - e\cos\alpha} = \frac{225.95 \times 10^6}{1 - 0.0934\cos\alpha}}$$

b) Distancia más lejana al sol (afelio):

$$r = \frac{225.95 \times 10^6}{1 - 0.0934\cos 0} = \boxed{249.23 \times 10^6 \ \textbf{km}}$$

Distancia para $\alpha = \frac{\pi}{6}$: $r = \dfrac{225.95\times10^6}{1-0.0934\cos\frac{\pi}{6}} = \boxed{245.84\times10^6 \text{ km}}$

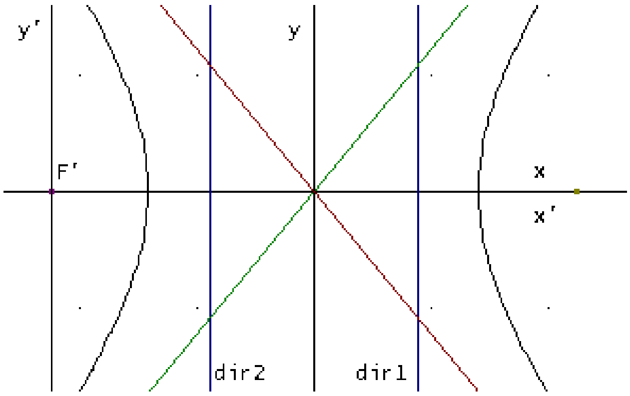
c) Ecuación cartesiana de la órbita:

$$\frac{x^2}{(227.94\times10^6)^2} + \frac{y^2}{(226.94\times10^6)^2} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\frac{x^2}{519.57\times10^{14}} + \frac{y^2}{515.03\times10^{14}} = 1}$$

3.- Dada la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{169} - \frac{y^2}{100} = 1$ hallar la ecuación polar de su rama derecha suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está:

i) en el foco izquierdo de la hipérbola.
ii) en el centro de la hipérbola.
En el caso i), hallar la ecuación polar de sus directrices y asíntotas.

Solución



i) $a^2 = 169 \Rightarrow a = 13$

$b^2 = 100 \Rightarrow b = 10$

$c^2 = a^2 + b^2 = 269 \Rightarrow$

$c = \sqrt{269}$

$$\left\{\begin{array}{l} p = \frac{b^2}{a} = \frac{100}{13} \\ e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{269}}{13} \end{array}\right. \underset{\text{caso 4}}{\Rightarrow}$$

$$r = \frac{-p}{1-e\cos\alpha} = \frac{-\frac{100}{13}}{1-\frac{\sqrt{269}}{13}\cos\alpha} = \frac{-100}{13-\sqrt{269}\cos\alpha}$$

Ecuación polar de las **directrices**:

$$\text{dir}_1 \equiv x' = c + \frac{a^2}{c} = \sqrt{269} + \frac{169}{\sqrt{269}} \Leftrightarrow r\cos\alpha = \frac{438\sqrt{269}}{269} \Rightarrow r = \frac{438\sqrt{269}}{269\cos\alpha}$$

$$\text{dir}_2 \equiv x' = c - \frac{a^2}{c} = \sqrt{269} - \frac{169}{\sqrt{269}} \Leftrightarrow r\cos\alpha = \frac{100\sqrt{269}}{269} \Rightarrow r = \frac{100\sqrt{269}}{269\cos\alpha}$$

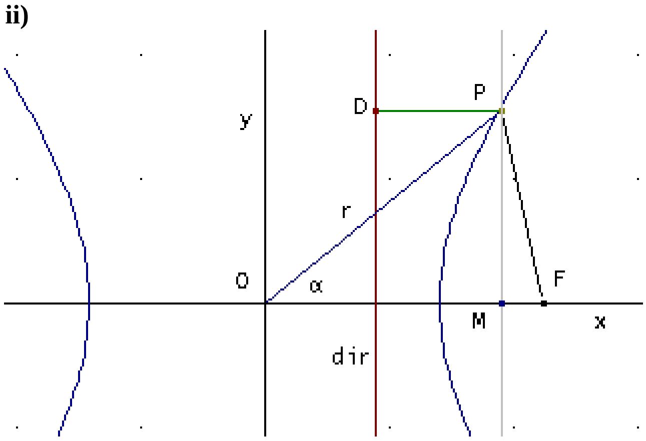
Ecuación polar de las **asíntotas**:

Son rectas que, en el sistema de referencia x' y', pasan por el punto (c, 0) y tienen de pendiente $\pm\frac{b}{a}$; por tanto, tienen de ecuación:

$y' = \pm\frac{b}{a}(x'-c) \Leftrightarrow y' = \pm\frac{10}{13}\left(x'-\sqrt{269}\right) \Leftrightarrow r\,\text{sen}\alpha = \pm\frac{10}{13}\left(r\cos\alpha - \sqrt{269}\right)$; y despejando r se obtiene ya la ecuación pol,ar:

$$r=\frac{\mp\frac{10}{13}\sqrt{269}}{\operatorname{sen}\alpha\mp\frac{10}{13}\cos\alpha}$$

ii)



$P(r,\ \alpha) \in$ hipérbola $\Leftrightarrow$

$$\frac{\overline{PF}}{\operatorname{dist}(P,\operatorname{dir})}=e.$$

Por el teorema del coseno en el triángulo OPF, se verifica:

$$\overline{PF}^2=r^2+c^2-2rc\cos\alpha$$

$$\operatorname{dist}(P,\operatorname{dir})=\overline{PD}=\overline{OM}-\frac{a^2}{c}=$$

$$r\cos\alpha-\frac{a^2}{c}$$

Por tanto, $\dfrac{\overline{PF}}{\operatorname{dist}(P,\operatorname{dir})}=e\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{r^2+c^2-2rc\cos\alpha}}{r\cos\alpha-\frac{a^2}{c}}=\dfrac{c}{a}$.

Elevando al cuadrado en la expresión anterior y operando se obtiene:

$$c^2r^2\cos^2\alpha+a^4=a^2r^2+a^2c^2\Leftrightarrow r^2\left(a^2-c^2\cos^2\alpha\right)=a^4-a^2c^2=a^2\left(a^2-c^2\right)=$$

$$=a^2\left(-b^2\right)\Rightarrow r^2=\frac{-a^2b^2}{a^2-c^2\cos^2\alpha}=-\frac{b^2}{1-\frac{c^2}{a^2}\cos^2\alpha}=-\frac{b^2}{1-e^2\cos^2\alpha}\Rightarrow$$

$$r^2=-\frac{100}{1-\frac{269}{169}\cos^2\alpha}=-\frac{16900}{169-269\cos^2\alpha}$$

2º método

Efectuando el cambio a polares en la propia ecuación cartesiana de la hipérbola pues ahora coincide el polo con el origen del sistema de referencia cartesiano:

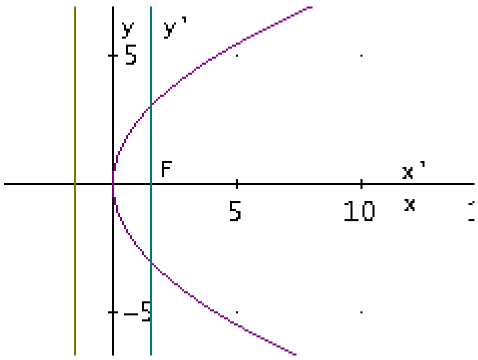
$$\frac{x^2}{169}-\frac{y^2}{100}=1\Leftrightarrow\frac{r^2\cos^2\alpha}{169}-\frac{r^2\operatorname{sen}^2\alpha}{100}=1\Leftrightarrow\frac{100r^2\cos^2\alpha-169r^2\operatorname{sen}^2\alpha}{16900}=1\Leftrightarrow$$

$$r^2\left(100\cos^2\alpha-169\operatorname{sen}^2\alpha\right)=16900\Leftrightarrow r^2=\frac{16900}{100\cos^2\alpha-169\operatorname{sen}^2\alpha}=$$

$$\frac{16900}{100\cos^2\alpha-169\left(1-\cos^2\alpha\right)}=-\frac{16900}{169-269\cos^2\alpha}$$

4) Dada la parábola de ecuación $y^2 = 6x$, hallar su ecuación polar suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está en el foco de la parábola.

Solución:



$y^2 = 6x = 2px \Rightarrow p = 3$; $e = 1$.

La ecuación adecuada es:

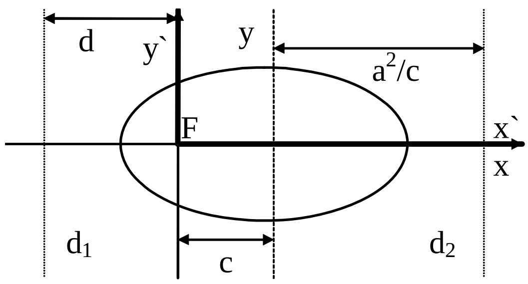
$$r = \frac{p}{1 - e\cos\alpha} = \frac{3}{1 - \cos\alpha} .$$

5) Verificar que la ecuación $r = \dfrac{21}{5 - 2\cos\alpha}$ determina una elipse y hallar los semiejes y las ecuaciones polares de sus directrices.

Solución:

$$r = \frac{21}{5 - 2\cos\alpha} = \frac{21/5}{1 - \frac{2}{5}\cos\alpha} \Rightarrow p = \frac{21}{5},\ e = \frac{2}{5}$$

Por ser $e < 1$, se trata efectivamente de una *elipse*; y, por la forma de la ecuación, un foco está en el polo, la directriz no corta al eje polar y la cónica y el foco están en el mismo semiplano respecto de la directriz.



$$p = de \Rightarrow d = \frac{p}{e} = \frac{21/5}{2/5} = \frac{21}{2} .$$

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = 5 ,\quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} = \sqrt{21} .$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 21 = 4 \Rightarrow c = 2 .$$

La directriz d_1 tiene de ecuación:

$$x` = -d = -\frac{21}{2} \Rightarrow r\cos\alpha = -\frac{21}{2} \Rightarrow d_1 \equiv r = -\frac{21}{2\cos\alpha} .$$

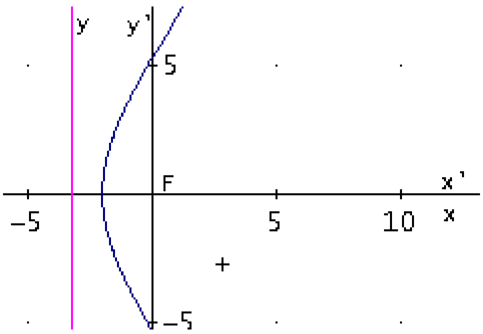
La otra directriz d_2 tiene de ecuación:

$$x` = c + \frac{a^2}{c} = 2 + \frac{25}{2} = \frac{29}{2} \Rightarrow r\cos\alpha = \frac{29}{2} \Rightarrow d_2 \equiv r = \frac{29}{2\cos\alpha}$$

6) Verificar que la ecuación $r = \dfrac{16}{3 - 5\cos\alpha}$ determina la rama derecha de una hipérbola y hallar las ecuaciones polares de sus directrices y asíntotas.

Solución:

$$r = \frac{16}{3 - 5\cos\alpha} = \frac{16/3}{1 - 5/3\cos\alpha} \Rightarrow p = \frac{16}{3},\ e = \frac{5}{3}\ .$$



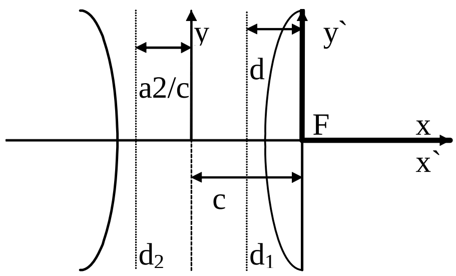
Por ser e > 1, se trata de una rama de una hipérbola.
A la vista de la ecuación, la cónica y el foco están del mismo lado respecto de la directriz y el eje polar no corta a dicha recta, luego, la situación es la siguiente:

Así pues, se trata de la rama derecha de una hipérbola.

$$d = \frac{p}{e} = \frac{16}{5}\ ,\quad a = \frac{p}{e^2 - 1} = 3\ ,\quad b = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}} = 4\ .$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 25 \Rightarrow c = 5\ .$$

Las ecuaciones polares de las directrices se hallan de forma análoga a como se hizo en el problema anterior, obteniéndose:



$$d_1 \equiv r = -\frac{16}{5\cos\alpha}\ , d_2 \equiv r = -\frac{34}{5\cos\alpha}\ .$$

Las ecuaciones de las asíntotas respecto al sistema de referencia x , y (de origen el centro de la cónica, y de ejes los de la cónica) son: $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

Los nuevos ejes son ahora: $\begin{cases} x` = x - 5 \\ y` = y \end{cases}$

Respecto a estos nuevos ejes, las ecuaciones cartesianas de las asíntotas son, por tanto:

$$y` = \pm\frac{4}{3}(x`+5)\ .$$

Por consiguiente, las ecuaciones polares de estas rectas son:

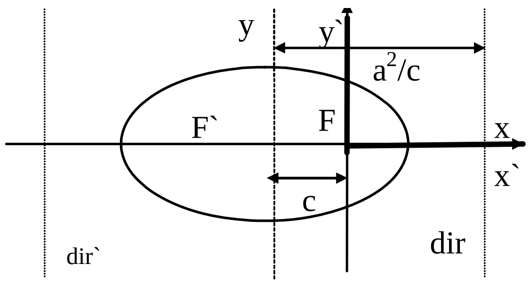
$r\,\mathrm{sen}\alpha = \pm\dfrac{4}{3}(r\cos\alpha - 5)$; es decir, operando para cada uno de los signos se obtiene:

$$r = \frac{20}{3\,\mathrm{sen}\alpha - 4\cos\alpha}\ ,\ r = \frac{-20}{4\cos\alpha + 3\,\mathrm{sen}\alpha}$$

7) Una elipse de excentricidad $e = \dfrac{1}{4}$ tiene un foco en el origen y su directriz correspondiente tiene de ecuación polar $r\cos\alpha$ = 8. Sabiendo que el eje polar es OX^+, se pide:

a) Hallar las coordenadas del otro foco.
b) La ecuación polar de la elipse
c) Dibujar la elipse

Solución:



De la ecuación de la directriz:

$$r = \frac{8}{\cos\alpha} \Leftrightarrow x` = 8$$

se deduce que la directriz está a la derecha del foco F (polo); por tanto, el eje polar corta a la directriz y la cónica y el foco están en el mismo semiplano (izquierdo) respecto de la misma.

Debe usarse una ecuación del tipo 3: $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\alpha}$

a) Las coordenadas polares del otro foco serán: F`(r = 2c, $\alpha = \pi$). Hallemos c:

$$e = \frac{1}{4} = \frac{c}{a} \Rightarrow a = 4c\text{, luego } 8 = \frac{a^2}{c} - c = \frac{16c^2}{c} - c = 15c \Rightarrow c = \frac{8}{15}.$$

Por tanto, : F`(r = $2\dfrac{8}{15} = \dfrac{16}{5}$, $\alpha = \pi$).

b) $p = \dfrac{b^2}{a} = \dfrac{a^2 - c^2}{a} = \dfrac{(4c)^2 - c^2}{4c} = 2 \Rightarrow r = \dfrac{p}{1 + e\cos\alpha} = \dfrac{2}{1 + \frac{1}{4}\cos\alpha}$

c)