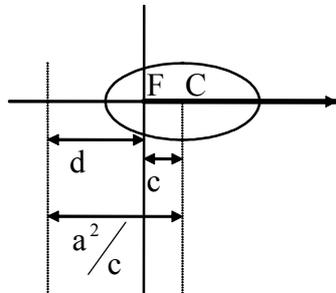


1) El cometa Halley describe una órbita elíptica de excentricidad $e \approx 0.97$. la longitud del eje mayor de la órbita es, aproximadamente, 36.18 unidades astronómicas (una u.a., distancia media entre la Tierra y el Sol, es ≈ 93 millones de millas). Hallar una ecuación en polares para la órbita ¿Cuánto se acerca el cometa Halley al Sol?

Solución:



$$e = 0.97 = \frac{c}{a}, \quad 2a = 36.18 \text{ u.a.} \Rightarrow a = 18.09 \text{ u.a.}$$

Tomamos una referencia polar de tipo 1 y la ecuación de la cónica sería de la forma:

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \alpha} = \frac{ed}{1 - e \cos \alpha}$$

$$d = \frac{a^2}{c} - c; \quad c = a \cdot e = 17.5473 \Rightarrow d = 1.1022 \Rightarrow$$

$p = d \cdot e = 1.0691189$. Luego, una ecuación en polares para la órbita es:

$$r = \frac{1.0691}{1 - 0.97 \cos \alpha}$$

La distancia mínima entre el cometa Halley y el Sol es el valor de “r” mínimo, que se obtiene cuando el denominador $1 - 0.97 \cos \alpha$ es máximo, es decir, para $\cos \alpha = -1$:

$$r = \frac{1.0691}{1 + 0.97} \approx 0.5427 \text{ u.a.}$$

2) Dada la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, hallar la ecuación polar de su rama derecha suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está:

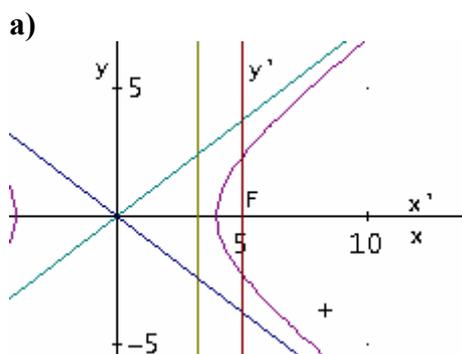
- a) en el foco derecho de la hipérbola.
- b) en el foco izquierdo de la hipérbola.

En el caso a), hallar la ecuación polar de sus directrices y asíntotas.

Solución:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow a = 4, \quad b = 3 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow c = 5.$$

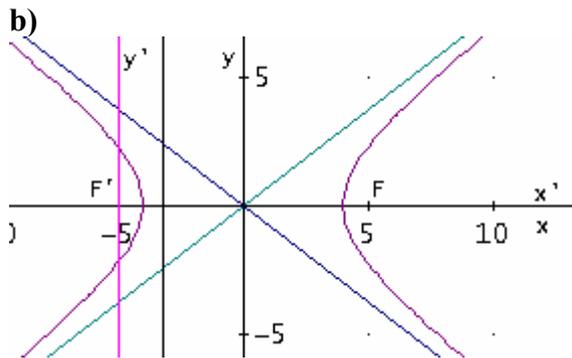
Por tanto, $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$, $p = \frac{b^2}{a} = \frac{9}{4}$, $d = \frac{b^2}{c} = \frac{9}{5}$.



La directriz es la recta $x = c - d = 5 - \frac{9}{5} = \frac{16}{5}$.

La ecuación, en este caso, es: $r = \frac{p}{1 - e \cos \alpha} =$

$$\frac{\frac{9}{4}}{1 - \frac{5}{4} \cos \alpha} = \frac{9}{4 - 5 \cos \alpha}$$



La directriz es la recta $x = -c + d = -\frac{a^2}{c} = -\frac{16}{5}$

La ecuación que se debe emplear ahora es:

$$r = \frac{-p}{1 - e \cos \alpha} = \frac{-9/4}{1 - 5/4 \cos \alpha} = \frac{-9}{4 - 5 \cos \alpha}$$

Directrices en el caso a):

$$\text{dir} \equiv x' = -(c - \frac{a^2}{c}) = -\frac{9}{5} \Rightarrow r \cos \alpha = -\frac{9}{5} \Rightarrow r = -\frac{9}{5 \cos \alpha}$$

$$\text{dir} \equiv x' = -(c + \frac{a^2}{c}) = -\frac{41}{5} \Rightarrow r \cos \alpha = -\frac{41}{5} \Rightarrow r = -\frac{41}{5 \cos \alpha}$$

Asíntotas en el caso a):

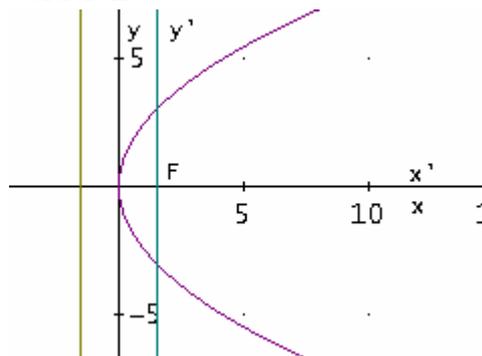
Son rectas que pasan por $O(0,0)$ en la referencia x y ó bien $O(-c, 0) = (-5, 0)$ en la $x'y'$, y tienen de pendiente $\pm \frac{b}{a} = \pm \frac{3}{4}$, luego su ecuación es: $y' - 0 = \pm \frac{3}{4}(x' + 5)$.

Pasando a polares:

$$r \sin \alpha = \pm \frac{3}{4}(r \cos \alpha + 5) \Rightarrow r = \frac{15/4}{\sin \alpha - \frac{3}{4} \cos \alpha}, r = \frac{-15/4}{\sin \alpha + \frac{3}{4} \cos \alpha}$$

3) Dada la parábola de ecuación $y^2 = 6x$, hallar su ecuación polar suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está en el foco de la parábola.

Solución:



$$y^2 = 6x = 2px \Rightarrow p = 3 ; e = 1$$

La ecuación adecuada es:

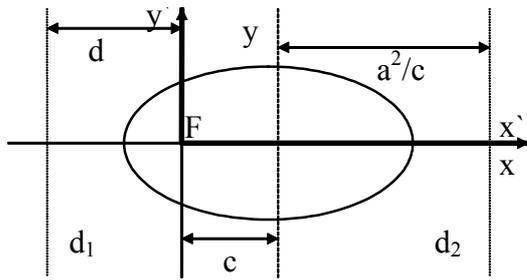
$$r = \frac{p}{1 - e \cos \alpha} = \frac{3}{1 - \cos \alpha}$$

4) Verificar que la ecuación $r = \frac{21}{5 - 2 \cos \alpha}$ determina una elipse y hallar los semiejes y las ecuaciones polares de sus directrices.

Solución:

$$r = \frac{21}{5 - 2 \cos \alpha} = \frac{21/5}{1 - 2/5 \cos \alpha} \Rightarrow p = \frac{21}{5}, e = \frac{2}{5}$$

Por ser $e < 1$, se trata efectivamente de una *elipse*; y, por la forma de la ecuación, un foco está en el polo, la directriz no corta al eje polar y la cónica y el foco están en el mismo semiplano respecto de la directriz.



$$p = de \Rightarrow d = \frac{p}{e} = \frac{21/5}{2/5} = \frac{21}{2}$$

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = 5, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} = \sqrt{21}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 21 = 4 \Rightarrow c = 2$$

La directriz d_1 tiene de ecuación:

$$x' = -d = -\frac{21}{2} \Rightarrow r \cos \alpha = -\frac{21}{2} \Rightarrow d_1 \equiv r = -\frac{21}{2 \cos \alpha}$$

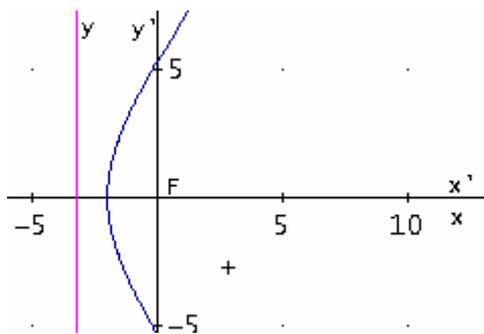
La otra directriz d_2 tiene de ecuación:

$$x' = c + \frac{a^2}{c} = 2 + \frac{25}{2} = \frac{29}{2} \Rightarrow r \cos \alpha = \frac{29}{2} \Rightarrow d_2 \equiv r = \frac{29}{2 \cos \alpha}$$

5) Verificar que la ecuación $r = \frac{16}{3 - 5 \cos \alpha}$ determina la rama derecha de una hipérbola y hallar las ecuaciones polares de sus directrices y asíntotas.

Solución:

$$r = \frac{16}{3 - 5 \cos \alpha} = \frac{16/3}{1 - 5/3 \cos \alpha} \Rightarrow p = \frac{16}{3}, \quad e = \frac{5}{3}$$



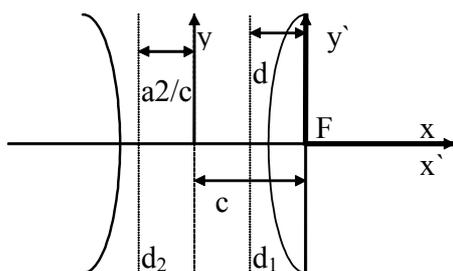
Por ser $e > 1$, se trata de una rama de una hipérbola. A la vista de la ecuación, la cónica y el foco están del mismo lado respecto de la directriz y el eje polar no corta a dicha recta, luego, la situación es la siguiente:

Así pues, se trata de la rama derecha de una hipérbola.

$$d = \frac{p}{e} = \frac{16}{5}, \quad a = \frac{p}{e^2 - 1} = 3, \quad b = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}} = 4$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 25 \Rightarrow c = 5$$

Las ecuaciones polares de las directrices se hallan de forma análoga a como se hizo en el problema anterior, obteniéndose:



$$d_1 \equiv r = -\frac{16}{5 \cos \alpha}, \quad d_2 \equiv r = -\frac{34}{5 \cos \alpha}$$

Las ecuaciones de las asíntotas respecto al sistema de referencia x, y (de origen el centro de la cónica, y de

$$\text{ejes los de la cónica) son: } y = \pm \frac{b}{a} x$$

$$\text{Los nuevos ejes son ahora: } \begin{cases} x' = x - 5 \\ y' = y \end{cases}$$

Respecto a estos nuevos ejes, las ecuaciones cartesianas de las asíntotas son, por tanto:

$$y' = \pm \frac{4}{3}(x'+5)$$

Por consiguiente, las ecuaciones polares de estas rectas son:

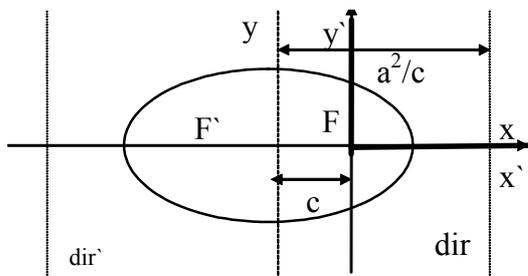
$$r \operatorname{sen} \alpha = \pm \frac{4}{3}(r \operatorname{cos} \alpha - 5) ; \text{ es decir, operando para cada uno de los signos se obtiene:}$$

$$r = \frac{20}{3 \operatorname{sen} \alpha - 4 \operatorname{cos} \alpha} , r = \frac{-20}{4 \operatorname{cos} \alpha + 3 \operatorname{sen} \alpha}$$

6) Una elipse de excentricidad $e = \frac{1}{4}$ tiene un foco F en el origen (polo) y su directriz correspondiente tiene de ecuación polar $r \operatorname{cos} \alpha = 8$. Sabiendo que el eje polar es OX^+ , se pide:

- a) Hallar las coordenadas del otro foco F'.
- b) La ecuación polar de la elipse
- c) Dibujar la elipse

Solución:



De la ecuación de la directriz:

$$r = \frac{8}{\operatorname{cos} \alpha} \Leftrightarrow x' = 8$$

se deduce que la directriz está a la derecha del foco F (polo); por tanto, el eje polar corta a la directriz y la cónica y el foco están en el mismo semiplano (izquierdo) respecto de la misma.

Debe usarse una ecuación del tipo 3: $r = \frac{p}{1 + e \operatorname{cos} \alpha}$

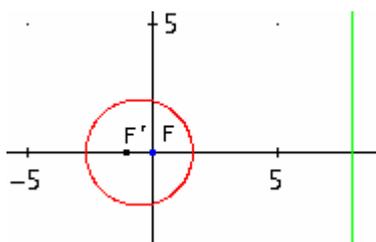
a) Las coordenadas polares del otro foco serán: $F'(r = 2c, \alpha = \pi)$. Hallemos c:

$$e = \frac{1}{4} = \frac{c}{a} \Rightarrow a = 4c, \text{ luego } 8 = \frac{a^2}{c} - c = \frac{16c^2}{c} - c = 15c \Rightarrow c = \frac{8}{15}$$

Por tanto, : $F'(r = 2 \frac{8}{15} = \frac{16}{15}, \alpha = \pi)$.

$$b) p = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{(4c)^2 - c^2}{4c} = 2 \Rightarrow r = \frac{p}{1 + e \operatorname{cos} \alpha} = \frac{2}{1 + \frac{1}{4} \operatorname{cos} \alpha}$$

c)



Ejercicios propuestos

1) Determinar las cónicas que se dan en coordenadas polares mediante las ecuaciones siguientes:

$$\text{a) } r = \frac{5}{1 - \frac{1}{2} \cos \alpha}$$

$$\text{b) } r = \frac{6}{1 - \cos \alpha}$$

$$\text{c) } r = \frac{10}{1 - \frac{3}{2} \cos \alpha}$$

$$\text{d) } r = \frac{12}{2 - \cos \alpha}$$

$$\text{e) } r = \frac{5}{3 - 4 \cos \alpha}$$

$$\text{f) } r = \frac{1}{3 - 3 \cos \alpha}$$

Solución:

a) Elipse b) Parábola c) Una rama de una hipérbola d) Elipse e) Una rama de una hipérbola f) Parábola.

2) Dada la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$, hallar la ecuación polar de su rama izquierda, suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está:

a) en el foco izquierdo de la hipérbola;

b) en el foco derecho.

Solución:

$$\text{a) } r = \frac{144}{5 + 13 \cos \alpha}$$

$$\text{b) } r = -\frac{144}{5 + 13 \cos \alpha}$$

3) Hallar en la elipse $r = \frac{12}{3 - \sqrt{2} \cos \alpha}$ los puntos cuyos radios polares son iguales a 6.

Solución:

$$\left(6, \frac{\pi}{4}\right), \left(6, -\frac{\pi}{4}\right)$$

4) Hallar en la hipérbola $\rho = \frac{15}{3 - 4 \cos \alpha}$ los puntos cuyos radios polares son iguales a 3.

Solución:

$$\left(3, 2\frac{\pi}{3}\right), \left(6, -2\frac{\pi}{3}\right).$$

5) Hallar en la parábola $r = \frac{p}{1 - \cos \alpha}$ los puntos :

a) cuyos radios polares sean mínimos.

b) cuyos radios polares sean iguales al parámetro de la parábola.

Solución:

$$\text{a) } \left(\frac{p}{2}, \pi\right), \text{ b) } \left(\frac{\pi}{2}, p\right), \left(p, -\frac{\pi}{2}\right)$$