

Tema 8: Estimación por intervalos de confianza

1. Introducción
2. Definición de intervalo de confianza.
3. Método general para la construcción de intervalos de confianza.
4. Intervalos de confianza en poblaciones normales.
5. Intervalos de confianza para muestras grandes.
6. Selección del tamaño de la muestra
7. Cuadro resumen de los intervalos de confianza.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Introducción

- Una *estimación del parámetro θ* es el valor que toma el estimador ante una realización muestral concreta.
- La *estimación puntual*, generalmente no coincide exactamente con el verdadero valor del parámetro θ .
 - ❑ si el estimador tiene buenas propiedades, se obtendrá un valor muy próximo a θ en la mayoría de las realizaciones muestrales que se obtengan.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Definición de intervalo de confianza

El problema de la estimación radica en estimar θ , dada una variable aleatoria poblacional X , cuya función de distribución depende de θ y dada una muestra aleatoria simple (X_1, X_2, \dots, X_n) . Para ello, dispondremos del mejor estimador posible $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$, que tendrá una determinada distribución muestral. No obstante, ahora ya no nos interesa un valor puntual para θ , sino un intervalo de valores (a, b) en los que, razonablemente, deberá estar θ .

Supongamos que buscamos un intervalo en el que la probabilidad de que θ esté incluido sea el 95%. Para ello, utilizaremos la distribución muestral de $\hat{\theta}$ que me permite elegir tal conjunto, eliminando los casos mas *raros*. Así pues, si elimino la mitad por cada lado, tendremos (suponiendo que $\hat{\theta}$ sigue una distribución normal):

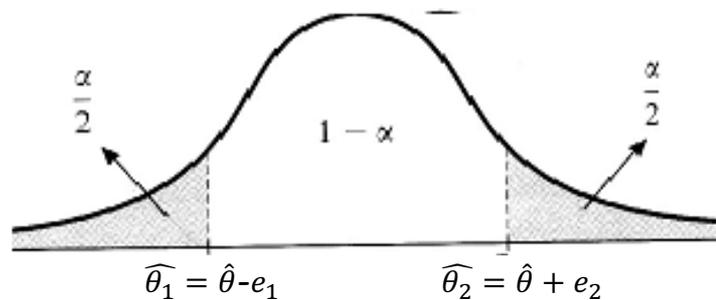
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Definición de intervalo de confianza

En general, para una probabilidad de error α (desechamos el $100\alpha\%$), tendremos



y, por tanto $P[\theta \in (\hat{\theta} - e_1, \hat{\theta} + e_2)] = 1 - \alpha$,

Esta probabilidad se puede calcular gracias a que $\hat{\theta}$ es una variable aleatoria.

Ahora bien, cada realización muestral (x_1, x_2, \dots, x_n) , hace que $\hat{\theta}$ se transforme en una estimación y, por tanto

$$\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) - e_1 = a$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Ejemplo 1:

Supongamos que se busca un intervalo de confianza al 95% para estimar el gasto medio en transporte de las familias de una determinada ciudad. Para ello, se extrae una muestra aleatoria simple de tamaño 100 y, se sabe que la distribución del gasto es $N(\mu, 300)$.

Solución:

Puesto que $\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum_1^n X_i}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, entonces $\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum X_i}{100} \sim N\left(\mu, \frac{300}{\sqrt{100}}\right) \equiv N(\mu, 30)$, o lo que es lo mismo:

$$Z = \frac{\hat{\mu} - \mu}{30} \sim N(0, 1)$$

Buscamos, en las tablas de la $N(0, 1)$, la probabilidad

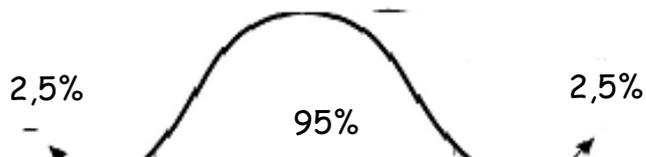
$$P[Z > z_{\alpha/2}] = 1 - P[Z \leq z_{\alpha/2}] = 0,025 \Rightarrow P[Z \leq z_{\alpha/2}] = 0,975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

Por la simetría de la distribución normal $P[Z < -z_{\alpha/2}] = P[Z > z_{\alpha/2}] \Rightarrow -z_{\alpha/2} = -1,96$

$$P\left[-1,96 \leq \frac{\hat{\mu} - \mu}{30} \leq 1,96\right] = 0,95 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P[\hat{\mu} - 58,8 \leq \mu \leq \hat{\mu} + 58,8] = 0,95 \quad (1)$$

y hasta aquí, todo tiene perfecto sentido. Por



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

se obtendrá una estimación de μ

Supongamos que obtenemos una muestra concreta 500, 300, 800, ... y calculamos su media muestral que resulta ser 625.

Entonces diremos que $\hat{\mu} = 625$ es una estimación puntual de la media poblacional.

El intervalo de confianza para μ del 95% obtenido de esa muestra sería: $I_{\mu} = (625 - 58,8 ; 625 + 58,8)$ o sea $I_{\mu} = (566,2 ; 683,8)$, donde la longitud del intervalo es

$$L = 683,8 - 566,2 = 117,6$$

Por tanto, es un intervalo numérico, y sólo pueden ocurrir dos cosas:

$$\mu \in (566,2, 683,8)$$

$$\mu \notin (566,2, 683,8)$$

Por tanto, no se puede decir que la probabilidad $P(566,2 \leq \mu \leq 683,8) = 0,95$

Lo único que se puede hacer es confiar que el intervalo (566,2 ; 683,8) sea uno de los del 95% que contienen al parámetro μ . Solamente podemos hablar de probabilidad antes de tomar la muestra.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

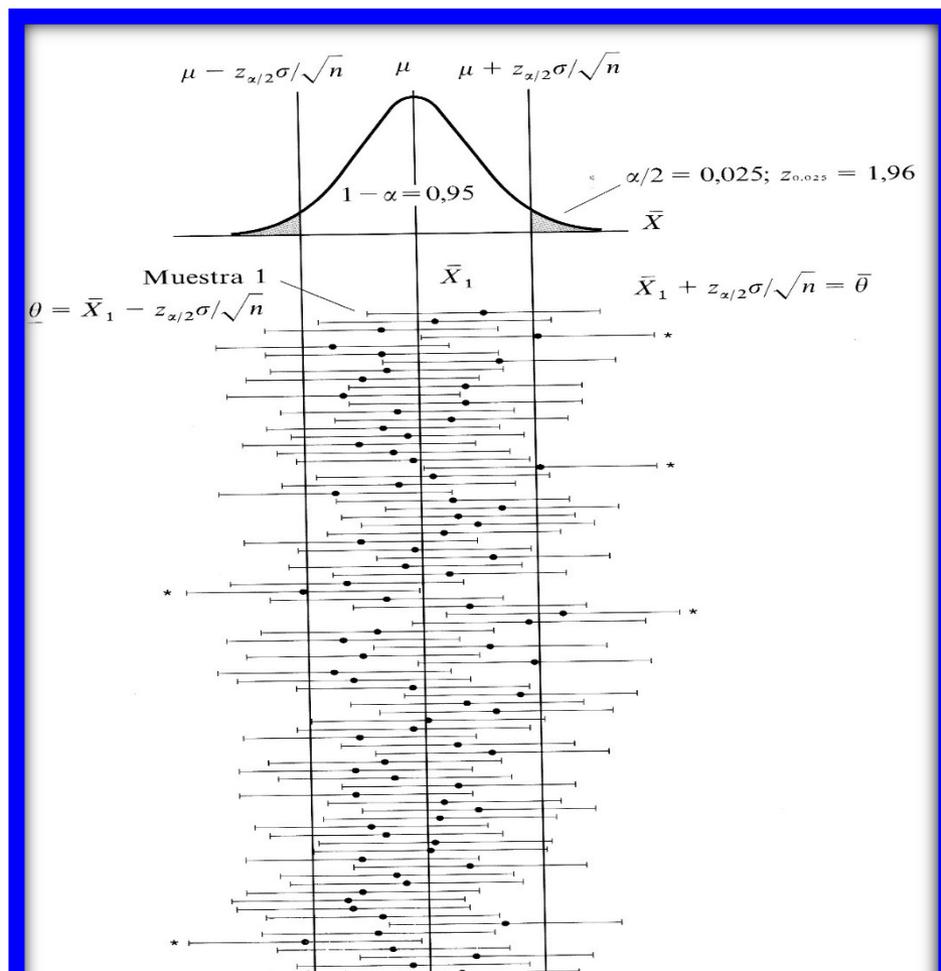
- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

¿Qué está ocurriendo?

- Que para cada muestra en concreto, va a salir un valor distinto de \bar{X} y, por tanto, para cada realización muestral, se va a obtener un intervalo distinto, y por tanto es incorrecto decir que hay una probabilidad del 95% de que el parámetro esté contenido en ese intervalo.
- Que (1) me asegura que sólo el 95% de ellos incluirá el verdadero valor del parámetro (ver gráfico).

En la práctica, sólo dispondremos de una realización y, por tanto, de una estimación. Entonces, ¿cómo sabemos si un intervalo es bueno?. Lo único que



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Ejemplo 2:

Siguiendo con el ejemplo anterior, obtener un intervalo de confianza para la media poblacional, con la misma muestra obtenida antes, pero para una confianza del 99,7%. Determinar el intervalo de confianza que se obtendría si aumentamos el tamaño de la muestra a 625 así como la longitud del intervalo.

Solución:

Para el tamaño muestral $n=100$, tenemos que $\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum X_i}{100} \sim N\left(\mu, \frac{300}{\sqrt{100}}\right) \equiv N(\mu, 30)$, o lo que es lo mismo:

$Z = \frac{\hat{\mu} - \mu}{30} \sim N(0, 1)$, Buscamos en las tablas de la $N(0, 1)$, la probabilidad

$$P[Z > z_{\alpha/2}] = 1 - P[Z \leq z_{\alpha/2}] = 0,0015 \Rightarrow P[Z \leq z_{\alpha/2}] = 0,9985 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,96 \text{ y } -z_{\alpha/2} = -2,96$$

$$P\left[-2,96 \leq \frac{\hat{\mu} - \mu}{30} \leq 2,96\right] = 0,997 \Rightarrow I_{\mu} = (\hat{\mu} - 88,8, \hat{\mu} + 88,8) = (536,2, 713,8) \Rightarrow L = 713,8 - 536,2 = 177,6$$

Supongamos ahora que el tamaño muestral es de $n=625$

$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum X_i}{625} \sim N\left(\mu, \frac{300}{\sqrt{625}}\right) \equiv N(\mu, 12)$, o lo que es lo mismo: $Z = \frac{\hat{\mu} - \mu}{12} \sim N(0, 1)$

Por tanto, si aumentamos el tamaño muestral, disminuye la longitud del intervalo y,

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Por tanto, un intervalo de confianza viene determinado por:

- El estimador del parámetro que se haya escogido.
- El nivel de confianza $1 - \alpha$ (generalmente del 90%, 95% o 99%)
- La amplitud del intervalo o precisión $L = \hat{\mu} + e_2 - (\hat{\mu} - e_1) = e_2 + e_1$.
- Los errores (e_1, e_2)
- El tamaño de la muestra n .

Caminan en direcciones contrarias, lo que obliga a una solución de compromiso

Se verifica que la amplitud del intervalo vendrá determinada por las anteriores características verificándose que, *manteniendo el estimador escogido*:

- ✓ A mayor nivel de confianza, mayor amplitud del intervalo.
- ✓ A mayor tamaño de la muestra, menor amplitud del intervalo.
- ✓ Y si se mantiene constante la amplitud del intervalo, para aumentar la

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

tercero: $(1-\alpha)$, n y L .

Ya hemos visto como la longitud del intervalo depende del nivel de confianza y del tamaño de la muestra, es decir:

$$L = h(\alpha, n).$$

Si fijamos la precisión en un margen deseado y el nivel de confianza, es posible generalmente obtener el tamaño muestral que satisface esos requisitos:

$$n = h(L, \alpha)$$

En los dos ejemplos anteriores. podemos despejar μ porque es el único parámetro desconocido. Si tampoco se conociera σ , entonces el intervalo de confianza I_μ dependería de σ y no podría concretarse. Por tanto, habría que buscar otra distribución muestral que subsanase el problema. Por ello, existe una multiplicidad de casos, que se plasman en la siguiente tabla.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Métodos de Construcción de Intervalos de Confianza

Hay varios métodos para la construcción de intervalos de confianza. Supongamos que X es la variable aleatoria poblacional, y sea $F(x, \theta)$ su función de distribución. En general, hay que realizar los siguientes pasos:

1. Se elige el mejor estimador posible $\hat{\theta}$ del parámetro θ .
2. Se busca una función $h(\hat{\theta})$ del estimador, cuya función de distribución sea conocida y no dependa de θ .
3. Se construye el intervalo de confianza tal que $P(G_{\alpha/2} \leq h(\hat{\theta}) \leq G_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$.
4. Se obtiene el intervalo despejando el parámetro.

A continuación se presentan algunos ejemplos de intervalos de confianza en poblaciones normales

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Ejemplo: Intervalo de confianza para la media con σ conocida

1.- Se elige el mejor estimador de μ que es $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \mapsto N(0,1)$

2.- Nos fijamos en la función $h(\bar{X}) = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \mapsto N(0,1)$ que no depende del

parámetro μ .

3.- Se construye el intervalo $P(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$

4.- Se despeja el parámetro μ y queda: $P(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$

con lo que el intervalo de confianza es $(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ que es el que aparece en el libro de tablas.

Ejemplo:

De una población normal $N(\mu, 6)$ se selecciona una muestra aleatoria cuya media es 25. Obtener un

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

c) Con tamaño de la muestra $n = 16$ y nivel de confianza del 95%.

Intervalos de confianza en poblaciones normales

Población	Parámetros desconocidos	Estimaciones puntuales	Intervalos de confianza
$N(\mu, \sigma)$	μ μ	$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	$\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$ $Z \rightarrow N(0,1) \quad , \quad P[Z > z_{\alpha/2}] = \frac{\alpha}{2}$
$N(\mu, \sigma)$	μ, σ μ	$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ $\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$	<i>n</i> pequeña $\left[\bar{x} - t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$ $t \rightarrow t_{n-1} \quad , \quad P[t_{n-1} > t_{\alpha/2}] = \frac{\alpha}{2}$
Desconocida	μ, σ μ	$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ $\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$	<i>n</i> grande $\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$ $Z \rightarrow N(0, 1) \quad , \quad P[Z > z_{\alpha/2}] = \frac{\alpha}{2}$
$N(\mu, \sigma)$	μ, σ	$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$	<i>n</i> pequeña $\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \right]$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Intervalos de confianza en poblaciones normales

Población	Parámetros desconocidos	Estimaciones puntuales	Intervalos de confianza
$N(\mu_x, \sigma_x)$ $N(\mu_y, \sigma_y)$	μ_x, μ_y $\mu_x - \mu_y$	$\hat{\mu}_x = \bar{x} = \frac{1}{n_x} \sum_{i=1}^{n_x} x_i$ $\hat{\mu}_y = \bar{y} = \frac{1}{n_y} \sum_{i=1}^{n_y} y_i$	$\left[(\bar{x} - \bar{y}) - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}} \leq \mu_x - \mu_y \leq \right.$ $\left. \leq (\bar{x} - \bar{y}) + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}} \right]$ $Z \rightarrow N(0, 1) \quad , \quad P[Z > z_{\alpha/2}] = \frac{\alpha}{2}$
$N(\mu_x, \sigma_x)$ $N(\mu_y, \sigma_y)$	μ_x, μ_y σ_x, σ_y $\sigma_x = \sigma_y$ $\mu_x - \mu_y$	$\hat{\mu}_x = \bar{x} = \frac{1}{n_x} \sum_{i=1}^{n_x} x_i$ $\hat{\mu}_y = \bar{y} = \frac{1}{n_y} \sum_{i=1}^{n_y} y_i$ $\hat{\sigma}_x^2 = s_x^2 = \frac{1}{n_x - 1} \sum_{i=1}^{n_x} (x_i - \bar{x})^2$	n_x, n_y pequeñas $\left[(\bar{x} - \bar{y}) - t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{(n_x - 1)s_x^2 + (n_y - 1)s_y^2}{n_x + n_y - 2}} \sqrt{\frac{n_x + n_y}{n_x n_y}} \leq \mu_x - \mu_y \leq \right.$ $\left. \leq (\bar{x} - \bar{y}) + t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{(n_x - 1)s_x^2 + (n_y - 1)s_y^2}{n_x + n_y - 2}} \sqrt{\frac{n_x + n_y}{n_x n_y}} \right]$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Intervalos de confianza para muestras grandes

Población	Parámetros desconocidos	Estimaciones puntuales	Intervalos de confianza
$N(\mu_x, \sigma_x)$ $N(\mu_y, \sigma_y)$	σ_x, σ_y $\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}$	$\hat{\sigma}_x^2 = s_x^{*2} = \frac{1}{n_x} \sum_{i=1}^{n_x} (x_i - \mu_x)^2$ $\hat{\sigma}_y^2 = s_y^{*2} = \frac{1}{n_y} \sum_{i=1}^{n_y} (y_i - \mu_y)^2$	$\left[\frac{s_x^{*2}}{s_y^{*2}} \cdot \frac{1}{F_{n_x, n_y, 1-\alpha/2}} \leq \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \leq \frac{s_x^{*2}}{s_y^{*2}} \cdot \frac{1}{F_{n_x, n_y, \alpha/2}} \right]$ $F_{n_x, n_y-1, \alpha/2} = \frac{1}{F_{n_y, n_x, 1-\alpha/2}}$
$B(1, p)$	p p	$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{\text{n.º de éxitos en } n \text{ pruebas}}{\text{n.º de pruebas}}$	<p>n pequeño Gráficos: Tabla A.13</p> <p>.....</p> <p>n grande</p> $\left[\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$ $Z \rightarrow N(0, 1) \quad , \quad P[Z > z_{\alpha/2}] = \frac{\alpha}{2}$
$B(1, p_X)$ $B(1, p_Y)$	p_X, p_Y	$\hat{p}_x = \frac{x}{n}$	$\left[(\hat{p}_x - \hat{p}_y) - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)}{n_x} + \frac{\hat{p}_y(1-\hat{p}_y)}{n_y}} \leq p_X - p_Y \leq (\hat{p}_x - \hat{p}_y) + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)}{n_x} + \frac{\hat{p}_y(1-\hat{p}_y)}{n_y}} \right]$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Selección del tamaño muestral

- Caso del intervalo de confianza para la media con σ conocida

$$I_{\mu} = \left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \Rightarrow L = \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 2z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = 2 \frac{z_{\alpha/2} \sigma}{L} \Rightarrow \boxed{n = 4 \frac{(z_{\alpha/2} \sigma)^2}{L^2}}$$

- Caso del intervalo de confianza para la proporción

$$I_p = \left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \right) \Rightarrow L = 2z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \Rightarrow$$

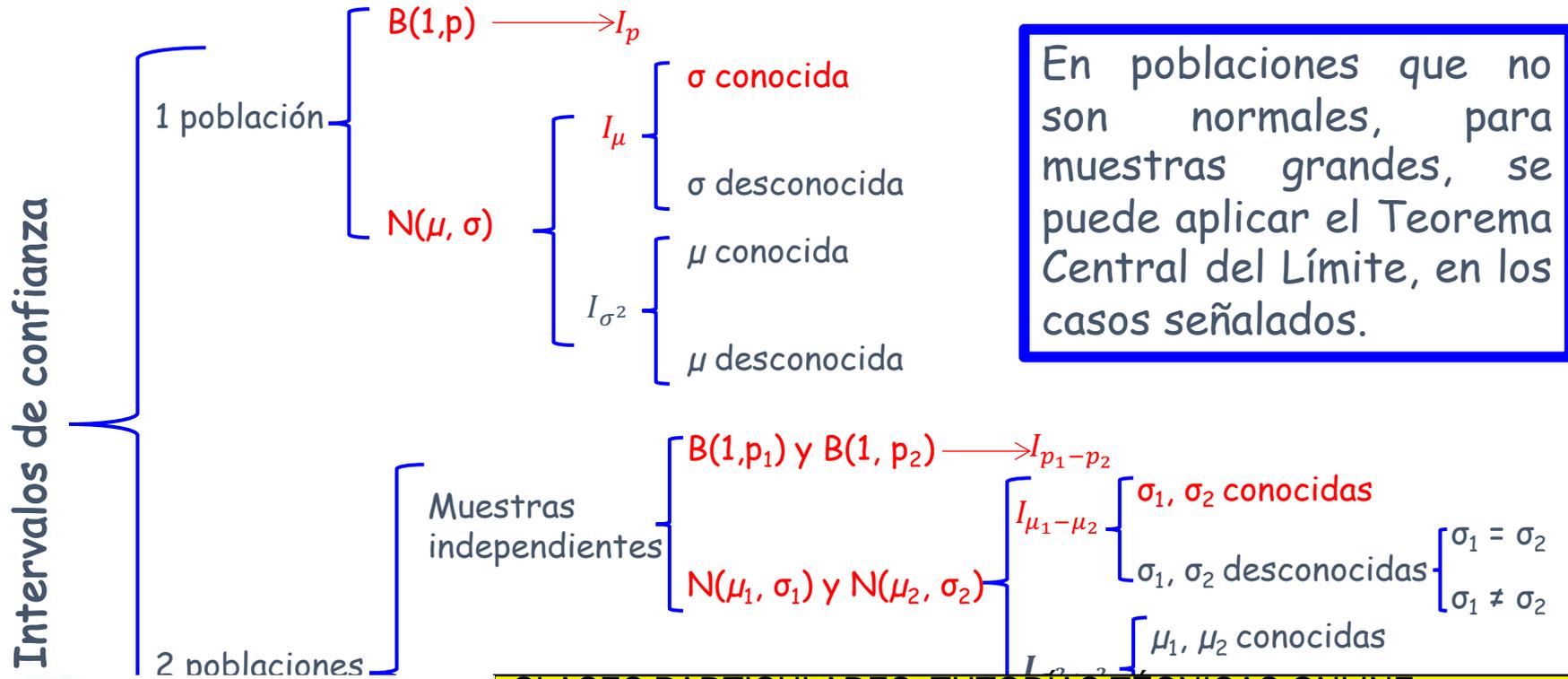
$$\Rightarrow \boxed{n = 4 \frac{(z_{\alpha/2})^2 \hat{p}\hat{q}}{L^2}}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cuadro resumen de Intervalos de Confianza



En poblaciones que no son normales, para muestras grandes, se puede aplicar el Teorema Central del Límite, en los casos señalados.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99