

Teoría de Grupos

Definiciones Básicas

Definición 5 (Grupo) Sea $(A, *)$ una estructura algebraica con una ley de composición interna. Decimos que $(A, *)$ es un **grupo** si:

1. $*$ es asociativa.
2. $*$ tiene neutro $1 \in G$.
3. toda $g \in G$ tiene inverso $g^{-1} \in G$ para $*$.

Con esta definición de grupo, es directo que el neutro es único, al igual que el inverso g^{-1} de $g \in G$.

También se tienen las siguientes propiedades:

1. $(g^{-1})^{-1} = g$.
2. $(g * h)^{-1} = h^{-1} * g^{-1}$.

Un grupo $(G, *)$, donde $*$ es conmutativo, se denomina **Abeliano**.

Ejemplos: Los siguientes son algunos ejemplos de grupos

- $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo abeliano.
- $(\mathbb{Z}_p, +)$ es un grupo abeliano.
- Sea $A = \{\pi : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\} \mid \pi \text{ es función biyectiva}\}$ y se considera la operación $*$: "composición de funciones". Este conjunto

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

*	π_0	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
π_0	π_0	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
π_1	π_1	π_0	π_4	π_5	π_2	π_3
π_2	π_2	π_3	π_0	π_1	π_5	π_4
π_3	π_3	π_2	π_5	π_4	π_0	π_1
π_4	π_4	π_5	π_1	π_0	π_3	π_2
π_5	π_5	π_4	π_3	π_2	π_1	π_0

Con esta operación $(A, *)$ es un grupo, pero no es abeliano.

Definición 6 (Morfismo de grupos) Una función $f: G \rightarrow H$, entre dos grupos $(G, *)$, (H, \diamond) se dice **morfismo (u homomorfismo)** ssi:

$$\forall x, y \in G \quad f(x * y) = f(x) \diamond f(y).$$

Un morfismo inyectivo suele llamarse **monomorfismo**, uno sobreyectivo se llama **epimorfismo**, y finalmente un morfismo biyectivo se llama **isomorfismo**.

$$(G, \cdot) \cong (H, *) \Leftrightarrow G \text{ isomorfo a } H$$

Endomorfismo es un morfismo de un grupo en si mismo; un **automorfismo** es un isomorfismo endomorfo.

Propiedades

Si $f: G \rightarrow H$ es un morfismo de grupos, entonces

1. $f(1) = 1$
2. Si $g \in G$, $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Ejemplos:

- La función logaritmo (en cualquier base), $\log : (\mathbb{R}_+, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$ tiene la conocida propiedad $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$, y como es biyectiva, es un isomorfismo entre (\mathbb{R}_+, \cdot) y $(\mathbb{R}, +)$. Así (\mathbb{R}_+, \cdot) y $(\mathbb{R}, +)$ son estructuras isomorfas.
- Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es un real fijo, la función $f : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$ tal que $f(x) = \alpha \cdot x$ es un homomorfismo, dado que $f(x_1 + x_2) = \alpha \cdot (x_1 + x_2) = \alpha \cdot x_1 + \alpha \cdot x_2 = f(x_1) + f(x_2)$. Si además $\alpha \neq 0$, entonces f es un automorfismo.

Definición 7 (Subgrupo) Si $(G, *)$ es un grupo, y $H \subseteq G$, diremos que H es un subgrupo de G si $(H, *)$ es también un grupo.

Si H es un subgrupo de $(G, *)$, el neutro de $(H, *)$ es el mismo que el de $(G, *)$, y para cada $g \in H$, si $g^{-1} \in G$ es su inverso en $(G, *)$, también g^{-1} es el inverso de g en $(H, *)$ (y por lo tanto $g^{-1} \in H$).

Una caracterización de los subgrupos es la siguiente:

$H \subseteq G$ es subgrupo ssi:

- $H \neq \emptyset$.
- $(\forall x, y \in H) \quad x * y^{-1} \in H$.

Definición 8 Si $(G, *)$ es grupo, una relación de equivalencia \sim en G se dice compatible con $*$ ssi:

$$(\forall x, x', y, y' \in G) \quad x \sim x' \wedge y \sim y' \Rightarrow x * y \sim x' * y'.$$

Dada una relación de equivalencia \sim compatible con $*$, podemos definir una l.c.i. en el

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

La compatibilidad hace que la operación $*$ en G/\sim esté bien definida. Es directo que en este caso $(G/\sim, *)$ resulta ser un grupo, y la sobreyección canónica

$$\begin{aligned} \nu: G &\rightarrow G/\sim \\ x &\rightarrow \nu(x) = [x]. \end{aligned}$$

es un epimorfismo. (Por este motivo ν también recibe el nombre de epimorfismo canónico).

Ahora, si \sim es compatible con $*$, entonces

$$\begin{aligned} x \sim y &\Leftrightarrow 1 = x^{-1} * x \sim x^{-1} * y && \text{(compatibilidad y } \sim\text{-refleja)} \\ &\Leftrightarrow x^{-1} * y \in [1]. \end{aligned}$$

Llamemos $H = [1]$ (subgrupo). Con esto se tiene la siguiente propiedad:

Si $h \in H$ y $x \in G$ es un elemento cualquiera de G , entonces $x * h * x^{-1} \in H$. En efecto:

$$\begin{aligned} h \in H &\Leftrightarrow h \sim 1. \\ &\Rightarrow x * h \sim x * 1 = x && \text{(compatibilidad de } \sim\text{ con } *) \\ &\Rightarrow (x * h) * x^{-1} \sim x * x^{-1} = 1 && \text{(compatibilidad de } \sim\text{ con } *) \\ &\Rightarrow x * h * x^{-1} \in H = [1] && \text{(asociatividad para eliminar paréntesis).} \end{aligned}$$

O sea, $(\forall x \in G) x * H * x^{-1} = \{x * h * x^{-1} \mid h \in H\} \subseteq H$.

Definición 9 (Subgrupo normal) *Un subgrupo H de G tal que satisfice*

$$(\forall x \in G) x * H * x^{-1} \subseteq H.$$

se llama subgrupo normal de G .

Se usará la siguiente notación para designar a los subgrupos normales de G

$$H \triangleleft G \Leftrightarrow$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Entonces

1. \sim_H es de equivalencia en G .
2. \sim_H es compatible con $*$.
3. $[1] = H$.

Notación: Si G es un grupo, y $H \triangleleft G$, el cociente G / \sim_H se anota como G/H .

Ejemplos:

•

Cualquier subgrupo de un grupo Abeliano $(A, *)$ es un subgrupo normal, gracias a la conmutatividad de la operación $*$. En efecto, sea H subgrupo de A . Entonces

$$x * H * x^{-1} = \{x * h * x^{-1} \mid h \in H\} \stackrel{* \text{ conmuta}}{=} \{(x * x^{-1}) * h \mid h \in H\} = H.$$

•

El núcleo de todo morfismo de grupos $f: G \rightarrow H$ es un subgrupo normal de G ; es más, todos los subgrupos normales de G son núcleos de algún morfismo. En efecto

- Si $a \in G$ y $x \in \text{Ker}(f)$ Por lo tanto $a * x * a^{-1} \in \text{Ker}(f) \rightarrow \text{Ker}(f)$ subgrupo normal.
- Si $K \triangleleft G$, tomemos $H = G/K$ y $f = \nu_K: G \rightarrow G/K$ morfismo. Luego

$$\nu_K(x) = 1 \in G/K \Leftrightarrow [x] = [1] = K \Leftrightarrow x \in K.$$

Luego $\text{Ker}(\nu_K) = K$.

Definición 10 (Subgrupo generado por un subconjunto) Sea G un grupo, y $A \subseteq G$ un subconjunto cualquiera. Denotemos

$$\langle A \rangle = \bigcap_{A \subseteq H} H.$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Es también claro que

$$A \subseteq \underbrace{\{a_1^{n_1} \dots a_k^{n_k} \mid k \geq 0, a_1, \dots, a_k \in A; n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}\}}_{\text{es subgrupo}} \subseteq \langle A \rangle.$$

Por lo tanto:

$$\langle A \rangle = \{a_1^{n_1} \dots a_k^{n_k} \mid k \geq 0, a_1, \dots, a_k \in A; n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}\}.$$

Caso interesante

Si $A = \{a\}$ entonces $\langle A \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ y se denomina **subgrupo cíclico generado por a**.

Un grupo G se dice **cíclico** si

$$\exists a \in G \quad \text{tal que} \quad \langle \{a\} \rangle = G.$$

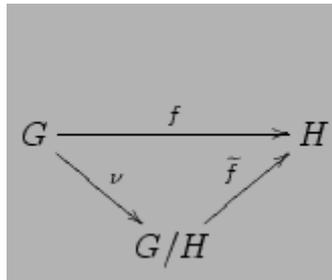
Así $G = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Veremos que los grupos cíclicos son "pocos", y para eso nos ayudaremos del siguiente resultado.

Teorema 1 (Teorema del factor) Si G, H grupos, $f: G \rightarrow H$ morfismo, y $K \triangleleft G$ tal que $K \subseteq \text{Ker}(f)$. Entonces:

$$\exists \tilde{f}: G/K \rightarrow H.$$

morfismo

tal que el diagrama siguiente es conmutativo



Con v el epimorfismo canónico (introducido anteriormente). Es claro que

$$f = \tilde{f} \circ v$$

. Se dice que f se **factoriza** a través de G/K . Además

$$f \text{ es un epimorfismo} \Leftrightarrow \tilde{f} \text{ es un epimorfismo.}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

- Si G es finito $\Rightarrow G \cong (\mathbb{Z}_p, +)$.
Donde $p \geq 1$ (notemos que $p = |G|$).

Figura 0.1

The logo for Cartagena99 features the text "Cartagena99" in a stylized, blue, serif font. The text is set against a light blue background with a white arrow pointing to the right. Below the text is a thick, orange, brush-stroke-like underline.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70