APUNTES DE: CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

1. Vector función de un escalar

Un vector **A** es función del escalar u si lo es alguna de sus componentes:

$$\mathbf{A}(u) = A_x(u)\mathbf{i} + A_y(u)\mathbf{j} + A_z(u)\mathbf{k} \qquad (1)$$

Al dar valores a *u* vamos obteniendo una serie de vectores **A** ; se trata de una aplicación de *R* en R^3 , u $\rightarrow$ **A**(*u*).

Si tomamos todos los vectores con origen en *O*, sus extremos dibujan una curva en el espacio, llamada indicatriz, de ecuaciones paramétricas $A_x = A_x(u)$; $A_y = A_y(u)$; $A_z = A_z(u)$.

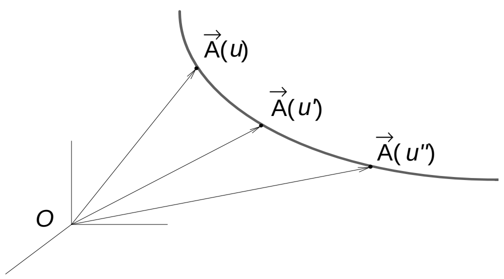


Figura 1

El parámetro *u* representa un escalar cualquiera, pero frecuentemente se tratará del tiempo *t*. Del mismo modo, el vector **A** puede describir muchas magnitudes físicas. Si representa la posición **r** de un punto o partícula, la indicatriz, **r**(*u*), será su trayectoria.

2. Derivada e integral de un vector

Para un valor *u* del escalar el vector **A** viene dado por la ecuación (1). Si se incrementa la variable en un Δu, el vector tomará un valor incrementado,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(u) + \Delta\mathbf{A} &= \mathbf{A}(u + \Delta u) = \\ &= A_x(u + \Delta u)\mathbf{i} + A_y(u + \Delta u)\mathbf{j} + A_z(u + \Delta u)\mathbf{k}\end{aligned} \qquad (2)$$

Restando (1) de (2) tenemos:

$$\Delta A = A(u + \Delta u) - A(u) = \Delta A_x i + \Delta A_y j + \Delta A_z k \quad (3)$$

donde $\Delta A_x = A_x(u + \Delta u) - A_x(u)$ y análogamente para las componentes ΔA_y y ΔA_z.

La derivada de **A** se define como el límite al que tiende el cociente $\Delta\mathbf{A}/\Delta u$ cuando el incremento de la variable se hace cada vez más pequeño; es decir:

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta A_x}{\Delta u}\mathbf{i} + \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta A_y}{\Delta u}\mathbf{j} + \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta A_z}{\Delta u}\mathbf{k} \quad (4)$$

Dicho de otro modo, la derivada de un vector es otro vector cuyas componentes son las derivadas de las componentes del primero:

$$\frac{d\mathbf{A}}{du} = \mathbf{A}' = \frac{d A_x}{du}\mathbf{i} + \frac{d A_y}{du}\mathbf{j} + \frac{d A_z}{du}\mathbf{k} \qquad (5)$$

El vector derivada es tangente a la curva indicatriz, ya que $\Delta\mathbf{A}/\Delta u$ tiene la misma dirección que $\Delta\mathbf{A}$ (*PQ*, en la figura 2); y cuando $\Delta u \rightarrow 0$, los extremos de **A**(*u*) y **A**(u + Δu) se aproximan (*Q* tiende a *P*) y la recta *PQ* tiende a hacerse tangente a la curva en *P*.

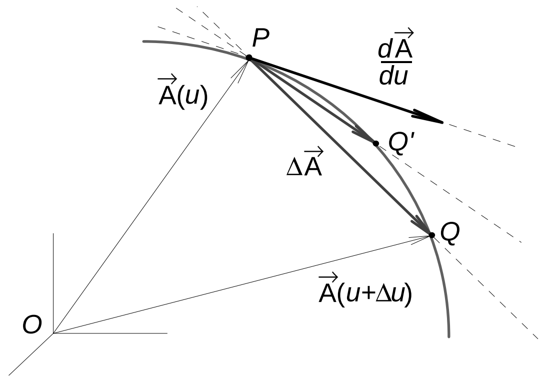


Figura 2

Reglas de derivación

La derivación de vectores tiene propiedades similares a las que cumplen los escalares. Así, si tenemos los vectores **A**(*u*) , **B**(*u*) y la función escalar f(*u*) se verifica:

a) Derivada de la suma de vectores:

$$\frac{d(\mathbf{A} + \mathbf{B})}{du} = \frac{d\mathbf{A}}{du} + \frac{d\mathbf{B}}{du} \qquad (6)$$

b) Derivada del producto por un escalar:

$$\frac{d\,\mathrm{f}(u)\cdot\mathbf{A}(u)}{du}=\frac{d\,\mathrm{f}(u)}{du}\cdot\mathbf{A}(u)+f(u)\cdot\frac{d\mathbf{A}(u)}{du} \qquad (7)$$

c) Derivada de un producto escalar:

$$\frac{d}{du}\left[\mathbf{A}(u)\cdot\mathbf{B}(u)\right]=\frac{d\mathbf{A}(u)}{du}\cdot\mathbf{B}(u)+\frac{d\mathbf{B}(u)}{du}\cdot\mathbf{A}(u) \qquad (8)$$

Ejemplo 1: Demostrar que si un vector función de un escalar tiene módulo constante su derivada es otro vector perpendicular al primero.

Si $\mathbf{A}(u)$ tiene módulo constante,

$$\mathbf{A}(u)\cdot\mathbf{A}(u) = A^2 = cte \qquad (9)$$

Por tanto, la derivada de este producto debe ser cero:

$$\frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{A}+\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{du}=2\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{du}=0 \qquad (10)$$

Como $\mathbf{A} \neq 0$ y $d\mathbf{A}/du \neq 0$ el producto escalar de los dos vectores sólo puede ser nulo si son perpendiculares:

$$\left|\mathbf{A}\right| = cte \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} \perp \frac{d\mathbf{A}}{du} \qquad (11)$$

d) Derivada de un producto vectorial:

$$\frac{d}{du}\left[\mathbf{A}(u)\times\mathbf{B}(u)\right]=\frac{d\mathbf{A}(u)}{du}\times\mathbf{B}(u)+\mathbf{A}(u)\times\frac{d\mathbf{B}(u)}{du} \qquad (12)$$

Como operación inversa de la derivación, se define la integral de un vector $\mathbf{A}(u) = A_x(u)\mathbf{i} + A_y(u)\mathbf{j} + A_z(u)\mathbf{k}$ como otro vector cuyas componentes son las integrales de las componentes del primero:

$$\int\mathbf{A}(u)du=\mathbf{i}\int A_x(u)du+\mathbf{j}\int A_y(u)du+\mathbf{k}\int A_z(u)du \qquad (13)$$

3. Campos escalares.

Una función escalar ϕ que toma valores en los puntos del espacio se dice que es una función escalar de punto; o más simplemente, un *campo escalar*.

A cada punto $P \equiv (x , y , z)$, la función ϕ le hace corresponder un número $\phi(x , y , z)$; es una aplicación de R^3 en R. Aunque no es necesario que ϕ esté expresada en función de las coordenadas cartesianas, será lo más habitual.

El conjunto de todos los puntos del espacio donde el campo toma un determinado valor ϕ_o forman una *superficie equiescalar*, cuya ecuación será:

$$\phi(x , y , z) = \phi_o \qquad (14)$$

Las superficies equiescalares pueden representar puntos que tienen la misma temperatura (isotermas), el mismo potencial (equipotenciales) o cualquier otra magnitud escalar.

Si el campo está definido en un plano las equiescalares serán líneas en vez de superficies. Un ejemplo lo tenemos en las curvas de nivel de un mapa topográfico. En este caso, la función es la altura H de cada punto P del plano de coordenadas (x , y): $H = \mathrm{f}(x , y)$.

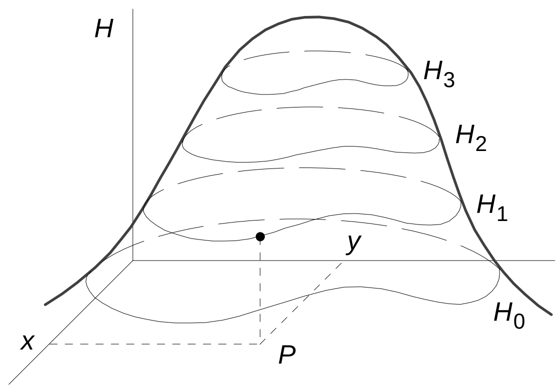


Figura 3

Los puntos que tienen la misma altura (H_1, por ejemplo) forman una línea equiescalar de ecuación $\mathrm{f}(x , y) = H_1$. Proyectando determinadas líneas o curvas de nivel sobre el plano resulta el mapa topográfico (figura 5).

En las funciones de una sola variable, $y = \mathrm{f}(x)$, la derivada se define como el limite al que tiende el cociente de incrementos $\Delta y/\Delta x$ cuando $\Delta x \to 0$.

Pero un campo escalar $\phi(x , y , z)$ tendrá distintas derivadas ya que, en general, el incremento de la función no será el mismo cuando se incremente una u otra variable. Así, definimos el incremento según el eje Ox como

$$\Delta\phi_x = \phi(x+\Delta x,y,z)-\phi(x,y,z) \qquad (15)$$

Y la *derivada parcial* de ϕ respecto a la variable x , $\partial\phi/\partial x$, será el límite:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\phi_x}{\Delta x}=\left.\frac{d\phi}{dx}\right]_{y,z=cte} \qquad (16)$$

Es decir, se trata de la derivada que resulta de suponer que las coordenadas *y* , *z* permanecen constantes y solamente varía la *x*.

De manera análoga se definen las derivadas parciales respecto de las otras variables:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta \phi_y}{\Delta y} \quad ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta \phi_z}{\Delta z} \qquad (17)$$

Los incrementos $\Delta\phi_y$ y $\Delta\phi_z$ son los que tienen lugar según el eje *Oy* (*x* , *z* constantes) y según el eje *Oz* (*x* , *y* constantes), respectivamente.

Las reglas para la derivación parcial son las mismas que rigen en las funciones de una variable. Simplemente, hay que considerar la variable que se deriva y tratar como constantes las otras.

4. El vector gradiente

Supongamos que interesa saber cómo varía el campo ϕ al pasar de un punto *P* de vector de posición $\mathbf{r} \equiv (x , y , z)$ a otro muy próximo, mediante un desplazamiento diferencial cualquiera $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$. Dicho cambio se puede calcular como suma de los que se producen en los desplazamientos *dx* , *dy* , *dz* en que se puede descomponer $d\mathbf{r}$ según los ejes cartesianos : $d\phi = d\phi_x + d\phi_y + d\phi_z$.

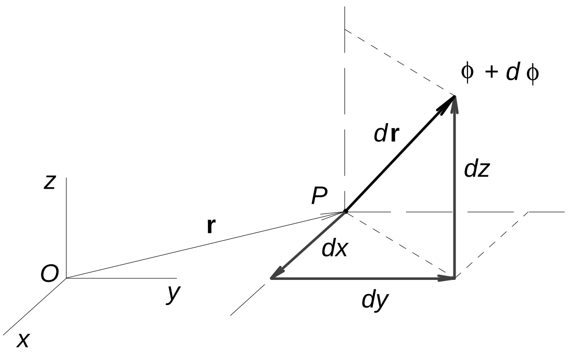


Figura 4

De la definición de derivada parcial se deduce que $d\phi_x = (\partial\phi/\partial x)dx$; $d\phi_y = (\partial\phi/\partial y)dy$; $d\phi_z = (\partial\phi/\partial z)dz$; por tanto:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot dz \qquad (18)$$

Definiremos el gradiente de ϕ (escrito grad ϕ o $\nabla\phi$) como un vector que tiene por componentes cartesianas las derivadas parciales del campo respecto a *x* , *y* , *z* :

$$\text{grad}\phi = \nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\mathbf{k} \qquad (19)$$

Ahora, de acuerdo con la ecuación 18, $d\phi$ se puede expresar como el producto escalar del gradiente por el desplazamiento $d\mathbf{r}$:

$$d\phi = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = |\nabla\phi||d\mathbf{r}|\cos\alpha \qquad (20)$$

donde α es el ángulo que forma el vector gradiente con $d\mathbf{r}$.

En resumen, al desplazarnos una distancia $ds = |d\mathbf{r}|$ en una dirección cualquiera, el campo experimenta la variación expresada por la ecuación 20. El cambio por unidad de longitud recorrida es *la derivada direccional* de ϕ :

$$\frac{d\phi}{ds} = |\nabla\phi|\cos\alpha = \nabla\phi \cdot \mathbf{u}_r \qquad (21)$$

Así pues, la derivada de ϕ en la dirección definida por el vector unitario $\mathbf{u}_r$ es igual a la proyección del gradiente sobre esa dirección.

Las derivadas parciales son casos particulares de este resultado, como se ve al sustituir $\mathbf{u}_r$ por los vectores unitarios **i** , **j** , **k**.

Si el desplazamiento se realiza en la dirección del gradiente, $\cos\alpha = 1$ y entonces

$$d\mathbf{r} \parallel \nabla\phi \quad \to \quad \frac{d\phi}{ds} = |\nabla\phi| \qquad (22)$$

Es decir, la variación del campo es máxima en la dirección del gradiente e igual a su módulo. Por otra parte, si $d\mathbf{r}$ es perpendicular a $\nabla\phi$, $\cos\alpha = 0$ y

$$d\mathbf{r} \perp \nabla\phi \quad \to \quad \frac{d\phi}{ds} = 0 \quad \to \quad \phi = cte \qquad (23)$$

Se deduce de aquí que el gradiente en un punto del campo es perpendicular a la equiescalar que pasa por dicho punto.

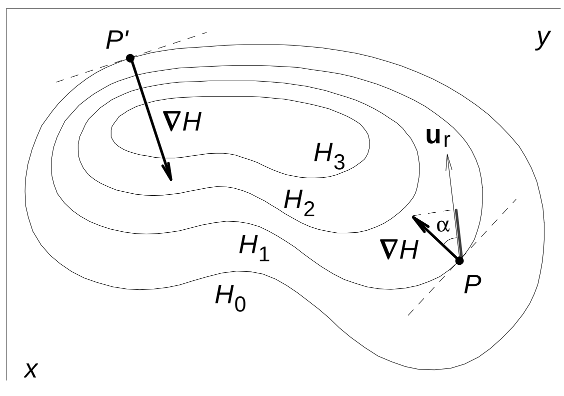


Figura 5

Volvamos al ejemplo del mapa topográfico, donde las equiescalares son curvas de nivel que unen puntos de igual altitud. El gradiente de H en un punto P cualquiera representa en módulo y dirección la pendiente máxima del terreno. Como se ve en la figura 5, esa dirección en que la altura aumenta más deprisa es perpendicular a la curva de nivel que pasa por P. El gradiente es mayor donde las líneas equiescalares están más juntas (como ocurre en P'), ya que entonces el mismo aumento de altura se produce en un espacio más pequeño. Por otra parte, el valor de la pendiente en otras direcciones se puede deducir proyectando ∇H sobre ellas.

Ejemplo 2: Sea $V = 2x^2 + y^2$ un campo escalar definido en el plano XY. Calcular la dirección en torno al punto (1 , 1) en que el cambio de V es máximo. Calcular también la derivada en la dirección (1 , 2).

La máxima variación de V se produce en la dirección de su gradiente,

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} = 4x\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} \qquad (24)$$

que en el punto (1 , 1) vale $\nabla V(1,1) = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

La derivada en la dirección (1 , 2) es la proyección del gradiente. Para calcularla, multiplicamos escalarmente ∇V por el vector unitario en dicha dirección:

$$\left.\frac{dV}{ds}\right]_{(1,2)} = \nabla V \cdot \mathbf{u}_r = (4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \cdot \frac{(1\mathbf{i} + 2\mathbf{j})}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

5. Campos vectoriales

Una magnitud vectorial $\mathbf{A}$ que tiene un valor definido en cada punto P del espacio se dice que es un *campo vectorial*. Se trata, por tanto, de una función vectorial cuyas componentes dependen de las coordenadas de P:

$$P(x,y,z) \;\rightarrow\; \mathbf{A}(x,y,z) = \mathrm{A_x}\mathbf{i} + \mathrm{A_y}\mathbf{j} + \mathrm{A_z}\mathbf{k} \qquad (25)$$

Para representar un campo vectorial se suele utilizar las *líneas de campo*. Una línea de campo se construye de forma que en todos sus puntos el vector de campo sea tangente a la línea. Si la magnitud definida por $\mathbf{A}$ es una fuerza decimos que es un *campo de fuerzas* y que se representa mediante *líneas de fuerza*.

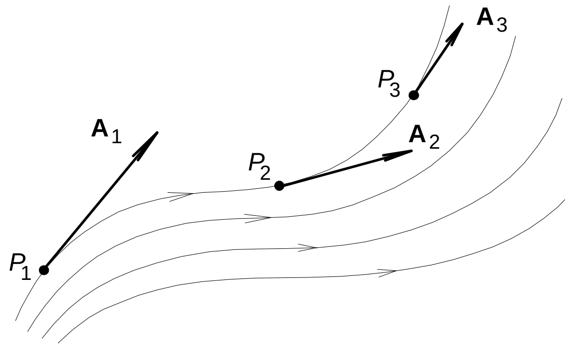


Figura 6

Las líneas indican la dirección del campo en cada punto. Su intensidad la representa el número de líneas por unidad de superficie transversal que hay en el entorno de cada punto. Así, en P_1 el campo es más intenso que en P_3 ya que las líneas están más apretadas en el primer punto (figura 6).

Dos líneas de campo nunca se pueden cruzar porque en el punto de corte habría dos tangentes y entonces el campo tendría dos valores distintos. No obstante, pueden existir puntos de donde divergen las líneas de campo (*fuentes*) o en los que convergen (*sumideros*). En dichos puntos el campo no está definido; existe en ellos una singularidad.

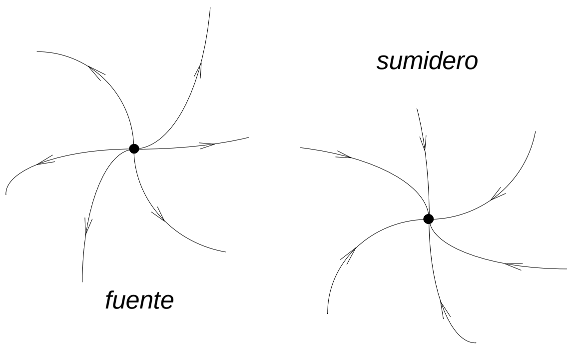


Figura 7

Para calcular la ecuación de una línea de campo sólo hay que tener en cuenta que, en cada punto, el vector $\mathbf{A}$ debe ser colineal con el elemento de línea $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$. Por tanto, sus componentes son proporcionales:

$$\frac{dx}{\mathrm{A_x}} = \frac{dy}{\mathrm{A_y}} = \frac{dz}{\mathrm{A_z}} \qquad (26)$$

Integrando estas dos igualdades se obtienen las ecuaciones de dos superficies cuyo corte define la línea. Si el campo está limitado a un plano el problema se reduce a una sola integración.

Ejemplo 3: Consideremos un campo vectorial definido en el plano *XY* por la igualdad **A** = *y* **i** - *x* **j** . Calcular la ecuación de la línea de campo que pasa por un punto de coordenadas (x_0 , y_0).

Aplicando la ecuación (26) a las componentes del campo ($A_x = y$; $A_y = -x$) :

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \quad \rightarrow \quad ydy = -xdx \quad \rightarrow \quad xdx + ydy = 0$$

Integrando:

$$\int (xdx + ydy) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C' \rightarrow x^2 + y^2 = C$$

Esta es la ecuación de una circunferencia con centro en el origen. El valor de la constante de integración $C = r^2$ depende del punto por el que debe pasar la línea de campo:

$$x_0^2 + y_0^2 = C = r^2 \rightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

6. Integral curvilínea de un vector

Sea **r**(*u*) = *x*(*u*)**i** + *y*(*u*)**j** + *z*(*u*)**k** la ecuación de una curva *C* que pasa por los puntos P_1 y P_2 correspondientes a los valores u_1 y u_2 del parámetro. Sea **A** un campo vectorial:

$$A = A_x(x,y,z)i + A_y(x,y,z)j + A_z(x,y,z)k \quad (27)$$

Consideremos *C* dividida en segmentos infinitesimales *d***r**. Si **A** está definido en todos los puntos de la curva entre P_1 y P_2, multiplicaremos escalarmente cada elemento *d***r** por el valor del campo en ese lugar. La suma de todos los productos se llama *integral curvilínea* del campo a lo largo de *C* :

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C A\left|d\mathbf{r}\right|\cos\alpha = \int_C A_{\parallel} ds \qquad (28)$$

Dicho en otras palabras, es la integral de la componente de **A** tangente a la línea con respecto a la longitud de arco (figura 8).

El significado de esta integral depende de lo que represente el campo. Por ejemplo, si **A** es una fuerza, $\int F_{\parallel} ds$ será el trabajo de **F** a lo largo de la trayectoria.

Cuando la curva es cerrada, la integral curvilínea o circulación se escribe:

$$\oint_C A \cdot d\mathbf{r} \qquad (29)$$

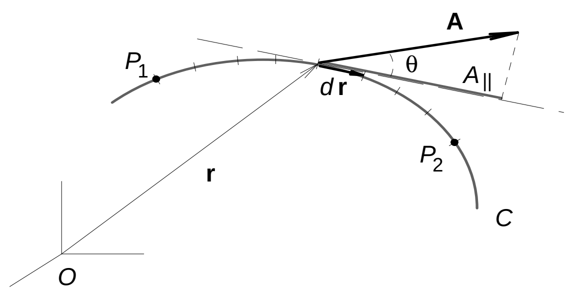


Figura 8

Dada la curva *C* en función del parámetro u, para obtener $\int \mathbf{A} d\mathbf{r}$ se procede como sigue. Calculamos primero *d***r** :

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(u)du = [x'(u)\mathbf{i} + y'(u)\mathbf{j} + z'(u)\mathbf{k}]du \quad (30)$$

Después se particulariza **A**(*x*,*y*,*z*) para los puntos de *C* sustituyendo *x* = *x*(*u*) ; *y* = *y*(*u*) ; *z* = *z*(*u*) :

$$\mathbf{A}(C) = A_x(u)\mathbf{i} + A_y(u)\mathbf{j} + A_z(u)\mathbf{k} \qquad (31)$$

Por último, se hace el producto escalar **A**·*d***r** y se integra respecto de *u* :

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{u_1}^{u_2} \left[A_x\, x'(u) + A_y\, y'(u) + A_z\, z'(u)\right] du \quad (32)$$

Si la curva no está en forma paramétrica hay que transformarla previamente. Puede utilizarse una de las coordenadas *x* , *y* , *z* como parámetro o cualquier otro.

Ejemplo 4: Sea el campo **A** = *y* **i** - *x* **j** del ejemplo anterior. Calcular su integral curvilínea a lo largo de la circunferencia con centro en el origen $x^2 + y^2 = 4$, entre los puntos P_1 = (0 , 2) y P_2 = (2 , 0).

En el ejemplo 2 del tema anterior se parametrizó la ecuación de esta circunferencia haciendo *x* = 2senθ ; *y* = 2cosθ. El punto P_1 corresponde al valor del parámetro θ = 0 y P_2 a θ = π/2. Sustituyendo *x*(θ) e *y*(θ) en **A** resulta:

$$\mathbf{A}(\theta) = 2\cos\theta\ \mathbf{i} - 2\mathrm{sen}\theta\ \mathbf{j}$$

Por otra parte, el elemento de trayectoria vale:

$d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} = 2\cos\theta\,d\theta\,\mathbf{i} - 2\,\mathrm{sen}\theta\,d\theta\,\mathbf{j}$

Por último, se multiplica escalarmente $\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ y se integra respecto a θ entre 0 y $\pi/2$:

$$\int_0^{\pi/2}\left(4\cos^2\theta + 4\,\mathrm{sen}^2\theta\right)d\theta = 4\int_0^{\pi/2} d\theta = 4\theta\Big]_0^{\pi/2} = 2\pi$$

7. Campos conservativos y potencial

Sea **A** un campo vectorial definido en cierta región del espacio y P_i , P_f dos puntos cualesquiera de dicha región unidos por una curva *C*. Se dice que **A** es *conservativo* si:

$$\int_{P_i}^{P_f}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = f(r_i, r_f) \quad , \quad cte\ \forall C \qquad (33)$$

Es decir, la integral curvilínea es la misma para todas las trayectorias que van de P_i a P_f : no depende del camino, sino de los extremos de éste.

Se puede demostrar que si un campo es conservativo la circulación vale cero para cualquier curva cerrada:

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 0 \quad , \quad \forall C \qquad (34)$$

La recíproca también es cierta, por lo que se trata de definiciones equivalentes, como veremos en el tema 5 con más detalle.

Una condición necesaria y suficiente para que **A** sea conservativo es que exista una función escalar de la posición, ϕ , tal que su gradiente sea igual al campo vectorial:

$$\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{A} = \nabla\phi(r) \qquad (35)$$

Para demostrarlo, supongamos primero que $\mathbf{A} = \nabla\phi$. Recordando que, según la ecuación (20), $\nabla\phi\cdot d\mathbf{r} = d\phi$, la integral curvilínea de **A** entre los puntos P_i y P_f será:

$$\int_{P_i}^{P_f}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{r_i}^{r_f} d\phi = \phi\Big]_{r_i}^{r_f} = \phi(r_f) - \phi(r_i) \qquad (36)$$

Por lo tanto, sólo depende de los extremos de la trayectoria.

Inversamente, si la integral de $\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ entre un punto fijo P_0 y otro cualquiera $P(x,y,z)$ no depende del camino, debe ser una función ϕ de las coordenadas *x* , *y* , *z* :

$$\int_{x_0,y_0,z_0}^{x,y,z}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \phi(x,y,z) \qquad (37)$$

En particular, para dos puntos infinitamente próximos se cumple que $\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = d\phi$, de modo que:

$$\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = d\phi = \nabla\phi\cdot d\mathbf{r} \;\; , \;\; \forall d\mathbf{r} \;\;\Rightarrow\;\; \mathbf{A} = \nabla\phi \qquad (38)$$

Se dice que ϕ es un *potencial* de **A** o que **A** deriva de un potencial escalar cuando el campo es conservativo. Es interesante resaltar que si ϕ es un potencial escalar de **A**, también lo será la función $\phi + C$, donde *C* es cualquier constante, puesto que $\nabla(\phi + C) = \nabla\phi$.

Ejemplo 5: Calcular el potencial escalar del que deriva el campo $\mathbf{A} = -x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j}$, de forma que su valor sea cero en el origen de coordenadas.

El potencial escalar será $\phi = \int d\phi$. Pero, de acuerdo con la ecuación (20), $d\phi = \nabla\phi\cdot d\mathbf{r}$; y como $\nabla\phi = \mathbf{A}$, debemos calcular $\int\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$.

El producto escalar del campo por el elemento de trayectoria es:

$$\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = (-x\mathbf{i} - y\,\mathbf{j})\cdot(dx\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) = -x\,dx - y\,dy$$

Integrando esta expresión:

$$\phi(x,y,z) = -\int x\,dx - \int y\,dy = -\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + C$$

La constante de integración se determina con la condición de que el potencial sea nulo en el origen: $\phi(0,0,0) = 0$. Esto se verifica si $C = 0$, por lo que el resultado será:

$$\phi(x,y,z) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \qquad (39)$$

Por último, como un gradiente siempre es perpendicular en cada punto a la equiescalar que pasa por él, se deduce que las líneas de un campo conservativo tienen que cruzarse perpendicularmente con las equiescalares de su potencial, que en este caso reciben el nombre de *equipotenciales*.

8. Flujo de un campo vectorial

Sea *S* una superficie y **N** el vector unitario perpendicular a ella en uno de sus puntos. El sentido de **N** indica la cara de *S* que consideramos positiva. Si la superficie es cerrada se toma como positivo el sentido *hacia fuera*.

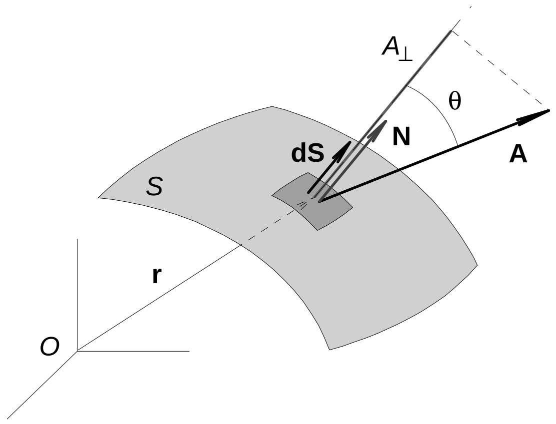


Figura 9

Un elemento infinitesimal de superficie, dS, se puede representar vectorialmente ya que, además de *extensión*, tiene una determinada *orientación*. Así pues, definimos el vector **dS** de forma que su módulo sea igual al área del elemento de superficie y que tenga la dirección y sentido de **N** :

$$|\mathbf{dS}| = dS \quad ; \quad \mathbf{dS} = dS \cdot \mathbf{N} \qquad (40)$$

El flujo de un campo vectorial **A** a través del elemento de superficie es el producto escalar:

$$d\Phi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{dS} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{N} \cdot dS = A\,dS\cos\theta = A_\perp dS \quad (41)$$

Como al multiplicar escalarmente **A·N** se obtiene la componente de **A** perpendicular a la superficie, $A_\perp$, el cálculo del flujo supone eliminar la parte tangencial. Por tanto, la operación estará indicada cuando sepamos que esta componente no tiene ningún efecto.

Para calcular el flujo a través de toda la superficie se suman los $d\Phi$ correspondientes a todos los elementos en que se divide S:

$$\Phi = \iint_S d\Phi = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{dS} = \iint_S A_\perp dS \qquad (42)$$

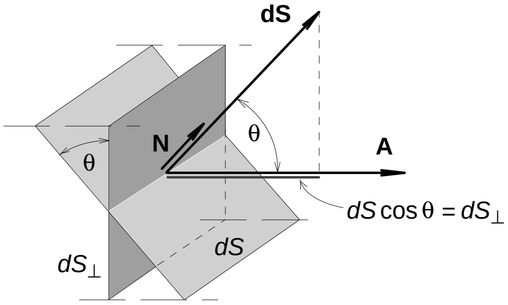


Figura 10

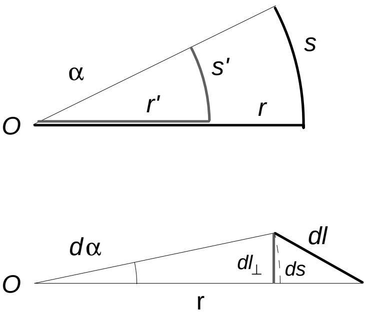
Otra forma de ver el producto escalar **A·dS** es como producto de A por la proyección de dS en el plano perpendicular al campo, lo que equivale a considerar la "superficie efectiva" que se ve en la dirección de **A** (figura 10):

$$dS_\perp = dS\cos\theta \quad \rightarrow \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{dS} = A\,dS_\perp \qquad (43)$$

Ángulo sólido

Un caso en que es necesario proyectar dS en el plano perpendicular a una dirección dada es al calcular el ángulo sólido que subtiende la superficie.

El ángulo sólido, se define de forma similar al ángulo plano formado por dos rectas que se cortan, que es la relación entre la longitud del arco y su radio:



$$\alpha\,(\text{rad}) = \frac{s}{r} = \frac{s'}{r'}$$

$$d\alpha = \frac{ds}{r} = \frac{dl_\perp}{r}$$

Figura 11

Si tenemos un segmento dl, el ángulo $d\alpha$ subtendido desde O es $dl_\perp$/r , ya que ds y $dl_\perp$ son infinitésimos equivalentes (el arco y la cuerda coinciden en el límite, cuando $\alpha \to 0$).

Análogamente, una superficie genéricamente cónica con vértice en O delimita una región del espacio cuya amplitud se puede definir trazando una esfera de radio cualquiera con centro en O. La razón constante entre el área de la intersección y el cuadrado del radio es su *ángulo sólido*, que se expresa en estereoradianes (srad):

$$\Omega = \frac{S}{r^2} = \frac{S'}{r'^2} \;\; srad \qquad (44)$$

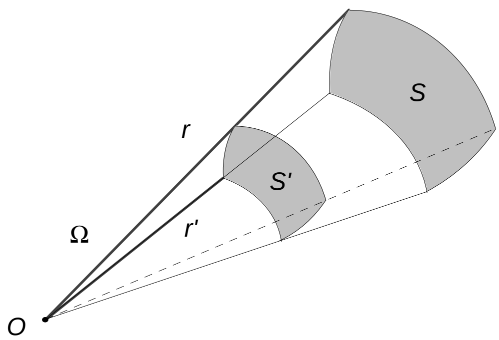


Figura 12

Según la definición, una superficie cerrada, desde un punto de su interior, subtiende el ángulo sólido $\Omega_T = 4\pi r^2/r^2 = 4\pi$ srad.

Para calcular el ángulo subtendido por un elemento de superficie dS habrá que calcular su proyección sobre el plano perpendicular al radio que la une con O :

$$d\Omega = \frac{dS_\perp}{r^2} = \frac{dS\cos\theta}{r^2} = \frac{\mathbf{u_r}\cdot\mathbf{dS}}{r^2} \qquad (45)$$

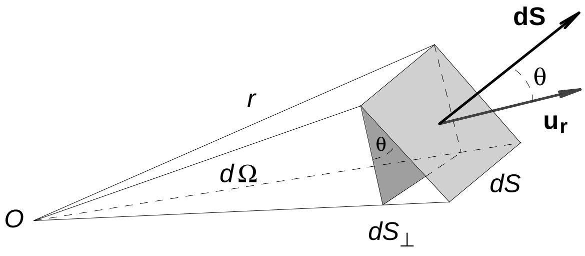


Figura 13

Si la superficie no es infinitesimal sino extensa, el ángulo sólido total se obtiene integrando $d\Omega$ para todos los elementos dS:

$$\Omega = \iint_S d\Omega = \iint_S \frac{\mathbf{u_r}\cdot\mathbf{dS}}{r^2} = \iint_S \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{dS}}{r^3} \qquad (46)$$

En el cálculo del flujo de un vector, un paso previo suele ser expresar **dS** en función de las coordenadas adecuadas. Debemos imaginar la superficie "troceada" en porciones infinitesimales y después, integrar **A·dS** respecto de cada variable.

Ejemplo 6: Calcular el flujo del campo vectorial $\mathbf{A} = 2z\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$ a través de un trozo del plano de ecuación $y + 2z = 4$ limitado por los planos $x = 0$; $x = 3$; $z = 0$; $y = 0$.

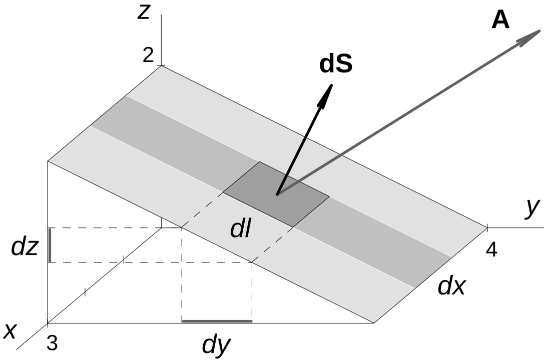


Figura 14

El trozo de plano definido en el enunciado es el rectángulo sombreado de la figura. Lo dividimos en pequeños trozos de lados dx y dl, cuyo area será:

$$dS = dx\cdot dl = dx\sqrt{dy^2 + dz^2}$$

Pero dy y dz no son independientes, ya que dl debe estar contenido en el plano. Diferenciando su ecuación,

$$z = \tfrac{1}{2}(4 - y) \rightarrow dz = -\tfrac{1}{2}dy$$

y sustituyendo en dS:

$$dS = dx\sqrt{dy^2(1+\tfrac{1}{4})} = \frac{\sqrt{5}}{2}dx\,dy$$

Ahora bien, el vector $\mathbf{dS} = \mathbf{N}\,dS$ debe ser perpendicular al plano. Una forma de obtener **N** es calcular el gradiente del campo escalar $\phi = y + 2z$, cuyas superficies equiescalares, $\phi = cte$, son planos paralelos al del problema (que es $\phi = 4$):

$$\nabla\phi = \frac{\partial(y+2z)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial(y+2z)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial(y+2z)}{\partial z}\mathbf{k} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Para que este vector sea unitario basta dividirlo por su módulo:

$$\mathbf{N} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \frac{(\mathbf{j}+2\mathbf{k})}{\sqrt{5}} \;;\; \mathbf{dS} = \mathbf{N}dS = \frac{(\mathbf{j}+2\mathbf{k})}{2}dxdy$$

Calculamos ahora el flujo $d\Phi$ que atraviesa el elemento de superficie:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{dS} = (2z\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + y\mathbf{k})\cdot\frac{(\mathbf{j}+2\mathbf{k})}{2}dxdy = (y-1)dxdy$$

Por último, integraremos a toda la superficie. Primero con x = cte, haciendo variar la y entre 0 y 4: así resulta el flujo a través de una "tira" de anchura dx. Después sumamos las contribuciones de todas las "tiras" que forman el rectángulo, desde $x = 0$ hasta $x = 3$:

$$\Phi = \iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{dS} = \int_0^3\left[\int_0^4 (y-1)dy\right]dx =$$

$$= \int_0^3 \left(\tfrac{1}{2}y^2 - y\right)\Big]_0^4 dx = \int_0^3 4dx = 4x\Big]_0^3 = 12$$

9. Integral de volumen de un campo

Consideremos una superficie cerrada S que encierra el volumen V y sea $\phi(x,y,z)$ un campo escalar definido en todo V. Si dividimos este volumen en pequeños elementos $\Delta\mathrm{V}_i$, a cada uno de ellos le podemos asignar un valor del campo, $\phi(r_i)$, correspondiente a las coordenadas (x_i, y_i, z_i) del punto que sirve para posicionar ΔV_i.

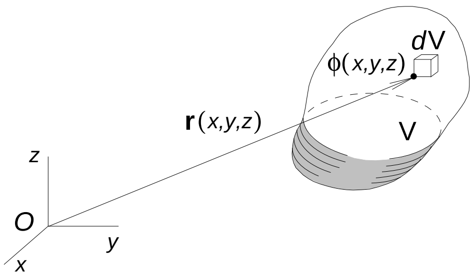


Figura 15

La suma de todos productos $\phi(r_i)\Delta V_i$ es función del tamaño y forma de los elementos de volumen. Sin embargo, tiende a un valor único cuando hacemos los ΔV_i más y más pequeños. Por definición, este límite es la *integral de volumen* del campo $\phi(r)$:

$$\iiint_V \phi(r)dV = \lim_{\Delta V \to 0} \Sigma\Sigma\Sigma \phi(r_i)\Delta V_i \qquad (47)$$

El sumatorio triple indica que hay tres variables de posición, x , y , z u otras, que van tomando valores según se recorre el volumen.

Para calcular la integral de volumen es preciso escribir dV en función de las coordenadas más adecuadas al problema e integrar sucesivamente respecto de cada variable, supuesto que las otras se mantienen constantes.

El significado físico de la integral de volumen depende de lo que represente ϕ. Si, por ejemplo, ϕ es una densidad $\rho(x,y,z)$, el producto ρdV será la masa dm contenida en el elemento de volumen; y su integral, la masa total del cuerpo V.

Cuando el cuerpo tenga forma laminar el problema podrá reducirse a dos dimensiones y la integral de volumen quedará en una de superficie. Por ejemplo, si conocemos la densidad superficial $\sigma(x,y)$ kg/m^2 de un cuerpo plano su masa total será m = $\iint\sigma(x,y)dS$.

Ejemplo 7: Una lámina rectangular de lados L_x = 3 m, L_y = 2 m está situada con un vértice en el origen y orientada según los ejes x e y. Su densidad superficial es función de la posición, $\sigma(x,y) = 2x^2y + 1$ kg/m^2. Calcular su masa.

Por la forma del cuerpo, lo más adecuado es dividir su superficie en cuadrados de lados dx , dy . De esta forma, $dS = dx \cdot dy$.

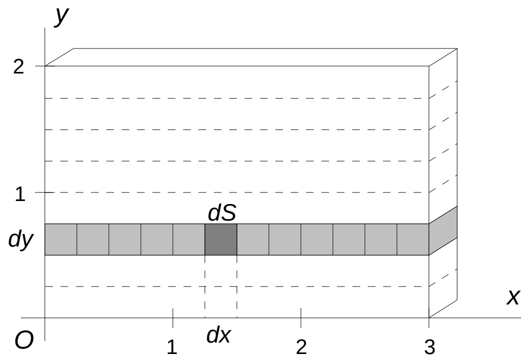


Figura 16

Cada elemento de superficie tiene una masa $dm = \sigma(x,y)dS = (2x^2y + 1)dxdy$. Integrando para x entre x = 0 y x = 3 , con y constante, se obtiene la masa de una tira horizontal de anchura dy. La segunda integración, haciendo variar y entre 0 y 2, suma todas las tiras y nos da la masa total:

$$m = \int_0^2 \left[\int_0^3 (2x^2y+1)dx\right] dy = \int_0^2 \left(\tfrac{2}{3}x^3y + x\right)\Big]_{x=0}^3 dy =$$
$$= \int_0^2 (18y+3)dy = (9y^2+3y)\Big]_{y=0}^2 = 42\,\text{kg}$$

También se puede definir la integral de volumen de un vector $\mathbf{A}(r)$. El resultado es otro vector cuyas componentes son las integrales de volumen de las componentes de $\mathbf{A}$:

$$\iiint_V \mathbf{A}dV = \mathbf{i}\iiint_V A_x dV + \mathbf{j}\iiint_V A_y dV + \mathbf{k}\iiint_V A_x dV \qquad (48)$$

Así se calcula, por ejemplo, el campo eléctrico creado por un cuerpo cargado como suma de las contribuciones de cada elemento infinitesimal $dq = \rho(r)dV$. O el centro de masas de un objeto como media de los vectores de posición $\mathbf{r}$ de las partículas que lo forman:

$$\mathbf{R}_{cm} = \frac{1}{m}\int \mathbf{r}dm = \frac{1}{m}\iiint_V \mathbf{r}\rho(r)dV \qquad (49)$$