

## Cambio de variable en una integral triple: coordenadas cilíndricas y esféricas

Al igual que en el caso de integrales dobles, en ocasiones un cambio de coordenadas puede facilitar la resolución de una integral triple.

Un cambio de coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  a otras coordenadas  $(u, v, w)$  es un aplicación biyectiva entre dos recintos  $D^*$  y  $D$  de  $\mathbf{R}^3$  dada por

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$$

Entonces la fórmula de cambio de variable para integrales triples queda:

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{D^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \|J\| du dv dw$$

donde  $\|J\|$  es el valor absoluto del Jacobiano de la función de cambio de coordenadas.

Cambiaremos coordenadas cartesianas por cualquiera de los siguientes sistemas de coordenadas en  $\mathbf{R}^3$ :

### Cordenadas cilíndricas o polares en el espacio $(\rho, \theta, z)$

Las coordenadas cilíndricas consisten en tomar coordenadas polares  $(\rho, \theta)$  en cada plano horizontal, es decir para cada valor constante de la coordenada  $z$ .

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \theta; \quad (\rho > 0, 0 \leq \theta < 2\pi) \\ z = z \end{cases}$$

y entonces  $\|J\| = \rho$  y  $dx dy dz = \rho \cdot dz d\rho d\theta$ .

La inversa de este cambio es: 
$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg}(\theta) = y/x \\ z = z \end{cases}$$

Ecuaciones de algunas superficies en cartesianas y cilíndricas:

The logo for Cartagena99 features the word 'Cartagena' in a stylized, blue, serif font with a slight shadow, followed by '99' in a larger, bold, blue font. The entire logo is set against a light blue and orange background.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Cordenadas esféricas en el espacio $(\rho, \theta, \varphi)$

Las coordenadas esféricas  $(\rho, \theta, \varphi)$  de un punto del espacio son su módulo  $\rho$  y su latitud  $\theta$  y su altitud  $\varphi$  medidos sobre la esfera de radio  $\rho$ .

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \cos \theta \\ y = \rho \cos \varphi \sin \theta; \quad (\rho > 0, 0 \leq \theta < 2\pi, -\pi/2 \leq \varphi < \pi/2) \\ z = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

y entonces  $\|J\| = \rho^2 \cos \varphi$  y  $dx dy dz = \rho^2 \cos \varphi \cdot d\rho d\varphi d\theta$ .

La inversa de este cambio es: 
$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \operatorname{tg}(\theta) = y/x \\ \operatorname{sen}(\varphi) = z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases}$$

Ecuaciones de algunas superficies en cartesianas y esféricas:

- Esfera de centro  $(0, 0, 0)$  y radio  $r$ :  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \Leftrightarrow \rho = r$
- Esfera de centro  $(0, 0, r)$  y radio  $r$ :  $x^2 + y^2 + z^2 - 2rz = 0 \Leftrightarrow \rho = 2r \cdot \operatorname{sen} \varphi$
- Cono:  $x^2 + y^2 - k^2 z^2 = 0$  ( $k$  constante)  $\Leftrightarrow \operatorname{tg}(\varphi) = 1/k$

The logo for Cartagena99 features the word "Cartagena99" in a stylized, teal-colored font with a slight shadow effect. The "99" is larger and more prominent. The text is set against a background of light blue and orange geometric shapes, including a large, faint "99" in the background.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70