

EL ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO

TEMA 1: EL ESPACIO AFÍN

- EL ESPACIO AFÍN
- SUBESPACIO AFINES
- SISTEMAS DE REFERENCIA
- CAMBIO DE SISTEMA DE REFERENCIA
- LA RECTA EN EL ESPACIO
- EL PLANO EN EL ESPACIO
- POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS
- POSICIONES RELATIVAS DE TRES PLANOS
- POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS
- POSICIONES RELATIVAS DE RECTA Y PLANO

TEMA 2: EL ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

- PRODUCTO ESCALAR
- ORTOGONALIDAD
- ÁNGULO DE DOS VECTORES
- COSENOS DIRECTORES DE UN VECTOR
- PRODUCTO VECTORIAL
- PRODUCTO MIXTO
- DOBLE PRODUCTO VECTORIAL

TEMA 3: EL ESPACIO EUCLÍDEO

- COORDENADAS CARTESIANAS RECTANGULARES
- DISTANCIA. ESPACIO MÉTRICO
- DISTANCIA EN EL ESPACIO EUCLÍDEO
- VECTOR PERPENDICULAR A UN PLANO
- VECTOR PARALELO A UNA RECTA
- PERPENDICULARIDAD Y PARALELISMO ENTRE PLANOS, ENTRE RECTAS Y ENTRE PLANOS Y RECTAS
- DISTANCIAS
- ECUACIÓN NORMAL DEL PLANO
- ÁREAS
- VOLÚMENES



EL ESPACIO AFÍN

TEMA 1: EL ESPACIO AFÍN

EL ESPACIO AFÍN

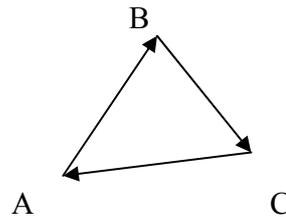
Definición: Sean E el conjunto de puntos del espacio, $V^3(R)$ el espacio vectorial real de los vectores

libres del espacio, y $\varphi: E \times E \rightarrow V^3(R)$ una aplicación que verifica:
 $(A,B) \rightarrow \varphi(A,B) = \vec{AB}$

1) “Relación de Charles” Si $A, B, y C \in E$

$$\varphi(A,B) + \varphi(B,C) + \varphi(C,A) = \vec{0} \quad \text{o también}$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$$



2) $\forall A \in E, \forall \vec{v} \in V$, existe un único punto $B \in E$ tal que $\varphi(A,B) = \vec{v}$.

Entonces a la terna $(E, V^3(R), \varphi)$ se le denomina **espacio afín** y se escribe A^3 .

Los elementos del espacio afín A^3 son los puntos del espacio ordinario. En ocasiones, se suele “identificar” el espacio afín A^3 con el conjunto de puntos E , lo que no es correcto, pero si permisible, para simplificar la notación.

Definición: La **dimensión** del espacio afín es la dimensión del espacio vectorial asociado $V^3(R)$.

Definición: Diremos que los puntos A, B, C y D son **linealmente independientes** (o **linealmente dependientes**) si lo son los vectores $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$.

Propiedades: 1) $\vec{AB} = \vec{0} \Rightarrow A = B$; 2) $\vec{AA} = \vec{0}$; 3) $\vec{AB} = -\vec{BA}$; 4) $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

Demostración:

1) De la segunda condición de la definición: 2) $\forall A \in E, \forall \vec{0} \in V$, existe un único punto $B \in E$ tal que $\varphi(A,B) = \vec{AB} = \vec{0} \Rightarrow B = A$.

2) De la relación de Charles $\varphi(A,A) + \varphi(A,A) + \varphi(A,A) = \vec{0}$ o también

$$\vec{AA} + \vec{AA} + \vec{AA} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AA} = \vec{0}.$$

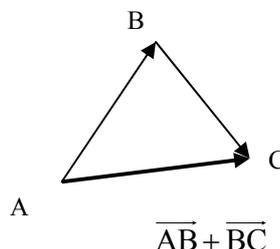
EL ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO

3) Ahora $\varphi(A, B) + \varphi(B, A) + \varphi(A, A) = \vec{0}$ o también $\vec{AB} + \vec{BA} + \vec{AA} = \vec{0}$ y de aquí $\vec{AB} = -\vec{BA}$.

4) Análogamente, $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$,

$$\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{BC} - \vec{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}, \quad \text{que}$$

constituye la definición de suma vectorial.



SUBESPACIO AFINES

Definición: Sea $A^3 = (E, V^3(R), \varphi)$ un espacio afín. Sea F un subconjunto no vacío de E , se dice que $B = (F, V(F), \varphi)$ es un **subespacio afín** de A^3 si existe un punto $A \in F$ tal que $V(F) = \{\vec{AX} / X \in F\}$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial $V^3(R)$.

Al subespacio afín también se le denomina **variedad lineales afines o variedades lineales**.

Proposición: El subespacio afín es independiente del punto que se tome.

Demostración:

Sea el subespacio afín B del espacio afín A^3 . Si $P, Q \in B$ entonces $\{\vec{PX} / X \in B\} = \{\vec{QX} / X \in B\}$.

En efecto:

$$\vec{PX} = \vec{PQ} + \vec{QX} = -\vec{QP} + \vec{QX} \in \{\vec{PX} / X \in B\}$$

$$\vec{QX} = \vec{QP} + \vec{PX} = -\vec{PQ} + \vec{PX} \in \{\vec{QX} / X \in B\}$$

Al subespacio vectorial $V(F)$ se le denomina **subespacio vectorial asociado** al subespacio afín B .

Definición: La **dimensión** del subespacio afín es la dimensión del subespacio vectorial asociado.

Definición: Sean A^3 un espacio afín, A un punto de E y W un subespacio vectorial de $V^3(R)$. Entonces $B = (F, W, \varphi)$ es un subespacio afín de A^3 , siendo $F = \{X \in E / \vec{AX} \in W\}$

Al subespacio vectorial W se le llama **dirección** de F .

Al subespacio afín $B = (F, W, \varphi)$ que contiene al punto A y de dirección W se le expresa de forma simplificada: $B = A + W$

EL ESPACIO AFÍN

Clasificación de los subespacios afines:

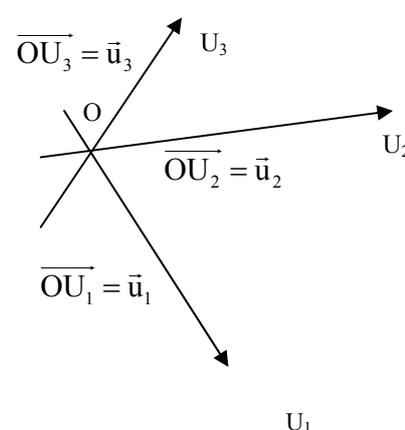
dim B	Ecuaciones	Nombre
0	$X = A$	PUNTO
1	$X = A + t\vec{v}$	RECTA
2	$X = A + t\vec{v} + s\vec{w}$	PLANO
3	$X = A + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$	ESPACIO TOTAL

SISTEMAS DE REFERENCIA

Definición: Sea A^3 un espacio afín y $\mathcal{R} = \{O, U_1, U_2, U_3\}$ una cuaterna de puntos, se dice que \mathcal{R} constituye un **sistema de referencia** del espacio afín A^3 cuando los vectores

$\vec{OU}_1, \vec{OU}_2, \vec{OU}_3$ forman una base de $V^3(R)$. O es el **origen** del sistema de referencia.

Si $\vec{OU}_1 = \vec{u}_1, \vec{OU}_2 = \vec{u}_2, \vec{OU}_3 = \vec{u}_3$ entonces se tiene $\mathcal{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ un sistema de referencia.



Definición: Sea $\mathcal{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ un sistema de referencia afín, si $A \in E$ al vector libre \vec{OA} se le denomina **vector de posición** del punto A .

Proposición: Sean $A^3, \mathcal{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una referencia afín y \mathbf{R}^3 el espacio vectorial real de dimensión 3. Entonces la aplicación $c: E \rightarrow \mathbf{R}^3$ definida por $c(A) = (x, y, z)$ son las coordenadas del vector \vec{OA} respecto de la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es biyectiva.

Demostración:

Para cada punto A se obtiene el vector de posición que respecto a la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es

$\vec{OA} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3 = (x, y, z)$, es decir, $E \xrightarrow{\varphi_0} V^3(R) \xrightarrow{i} \mathbf{R}^3$, luego $c = i \circ \varphi_0$ que es biyectiva por ser

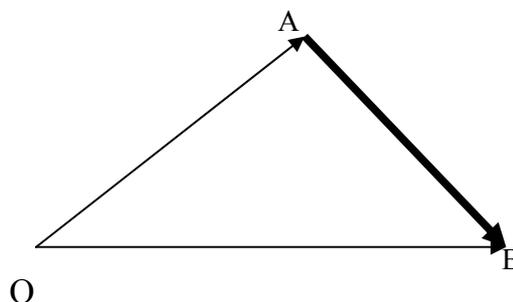
composición de aplicaciones biyectivas.

EL ESPACIO AFÍN

Definición: Con la misma notación, se dice que (x,y,z) son las **coordenadas** del punto A respecto del sistema de referencia R si $c(A)=(x,y,z)$.

menos las coordenadas del origen A, es decir,

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}.$$



Corolario 1: Las coordenadas vectoriales de \vec{OA} son las coordenadas afines del punto A.

Corolario 2: Las coordenadas de un vector libre \vec{AB} son las coordenadas del extremo B

CAMBIO DE SISTEMA DE REFERENCIA

Sean $\mathcal{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y $\mathcal{R}' = \{O'; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ dos sistemas de referencia del espacio afín A^3 tales

$$\text{que: } \begin{cases} \vec{u}_1 = a_{11}\vec{v}_1 + a_{12}\vec{v}_2 + a_{13}\vec{v}_3 \\ \vec{u}_2 = a_{21}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + a_{23}\vec{v}_3 \\ \vec{u}_3 = a_{31}\vec{v}_1 + a_{32}\vec{v}_2 + a_{33}\vec{v}_3 \\ \vec{O'O} = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 \end{cases}$$



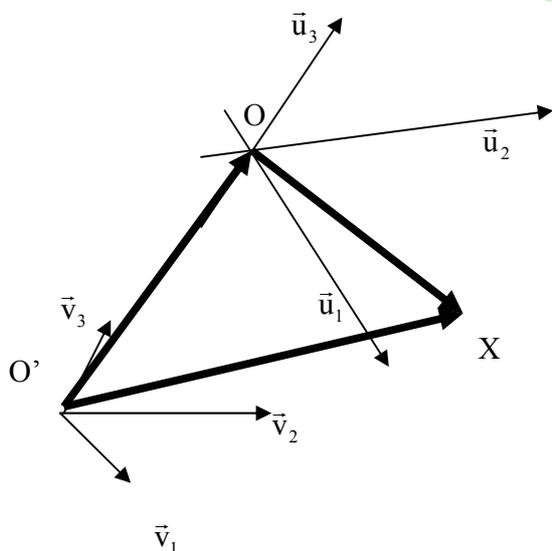
Si X tiene por vectores de posición $\vec{OX} = (x, y, z)$ y

$\vec{O'X} = (x', y', z')$ respecto de \mathcal{R} y \mathcal{R}'

respectivamente, luego $\vec{O'X} = \vec{O'O} + \vec{OX}$. Entonces:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow [x]_{\mathcal{R}'} = A \cdot [x]_{\mathcal{R}}$$

que representan las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de \mathcal{R} a \mathcal{R}' , que considerando la matriz A por bloques será:



EL ESPACIO AFÍN

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ b & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ c & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vec{O'O} & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ siendo } P \text{ la matriz del cambio de la base } \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\} \text{ a}$$

la base $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$. Para obtener el cambio de sistema de referencia de R' a R , basta despejar en la ecuación anterior:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vec{O'O} & P \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P^{-1}\vec{O'O} & P^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P^{-1}\vec{OO}' & P^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Casos particulares:

I) Si la base no cambia, es decir, $\bar{u}_1 = \bar{v}_1, \bar{u}_2 = \bar{v}_2, \bar{u}_3 = \bar{v}_3$ resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ una "traslación"}$$

II) Si los orígenes coinciden ($O=O'$), es decir $a=b=c=0$ resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ 0 & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 0 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ un "cambio de base" vectorial.}$$

Proposición: Todo cambio de referencia en el espacio afín es igual al producto de una "traslación" por un "cambio de base".

Demostración:

En efecto:

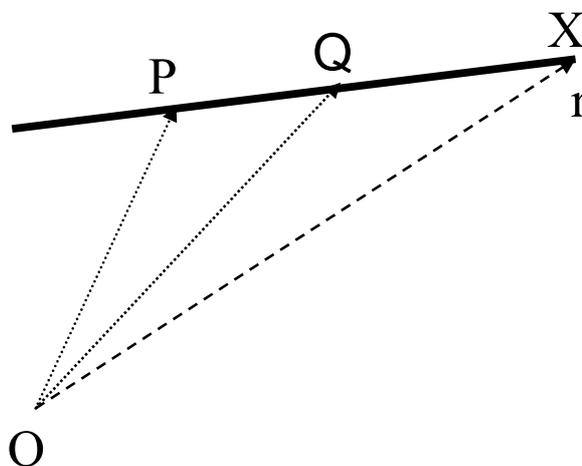
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ b & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ c & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ 0 & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 0 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ 0 & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 0 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EL ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO

LA RECTA EN EL ESPACIO

Una recta queda determinada por dos puntos P y Q distintos. Si X es un punto cualquiera de la recta y $\mathcal{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ un sistema de referencia del espacio afín, la ecuación vectorial de la recta es $\vec{OX} = \vec{OP} + t\vec{PQ}$ y sus ecuaciones paramétricas para $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$, y $X = (x_1, x_2, x_3)$ respecto de

$$R, \text{ son: } \begin{cases} x_1 = p_1 + t(q_1 - p_1) \\ x_2 = p_2 + t(q_2 - p_2) \\ x_3 = p_3 + t(q_3 - p_3) \end{cases}$$



Sea $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ un **vector director** de la recta, es decir, un vector de la dirección de la recta

entonces la ecuación vectorial es $X = P + t\vec{v}$ y las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + tv_1 \\ x_2 = p_2 + tv_2 \\ x_3 = p_3 + tv_3 \end{cases}$$

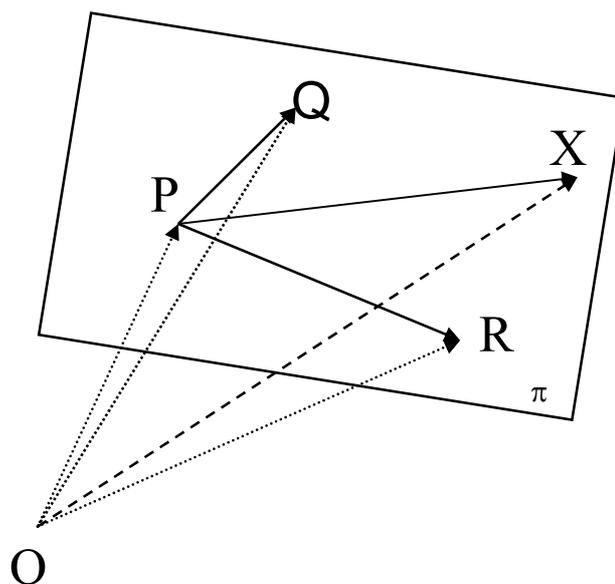
De donde eliminando el parámetro t queda en forma continua: $\frac{x_1 - p_1}{v_1} = \frac{x_2 - p_2}{v_2} = \frac{x_3 - p_3}{v_3}$.

EL PLANO EN EL ESPACIO

Sea el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$. Un plano queda determinado por tres puntos P, Q y R no alineados, cualquier punto coplanario con ellos verifica $X = P + t\vec{PQ} + s\vec{PR}$.

De la ecuación vectorial, para $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$, $R = (r_1, r_2, r_3)$ y $X = (x_1, x_2, x_3)$ se obtienen las ecuaciones

$$\text{paramétricas: } \begin{cases} x_1 = p_1 + t(q_1 - p_1) + s(r_1 - p_1) \\ x_2 = p_2 + t(q_2 - p_2) + s(r_2 - p_2) \\ x_3 = p_3 + t(q_3 - p_3) + s(r_3 - p_3) \end{cases}$$



EL ESPACIO AFÍN

Si consideramos un punto P y dos vectores linealmente independientes $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ el plano queda determinado de forma vectorial por $X = P + t\vec{v} + s\vec{w}$ y por sus

ecuaciones paramétricas:
$$\begin{cases} x_1 = p_1 + tv_1 + sw_1 \\ x_2 = p_2 + tv_2 + sw_2 \\ x_3 = p_3 + tv_3 + sw_3 \end{cases}$$
 de donde eliminando los parámetros t y s queda:

$$\begin{vmatrix} x_1 - p_1 & v_1 & w_1 \\ x_2 - p_2 & v_2 & w_2 \\ x_3 - p_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & p_1 & q_1 & r_1 \\ x_2 & p_2 & q_2 & r_2 \\ x_3 & p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} = 0, \text{ la ecuación general, cartesiana o implícita del plano}$$

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS

Sean los planos:

$$\alpha \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_0 \text{ con } (a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0);$$

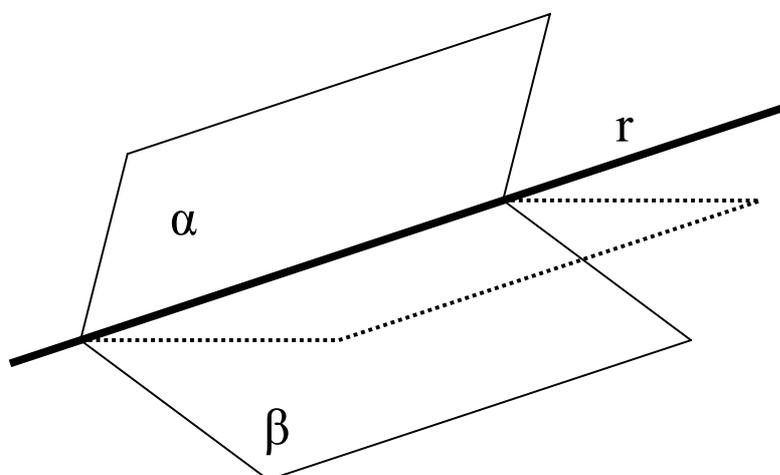
$$\beta \equiv b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = b_0 \text{ con } (b_1, b_2, b_3) \neq (0,0,0) \text{ considerando:}$$

$$r(A) = r \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \quad r(A^*) = r \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_0 \end{pmatrix}$$

- Si $r(A) = r(A^*) = 2$ el sistema es compatible indeterminado y los dos planos son **secantes**, es decir se cortan según una recta.



NOTA: Toda recta queda identificada como intersección de dos planos secantes mediante sus ecuaciones cartesianas. Denominamos “**haz de planos**” que contienen a una recta a la combinación lineal de dos planos cualesquiera que contengan a dicha recta: $\lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 - a_0) + \mu(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 - b_0) = 0$.



EL ESPACIO AFÍN

- Si $r(A) = 1$; y $r(A^*) = 2$ el sistema es incompatible y los dos planos son **paralelos**.
- Si $r(A) = r(A^*) = 1$ el sistema es compatible indeterminado y los dos planos son **coincidentes**.

POSICIONES RELATIVAS DE TRES PLANOS

Sean los planos:

$$\alpha \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_0 \text{ con } (a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0);$$

$$\beta \equiv b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = b_0 \text{ con } (b_1, b_2, b_3) \neq (0,0,0);$$

$$\gamma \equiv c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = c_0 \text{ con } (c_1, c_2, c_3) \neq (0,0,0) \text{ con:}$$

$$r(A) = r \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad r(A^*) = r \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_0 \end{pmatrix}$$

- Si $r(A) = r(A^*) = 3$ el sistema es compatible determinado y los tres planos se cortan en un **punto**.
- Si $r(A) = 2$; y $r(A^*) = 3$ el sistema es incompatible y se presentan dos subcasos:
 - I) Si todas las submatrices de orden 2×3 son de rango dos. Los planos se cortan dos a dos.
 - II) Si todas las submatrices de orden 2×3 son de rango dos, salvo una que es de rango uno. Dos planos son paralelos y el tercero les corta.
- Si $r(A) = r(A^*) = 2$ el sistema es compatible indeterminado y se presentan dos subcasos:
 - III) Si todas las submatrices de orden 2×4 son de rango dos. Los tres planos se cortan formando una recta. En este caso, dos planos constituyen lo que se denomina un “haz de planos”.
 - IV) Si todas las submatrices de orden 2×4 son de rango dos, salvo una que es de rango uno. Dos planos son coincidentes y el tercero les corta.
- Si $r(A) = 1$; $r(A^*) = 2$ el sistema es incompatible y se presentan dos subcasos:
 - V) Si todas las submatrices de orden 2×4 son de rango dos. Los tres planos son paralelos.
 - VI) Si todas las submatrices de orden 2×4 son de rango dos, salvo una que es de rango uno. Dos planos son coincidentes y el tercero paralelo.
- Si $r(A) = r(A^*) = 1$ el sistema es compatible indeterminado y los tres planos son **coincidentes**.

POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

Sean las rectas r y s determinadas por los planos:

$$r \begin{cases} \alpha \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_0 \text{ con } (a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0) \\ \beta \equiv b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = b_0 \text{ con } (b_1, b_2, b_3) \neq (0,0,0) \end{cases}$$

EL ESPACIO AFÍN

$$S \begin{cases} \gamma \equiv c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = c_0 \text{ con } (c_1, c_2, c_3) \neq (0,0,0) \\ \delta \equiv d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 = d_0 \text{ con } (d_1, d_2, d_3) \neq (0,0,0) \end{cases} \text{ con:}$$

$$r(A) = r \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} \quad r(A^*) = r \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_0 \end{pmatrix}$$

- Si $r(A^*) = 4$. Las dos rectas se **crucan**, pues no están en el mismo plano.
- Si $r(A^*) \neq 4$. Las dos rectas son **coplanarias** y se presenta los siguientes subcasos:
 - Si $r(A) = r(A^*) = 3$. Las dos rectas se cortan en un **punto**.
 - Si $r(A) = 2$; $r(A^*) = 3$. Las dos rectas son **paralelas**.
 - Si $r(A) = r(A^*) = 2$. Las dos rectas son **coincidentes**.

POSICIONES RELATIVAS DE RECTA Y PLANO

Sean la recta r determinada por los planos α y β y el plano γ :

$$\alpha \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_0 \text{ con } (a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0);$$

$$\beta \equiv b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = b_0 \text{ con } (b_1, b_2, b_3) \neq (0,0,0);$$

$$\gamma \equiv c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = c_0 \text{ con } (c_1, c_2, c_3) \neq (0,0,0) \text{ con:}$$

$$r(A) = r \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad r(A^*) = r \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_0 \end{pmatrix}$$

- Si $r(A) = r(A^*) = 3$. La recta es **incidente** con el plano.
- Si $r(A) = 2$; $r(A^*) = 3$. La recta es **paralela** al plano.
- Si $r(A) = r(A^*) = 2$. La recta esta **contenida** en el plano.

TEMA 2: EL ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

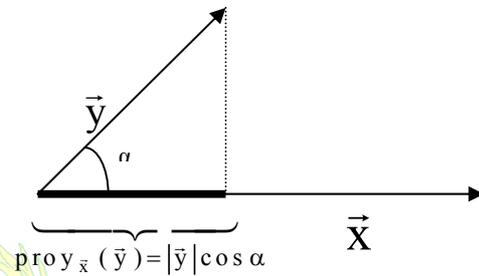
PRODUCTO ESCALAR

Definición: Sea $V^3(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de los vectores libres del espacio sobre el cuerpo \mathbb{R} .

Llamamos **producto escalar** en $V^3(\mathbb{R})$ a la aplicación: $V^3(\mathbb{R}) \times V^3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ siendo α el ángulo $(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos \alpha$

que forman, en un punto cualquiera, un representante de \vec{x} y otro de \vec{y} con $0 \leq \alpha \leq \pi$. El número real $|\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos \alpha$ se llama producto escalar de \vec{x} por \vec{y} .

Proposición: El producto escalar de dos vectores es el producto del módulo de un vector por la **proyección** del otro sobre él. Además, $\vec{x} \neq \vec{0}$ e $\vec{y} \neq \vec{0}$, el producto escalar de \vec{x} por \vec{y} es un número positivo, negativo o cero según que el ángulo que formen \vec{x} e \vec{y} sea agudo, obtuso o recto respectivamente.



Demostración:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| |\vec{y}| \cos \alpha = |\vec{x}| \text{proy}_{\vec{x}}(\vec{y})$$

Propiedades del producto escalar

1) Si $\vec{x} = \vec{0}$ o $\vec{y} = \vec{0}$ o \vec{x} e \vec{y} son perpendiculares, entonces $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$.

Demostración:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos \alpha = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos 90^\circ = 0$$

2) Si $\vec{x} \neq \vec{0}$ e $\vec{y} \neq \vec{0}$, entonces $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ si y sólo si \vec{x} e \vec{y} son perpendiculares.

Demostración:

$$0 = \vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} \vec{x} = \vec{0} \\ \text{ó} \\ \vec{y} = \vec{0} \\ \text{ó} \\ \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ \end{cases}$$

EL ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

3) **Conmutativa:** $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V^3$

Demostración:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos \alpha = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{y}| \cdot |\vec{x}| \cdot \cos(\vec{y}, \vec{x}) = \vec{y} \cdot \vec{x}$$

4) **Distributiva** respecto de la suma: $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$, $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V^3$

Demostración:

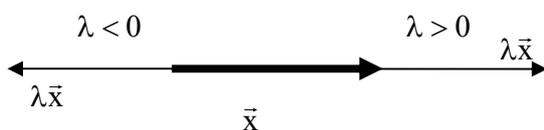
Mediante la proyección de los vectores \vec{y}, \vec{z} e $\vec{y} + \vec{z}$ sobre el vector \vec{x} :

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) &= |\vec{x}| \cdot |\vec{y} + \vec{z}| \cdot \cos(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = |\vec{x}| \text{proy}_{\vec{x}}(\vec{y} + \vec{z}) = |\vec{x}|(\text{proy}_{\vec{x}}(\vec{y}) + \text{proy}_{\vec{x}}(\vec{z})) = \\ &= |\vec{x}| \text{proy}_{\vec{x}}(\vec{y}) + |\vec{x}| \text{proy}_{\vec{x}}(\vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z} \end{aligned}$$

5) **Pseudoasociativa:** $\lambda(\vec{x} \cdot \vec{y}) = (\lambda\vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (\lambda\vec{y}) = (\vec{x} \cdot \vec{y})\lambda$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Demostración:

$$\begin{aligned} \lambda(\vec{x} \cdot \vec{y}) &= \lambda |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos \alpha = \lambda \cdot |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \lambda \cdot \cos(\vec{x}, \vec{y}) = \\ &= \begin{cases} |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \lambda \cdot \cos(\lambda\vec{x}, \vec{y}) & \text{si } \lambda > 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \\ |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \lambda \cdot (-\cos(\lambda\vec{x}, \vec{y})) & \text{si } \lambda < 0 \end{cases} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot |\lambda| \cdot \cos(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = (\lambda\vec{x}) \cdot \vec{y} \end{aligned}$$



6) Si $\vec{x} \neq \vec{0}$, entonces $\vec{x} \cdot \vec{x} > 0$; $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0$ si y sólo si $\vec{x} = \vec{0}$.

Demostración:

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = |\vec{x}| \cdot |\vec{x}| \cdot \cos \alpha = |\vec{x}| \cdot |\vec{x}| \cdot \cos(\vec{x}, \vec{x}) = |\vec{x}| \cdot |\vec{x}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{x}|^2 \geq 0$$

Antes de pasar a enunciar el resto de las propiedades del producto escalar necesitamos dar la siguiente definición: Para cada $\vec{x} \in V^3$, llamamos **norma euclídea** de \vec{x} : $\|\vec{x}\| = +\sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = +\sqrt{|\vec{x}|^2} = |\vec{x}|$, es decir, la norma de un vector coincide con su módulo. Más generalmente, se define norma en V^3

como cualquier aplicación: $V^3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
 $\vec{x} \rightarrow \|\vec{x}\|$ que verifiquen las siguientes condiciones:

EL ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO

- 1) $\|\vec{x}\| \geq 0$;
- 2) $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$;
- 3) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$;
- 4) $\|\lambda \cdot \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$

En particular, la aplicación: $V^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $\vec{x} \rightarrow \|\vec{x}\|$, que asocia a cada vector su módulo, es una norma sobre V^3 .

7) **Desigualdad de Cauchy-Schwartz:** $|\vec{x} \cdot \vec{y}| < \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V^3$.

Demostración:

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos \alpha = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \underbrace{|\cos \alpha|}_{\leq 1} \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$

8) **Desigualdad de Minkowski:** $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}| \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V^3$

Demostración:

Aplicando la desigualdad anterior $\vec{x} \cdot \vec{y} \leq |\vec{x} \cdot \vec{y}| < \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$

$$|\vec{x} + \vec{y}|^2 = (\vec{x} + \vec{y})(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} + \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{x} + \vec{y} \cdot \vec{y} = |\vec{x}|^2 + 2\vec{x} \cdot \vec{y} + |\vec{y}|^2 \leq |\vec{x}|^2 + 2|\vec{x}| \cdot |\vec{y}| + |\vec{y}|^2 = (|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2$$

y de aquí: $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}| \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V^3$

Expresión analítica del producto escalar

Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base de V^3 Sean $\vec{x}, \vec{y} \in V^3$ tales que $\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3$ e

$$\vec{y} = y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 + y_3\vec{u}_3. \text{ Entonces: } \vec{x} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 \\ \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 \\ \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Definición: Un espacio vectorial V^3 . en el que se ha definido el producto escalar se dice que es un **espacio vectorial euclídeo**.

ORTOGONALIDAD

Definición: Se dice que los vectores \vec{x} e \vec{y} son **ortogonales** si su producto escalar es cero.

EL ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

Teorema de Pitágoras

Dos vectores de un espacio vectorial euclídeo son ortogonales si, y sólo si el cuadrado de la norma de su suma es igual a la suma de los cuadrados de sus normas; es decir: $|\vec{x} + \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 \Leftrightarrow \vec{x} \perp \vec{y}$.

Demostración:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V^3 \quad |\vec{x} + \vec{y}|^2 = (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} + \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{x} + \vec{y} \cdot \vec{y} = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 \Leftrightarrow \vec{x} \perp \vec{y}$$

Proposición: Tres vectores ortogonales dos a dos y distintos del vector nulo forman una base del espacio vectorial V^3 .

Demostración:

Supongamos que los tres vectores \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} son ortogonales dos a dos no nulos y además linealmente dependientes, entonces $\lambda_1 \vec{x} + \lambda_2 \vec{y} + \lambda_3 \vec{z} = \vec{0}$, $\exists \lambda_i \neq 0$. Si multiplicamos escalarmente los dos miembros por \vec{x} , obtenemos $\lambda_1 (\vec{x} \cdot \vec{x}) + \lambda_2 (\vec{x} \cdot \vec{y}) + \lambda_3 (\vec{x} \cdot \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{0} = 0$ y como $(\vec{x} \cdot \vec{y}) = 0$, $(\vec{x} \cdot \vec{z}) = 0$, resulta $\lambda_1 (\vec{x} \cdot \vec{x}) = 0$ y como $\vec{x} \neq \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = 0$. Análogamente se obtiene $\lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$ y los tres vectores son linealmente independientes y constituyen una base de V^3 .

Definición: Decimos que la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es **ortonormal** o **métrica** cuando sus vectores son unitarios ($\|\vec{u}_i\| = 1$, $i = 1, 2, 3$) y ortogonales entre sí (perpendiculares dos a dos).

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \text{ y que: } \begin{cases} |\vec{u}_i| = 1 \Rightarrow \vec{u}_i \cdot \vec{u}_i = 1 \\ \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Con la misma notación anterior, si la base B es ortonormal la expresión analítica del producto escalar de \vec{x} por \vec{y} es: $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$.

Por tanto, el módulo de un vector es $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ cuando la base es ortonormal.

Definición: Sea V un espacio vectorial euclídeo y F y G dos subconjuntos de V , se dice que F y G son **ortogonales** (escribimos $F \perp G$) si y solo si todo vector de F es ortogonal a cualquier vector de G .

EL ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO

Teorema: F y G son ortogonales si y solo si los subespacios vectoriales que generan lo son. En particular en V^3 se verifica:

- 1) Dos rectas vectoriales son ortogonales si y solo si lo son sus vectores directores.
- 2) Una recta vectorial es ortogonal a un plano vectorial si y solo si el vector director de la recta es ortogonal a una base del plano.

Demostración:

Sean $F = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$ y $G = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_q\}$ dos subconjuntos de vectores de un espacio vectorial V . Se cumple que $F \perp G \Leftrightarrow \langle F \rangle \perp \langle G \rangle$. Veamos la demostración:

Por ser $\langle F \rangle$, $\langle G \rangle$ subespacios ortogonales todos su vectores son ortogonales entre sí. $F \perp G$.

Recíprocamente, todo vector del subespacio $\langle F \rangle$ es de la forma $\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p$ y $\mu_1 \vec{v}_1 + \dots + \mu_q \vec{v}_q$ es un vector del subespacio $\langle G \rangle$. Efectuando el producto:

$(\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p)(\mu_1 \vec{v}_1 + \dots + \mu_q \vec{v}_q) = \lambda_1 \mu_1 \vec{u}_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_p \mu_q \vec{u}_p \vec{v}_q = \lambda_1 \mu_1 (\vec{u}_1 \vec{v}_1) + \dots + \lambda_p \mu_q (\vec{u}_p \vec{v}_q) = 0$, y por tanto $F \perp G \Leftrightarrow \langle F \rangle \perp \langle G \rangle$



Proposición: La intersección de dos subespacios ortogonales es $\{\vec{0}\}$.

Demostración:

Si $\vec{u} \in F \cap G$ con $F \perp G \Leftrightarrow \langle F \rangle \perp \langle G \rangle$, resulta que $\vec{u} \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \in F \\ \vec{u} \in G \end{cases} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Consecuencia: En V^3 dos planos nunca son subespacios ortogonales.

Definición: Dado un subconjunto F de V , llamaremos **ortogonal** de F y se escribe F^\perp , al subconjunto de V formado por todos los vectores ortogonales a F . F^\perp es siempre un subespacio vectorial de V aunque F no lo sea.

Demostración:

EL ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

$F^\perp = \{ \vec{v} \in V / \vec{v} \cdot \vec{u} = 0, \forall \vec{u} \in F \}$ es un subespacio vectorial de V , ya que cumple la caracterización de los subespacios vectoriales, es decir, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in F^\perp \Rightarrow \lambda \vec{v} + \mu \vec{w} \in F^\perp$.

$$\text{Puesto que: } \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v} + \mu \vec{w}) = \lambda \left(\overset{\in F}{\vec{u}} \cdot \overset{\in F^\perp}{\vec{v}} \right) + \mu \left(\overset{\in F}{\vec{u}} \cdot \overset{\in F^\perp}{\vec{w}} \right) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$$

Teorema: Si F es un subespacio vectorial de V , se verifica:

- 1) $(F^\perp)^\perp = F$ (Si F no es un subespacio vectorial de $(F^\perp)^\perp \supset F$)
- 2) $F \oplus F^\perp = V$, es decir, F^\perp es un subespacio suplementario de F
- 3) $\dim F^\perp = \dim V - \dim F$

Demostración:

Como $F^\perp = \{ \vec{v} \in V / \vec{v} \cdot \vec{u} = 0, \forall \vec{u} \in F \}$ resulta $(F^\perp)^\perp = \{ \vec{u} \in V / \vec{v} \cdot \vec{u} = 0, \forall \vec{v} \in F^\perp \}$ y cualquier vector de F lo es de F^\perp .

Veamos que $F + F^\perp = V$:

Sea una base ortonormal $\{ \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r \}$ del subespacio vectorial F , se puede prolongar hasta conseguir una base ortonormal $\{ \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r, \vec{e}_{r+1}, \dots, \vec{e}_n \}$ del espacio vectorial V ; siendo $\{ \vec{e}_{r+1}, \dots, \vec{e}_n \}$ un sistema libre por ser vectores de una base y además sistema generador del subespacio vectorial F^\perp . En efecto.

$\forall \vec{v} \in F^\perp \quad \exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} / \vec{v} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_r \vec{e}_r + x_{r+1} \vec{e}_{r+1} + \dots + x_n \vec{e}_n$ con $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \quad \forall \vec{u} \in F$, en particular con $\vec{e}_1 \in F$, se cumple que:

$$0 = \vec{v} \cdot \vec{e}_1 = (x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_r \vec{e}_r + x_{r+1} \vec{e}_{r+1} + \dots + x_n \vec{e}_n) \cdot \vec{e}_1 = x_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + x_r \vec{e}_r \cdot \vec{e}_1 + x_{r+1} \vec{e}_{r+1} \cdot \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n \cdot \vec{e}_1 = x_1.$$

Análogamente multiplicando escalarmente por $\vec{e}_2, \dots, \vec{e}_r$ resulta $x_2 = \dots = x_n = 0 \Rightarrow \vec{v} = x_{r+1} \vec{e}_{r+1} + \dots + x_n \vec{e}_n$ que prueba que $\{ \vec{e}_{r+1}, \dots, \vec{e}_n \}$ es un sistema generador de F^\perp y por lo tanto base,

EL ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO

siendo la $\dim F^\perp = n - r = \dim V - \dim F$ y además como $F \cap F^\perp = \{\vec{0}\}$ la suma $F + F^\perp = V$ es suma directa y se tiene que $F \oplus F^\perp = V$.

Consecuencias:

1) El ortogonal de toda recta (subespacio vectorial de dimensión 1) es un hiperplano (subespacio de dimensión $n-1$). Por tanto, en V^3 , el ortogonal de una recta es un plano y viceversa.

2) Todo vector $\vec{u} \in V$ se puede descomponer de manera única en la forma, $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ donde

$\vec{u}_1 \in F, \vec{u}_2 \in F^\perp$. La aplicación $p: V \longrightarrow F$
 $\vec{u} \rightarrow p(\vec{u}) = \vec{u}_1$ se llama **proyección ortogonal** del vector \vec{u} sobre F .

ÁNGULO DE DOS VECTORES

Por definición $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos(\vec{x}, \vec{y})$, de aquí se obtiene: $\cos(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}$.

Si los vectores están referidos a una base ortonormal: $\cos(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$

COSENOS DIRECTORES DE UN VECTOR

Definición: Si $\vec{x} = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + x_3 \vec{u}_3$, siendo $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base de V^3 , se llaman **cosenos directores de \vec{x}** a los cosenos de los ángulos que forma \vec{x} con los vectores de la base.

Si la base es ortonormal, los cosenos directores son:

$$\cos(\vec{x}, \vec{u}_1) = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}; \cos(\vec{x}, \vec{u}_2) = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}; \cos(\vec{x}, \vec{u}_3) = \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

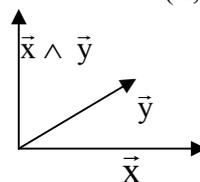
y se verifica entonces que: $\cos^2(\vec{x}, \vec{u}_1) + \cos^2(\vec{x}, \vec{u}_2) + \cos^2(\vec{x}, \vec{u}_3) = 1$.

PRODUCTO VECTORIAL

Definición: Se llama **producto vectorial** en V^3 a una aplicación: $V^3 \times V^3 \rightarrow V^3$ tal que:
 $(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow \vec{x} \wedge \vec{y}$

1) $|\vec{x} \wedge \vec{y}| = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \text{sen } \alpha$.

2) La dirección del vector $\vec{x} \wedge \vec{y}$ es perpendicular al plano definido por \vec{x} e \vec{y} .



EL ESPACIO AFÍN

3) El sentido del vector $\vec{x} \wedge \vec{y}$ viene determinado por la “ley del sacacorchos”: es el sentido de avance de un sacacorchos que gire intentando llevar el vector \vec{x} a la posición de vector \vec{y} según el ángulo menor de 180° .

Expresión analítica del producto vectorial

Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base ortonormal de V^3 . Sean $\vec{x}, \vec{y} \in V^3$ tales que $\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3$ e $\vec{y} = y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 + y_3\vec{u}_3$. Entonces:

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \vec{u}_1 + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \vec{u}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \vec{u}_3 = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Demostración:

Buscamos un vector $\vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{w}$ perpendicular a los vectores \vec{x} e \vec{y} , que respecto a la base ortonormal será: $\vec{w} = w_1\vec{u}_1 + w_2\vec{u}_2 + w_3\vec{u}_3$ cuyas coordenadas deben verificar el siguiente sistema:

$$\vec{x} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{w} = x_1w_1 + x_2w_2 + x_3w_3 = 0$$

$$\vec{y} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{y} \cdot \vec{w} = y_1w_1 + y_2w_2 + y_3w_3 = 0$$

Y cuyo módulo satisface la ecuación $|\vec{x} \wedge \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 \cdot |\vec{y}|^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha = |\vec{x}|^2 \cdot |\vec{y}|^2 \cdot (1 - \cos^2 \alpha) = |\vec{x}|^2 \cdot |\vec{y}|^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2$

resolviendo el sistema se obtiene: $\vec{x} \wedge \vec{y} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \vec{u}_1 + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \vec{u}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \vec{u}_3 = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$

Propiedades del producto vectorial

1) Si $\vec{x} = \vec{0}$ o $\vec{y} = \vec{0}$ o \vec{x} e \vec{y} son paralelos (linealmente dependientes), entonces $\vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{0}$.

Demostración:

Si son paralelos forman un ángulo de 0° : $|\vec{x} \wedge \vec{y}| = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \text{sen} \alpha = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \text{sen} 0^\circ = 0 \Rightarrow \vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{0}$

2) Si \vec{x} e \vec{y} son perpendiculares, entonces $|\vec{x} \wedge \vec{y}| = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|$

Demostración:

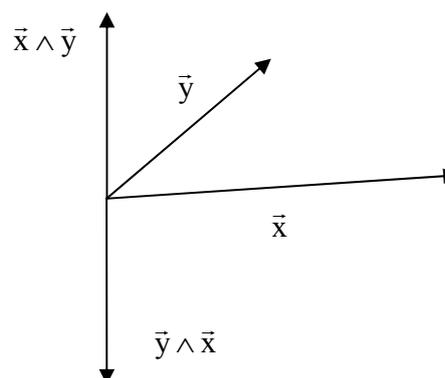
Si son perpendiculares forman un ángulo de 90° : $|\vec{x} \wedge \vec{y}| = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \text{sen} \alpha = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \text{sen} 90^\circ = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|$

3) $\vec{x} \wedge \vec{y} = -\vec{y} \wedge \vec{x}$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V^3$

EL ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO

Demostración:

Aunque sus módulos son iguales, sus sentidos son opuestos.



4) **Distributiva** respecto de la suma:

$$\vec{x} \wedge (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \wedge \vec{y} + \vec{x} \wedge \vec{z}, \quad (\vec{y} + \vec{z}) \wedge \vec{x} = \vec{y} \wedge \vec{x} + \vec{z} \wedge \vec{x}, \quad \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V^3$$

Demostración:

Es consecuencia de las propiedades de los determinantes, puesto que si escribimos las coordenadas respecto de una base ortonormal o métrica, se verifica:

$$\vec{x} \wedge (\vec{y} + \vec{z}) = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 + z_1 & y_2 + z_2 & y_3 + z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \vec{x} \wedge \vec{y} + \vec{x} \wedge \vec{z}$$

5) **Pseudoasociativa**: $\lambda(\vec{x} \wedge \vec{y}) = (\lambda\vec{x}) \wedge \vec{y} = \vec{x} \wedge (\lambda\vec{y}) = (\vec{x} \wedge \vec{y})\lambda, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Demostración:

$$\lambda(\vec{x} \wedge \vec{y}) = \lambda \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ \lambda x_1 & \lambda x_2 & \lambda x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (\lambda\vec{x}) \wedge \vec{y}$$

6) No es asociativo.

Demostración:

Veamos un contraejemplo para demostrar que $\vec{x} \wedge (\vec{y} \wedge \vec{z}) \neq (\vec{x} \wedge \vec{y}) \wedge \vec{z}$

Si $\vec{x} = \vec{y} \neq \vec{z}$ tenemos que el vector $\vec{x} \wedge (\vec{y} \wedge \vec{z})$ es distinto al vector cero y perpendicular al \vec{x} y en

cambio $(\vec{x} \wedge \vec{y}) \wedge \vec{z} = \vec{0} \wedge \vec{z} = \vec{0}$

7) $|\vec{x} \wedge \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 |\vec{y}|^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2$

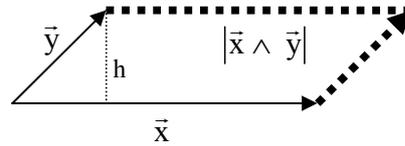
Demostración:

EL ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

$$|\vec{x} \wedge \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 \cdot |\vec{y}|^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha = |\vec{x}|^2 \cdot |\vec{y}|^2 \cdot (1 - \text{cos}^2 \alpha) = |\vec{x}|^2 \cdot |\vec{y}|^2 - (|\vec{x}|^2 \cdot |\vec{y}|^2 \cdot \text{cos}^2 \alpha) = |\vec{x}|^2 \cdot |\vec{y}|^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2$$

Interpretación geométrica del producto vectorial

Se verifica lo siguiente: el módulo del producto vectorial de los vectores \vec{x} e \vec{y} es igual al área del paralelogramo construido con un representante de \vec{x} y uno de \vec{y} por un punto.



$$|\vec{x} \wedge \vec{y}| = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \text{sen} \alpha = |\vec{x}| \cdot h = \text{área}$$

PRODUCTO MIXTO

Definición: Se llama **producto mixto** en V^3 a una aplicación:

$$V^3 \times V^3 \times V^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \rightarrow [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = \vec{x} \cdot (\vec{y} \wedge \vec{z})$$

Expresión analítica del producto mixto

Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base ortonormal de V^3 . Sean $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V^3$ tales que $\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3$; $\vec{y} = y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 + y_3\vec{u}_3$ y $\vec{z} = z_1\vec{u}_1 + z_2\vec{u}_2 + z_3\vec{u}_3$. Entonces:

$$[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = \vec{x} \cdot (\vec{y} \wedge \vec{z}) = (x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3) \cdot \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Propiedades del producto mixto

$$1) [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = \vec{x} \cdot (\vec{y} \wedge \vec{z}) = (\vec{x} \wedge \vec{y}) \cdot \vec{z} \quad \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V^3$$

Demostración:

Es consecuencia de las propiedades de los determinantes, puesto que si escribimos las coordenadas respecto de una base ortonormal o métrica, se verifica:

$$[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = \vec{x} \cdot (\vec{y} \wedge \vec{z}) = (\vec{x} \wedge \vec{y}) \cdot \vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

EL ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO

$$2) [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}] = [\bar{y}, \bar{z}, \bar{x}] = [\bar{z}, \bar{x}, \bar{y}] = -[\bar{y}, \bar{x}, \bar{z}] = -[\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}] = -[\bar{z}, \bar{y}, \bar{x}] \quad \forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V^3$$

Demostración:

Intercambiando las filas:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$$

$$3) [\bar{x} + \bar{x}', \bar{y}, \bar{z}] = [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}] + [\bar{x}', \bar{y}, \bar{z}] \quad \forall \bar{x}, \bar{x}', \bar{y}, \bar{z} \in V^3$$

Demostración:

$$[\bar{x} + \bar{x}', \bar{y}, \bar{z}] = \begin{vmatrix} x_1 + x'_1 & x_2 + x'_2 & x_3 + x'_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}] + [\bar{x}', \bar{y}, \bar{z}]$$

$$4) \lambda[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}] = [\lambda\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}] = [\bar{x}, \lambda\bar{y}, \bar{z}] = [\bar{x}, \bar{y}, \lambda\bar{z}] \quad \forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Demostración:

El escalar λ multiplica a una fila o una columna exclusivamente.

$$\lambda[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}] = \lambda \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda x_1 & \lambda x_2 & \lambda x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = [\lambda\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}]$$

$$5) [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}] = 0 \Leftrightarrow \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \text{ son linealmente dependientes} \Leftrightarrow \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \text{ son coplanarios}$$

Demostración:

$$[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \text{ son linealmente dependientes} \Leftrightarrow \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \text{ son coplanarios}$$

$$6) \text{ Dos rectas } X_1 = A_1 + \lambda\bar{v}_1 \text{ y } X_2 = A_2 + \lambda\bar{v}_2 \text{ son coplanarias.} \Leftrightarrow [\overrightarrow{A_1A_2}, \bar{v}_1, \bar{v}_2] = 0.$$

Demostración:

Por la propiedad anterior los tres vectores son coplanarios, luego las rectas son coplanarias.

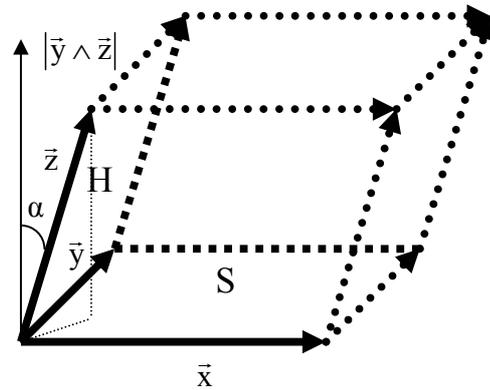
EL ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

Interpretación geométrica del producto mixto

Se verifica lo siguiente: el valor absoluto del producto mixto de tres vectores es igual al volumen del paralelepípedo construido sobre dichos vectores.

Demostración:

$$\begin{aligned} [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] &= \vec{x} \cdot (\vec{y} \wedge \vec{z}) = \\ &= |\vec{x}| \cdot |\vec{y} \wedge \vec{z}| \cdot \cos(\vec{x}, \vec{y} \wedge \vec{z}) = |\vec{x}| \cdot |\vec{y} \wedge \vec{z}| \cdot \cos \alpha = \\ &= |\vec{x}| \cdot S \cdot \cos \alpha = |\vec{x}| \cdot S \cdot \sin(90^\circ - \alpha) = S \cdot H = V \equiv \text{volumen del paralelepípedo.} \end{aligned}$$



DOBLE PRODUCTO VECTORIAL

Definición: Se llama **doble producto vectorial** en V^3 a una aplicación:

$$\begin{aligned} V^3 \times V^3 \times V^3 &\rightarrow V^3 \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) &\rightarrow \vec{x} \wedge (\vec{y} \wedge \vec{z}) \end{aligned}$$

Expresión analítica del doble producto

Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base ortonormal de V^3 . Sean $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V^3$ tales que $\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3$; $\vec{y} = y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 + y_3\vec{u}_3$ y $\vec{z} = z_1\vec{u}_1 + z_2\vec{u}_2 + z_3\vec{u}_3$. Entonces:

$$\vec{x} \wedge (\vec{y} \wedge \vec{z}) = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} y_3 & y_1 \\ z_3 & z_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

Propiedad de expulsión $\vec{x} \wedge (\vec{y} \wedge \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{z}) \cdot \vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y}) \cdot \vec{z} \quad \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V^3$

Demostración:

Utilizaremos la notación vectorial $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$, $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$

EL ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO

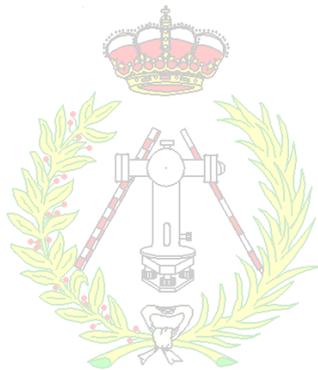
Veamos el primer miembro de la igualdad $\vec{x} \wedge (\vec{y} \wedge \vec{z}) =$

$$\begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} y_3 & y_1 \\ z_3 & z_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 y_1 z_2 - x_2 y_2 z_1 - x_3 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_3, x_1 y_2 z_1 - x_1 y_1 z_2 - x_3 y_3 z_2 + x_3 y_2 z_3, x_2 y_3 z_2 - x_2 y_2 z_3 + x_1 y_3 z_1 - x_3 y_1 z_3)$$

El segundo miembro:

$$\begin{aligned} (\vec{x} \cdot \vec{z}) \cdot \vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y}) \cdot \vec{z} &= (x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3)(y_1, y_2, y_3) - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)(z_1, z_2, z_3) = \\ &= (x_1 z_1 y_1 + x_2 z_2 y_1 + x_3 z_3 y_1 - x_1 y_1 z_1 - x_2 y_2 z_1 - x_3 y_3 z_1, \\ &\quad , x_1 z_1 y_2 + x_2 z_2 y_2 + x_3 z_3 y_2 - x_1 y_1 z_2 - x_2 y_2 z_2 - x_3 y_3 z_2, \\ &\quad , x_1 z_1 y_3 + x_2 z_2 y_3 + x_3 z_3 y_3 - x_1 y_1 z_3 - x_2 y_2 z_3 - x_3 y_3 z_3), \text{ y ambas expresiones coinciden.} \end{aligned}$$



EL ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

TEMA 3: EL ESPACIO EUCLÍDEO

Definición: Se llama espacio **afín euclídeo** o **espacio euclídeo** al espacio afín cuando el espacio vectorial real asociado V^3 es un espacio vectorial euclídeo. Lo representamos por E^3 .

COORDENADAS CARTESIANAS RECTANGULARES

Definición: Un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ se llama **métrico** u **ortonormal** si la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es ortonormal.

Si $\mathcal{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es un sistema de referencia ortonormal y A, B, y C son puntos tales que $\vec{OA} = \vec{u}_1, \vec{OB} = \vec{u}_2, \vec{OC} = \vec{u}_3$, las rectas $OA=i, OB=j$, y $OC=k$ se llaman **ejes de coordenadas cartesianas rectangulares**.

Definición: Se llaman **coordenadas cartesianas rectangulares** de un punto a sus coordenadas cartesianas cuando el sistema de referencia es métrico u ortonormal.

DISTANCIA. ESPACIO MÉTRICO

Definición: Sea A un conjunto cualquiera, no vacío. Llamamos **distancia** en A a una aplicación $d : A \times A \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ que verifique las condiciones siguientes:

$$1) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \forall x, y \in A$$

$$2) d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in A$$

$$3) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in A$$

Definición: Llamamos **espacio métrico** a un conjunto A en el que se ha definido una distancia.

DISTANCIA EN EL ESPACIO EUCLÍDEO

$$d : E^3 \times E^3 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

Proposición: La aplicación $(X, Y) \rightarrow d(X, Y) = \left| \vec{XY} \right|$ es una distancia en el espacio euclídeo E^3 .

Demostración:

EL ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO

En efecto, se cumplen las tres condiciones:

$$1) d(X, Y) = \left| \overrightarrow{XY} \right| = 0 \Leftrightarrow X = Y, \forall X, Y \in E^3$$

$$2) d(X, Y) = \left| \overrightarrow{XY} \right| = \left| \overrightarrow{YX} \right| = d(Y, X), \forall X, Y \in E^3$$

$$3) d(X, Z) = \left| \overrightarrow{XZ} \right| \leq \left| \overrightarrow{XY} \right| + \left| \overrightarrow{YZ} \right| = d(X, Y) + d(Y, Z), \forall X, Y, Z \in E^3$$

Podemos, entonces, dar la siguiente definición.

Definición: Dados dos puntos X e Y del espacio euclídeo, llamamos **distancia** entre dichos puntos al

número real: $d(X, Y) = \left| \overrightarrow{XY} \right|$; y ya el espacio euclídeo es un espacio métrico.

Cálculo de $d(X, Y)$: Si $X = (x_1, x_2, x_3)$ e $Y = (y_1, y_2, y_3)$ respecto a cierta base ortonormal, entonces

$$d(X, Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}.$$

Nota: A partir de aquí, y hasta el final del tema, mientras no se diga lo contrario, trabajaremos en el espacio euclídeo con la distancia anterior y supondremos que el sistema de referencia utilizado es ortonormal.

VECTOR PERPENDICULAR A UN PLANO

Proposición: Dado el plano $\pi \equiv ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$, el vector $\vec{n} = (a, b, c)$ es perpendicular a dicho plano. Se le llama **vector característico** de π .

Demostración:

Si $\pi \equiv X = P + t\vec{v} + s\vec{w}$, de las ecuaciones paramétricas, eliminando los parámetros

$$\begin{vmatrix} x_1 - p_1 & v_1 & w_1 \\ x_2 - p_2 & v_2 & w_2 \\ x_3 - p_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0, \text{ la ecuación general, cartesiana o implícita del plano } ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0,$$

siendo $\vec{n} = \vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = (a, b, c)$. Por tanto \vec{n} es un vector perpendicular a π .

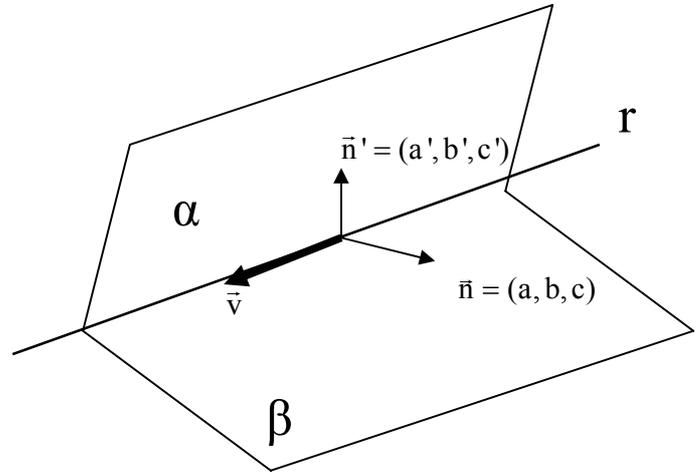
EL ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

VECTOR PARALELO A UNA RECTA

Definición: Dada la recta $r \equiv X = P + t\bar{v}$, a \bar{v} lo llamamos **vector director** de r (\bar{v} es paralelo a r).

Nota: Si $r \equiv \begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0 \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d' = 0 \end{cases}$ y

llamamos $\bar{n} = (a, b, c)$ y $\bar{n}' = (a', b', c')$, podemos obtener un vector director haciendo $\bar{v} = \bar{n} \wedge \bar{n}'$.



ÁNGULOS

Ángulo entre dos planos.

Definición: Se llama **ángulo entre dos planos** al menor de los ángulos diedros que dichos planos forman al cortarse.

Proposición Sean los planos $\begin{cases} \pi \equiv ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0 \\ \pi' \equiv a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d' = 0 \end{cases}$. Se verifica, entonces, que:

$$\cos(\pi, \pi') = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

Ángulo entre dos rectas.

Definición: Se llama **ángulo entre dos rectas** al menor de los ángulos que forman sus paralelas por un punto cualquiera. Es el ángulo entre sus vectores directores.

Proposición Sean las rectas $r \equiv \frac{x_1 - p_1}{v_1} = \frac{x_2 - p_2}{v_2} = \frac{x_3 - p_3}{v_3}$ y $r' \equiv \frac{x_1 - p'_1}{v'_1} = \frac{x_2 - p'_2}{v'_2} = \frac{x_3 - p'_3}{v'_3}$. Se

verifica, entonces, que:

EL ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO

$$\cos(r, r') = \frac{|v_1 v_1' + v_2 v_2' + v_3 v_3'|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \sqrt{v_1'^2 + v_2'^2 + v_3'^2}}$$

Ángulo entre recta y plano.

Definición: Se llama **ángulo entre una recta y un plano** al ángulo entre dicha recta y su proyección ortogonal sobre el plano.

Proposición Sean la recta $r \equiv \frac{x_1 - p_1}{v_1} = \frac{x_2 - p_2}{v_2} = \frac{x_3 - p_3}{v_3}$ y el plano $\pi \equiv ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$. Se verifica, entonces, que:

$$\text{sen}(r, \pi) = \frac{|v_1 a + v_2 b + v_3 c|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

PERPENDICULARIDAD Y PARALELISMO ENTRE PLANOS, ENTRE RECTAS Y ENTRE PLANOS Y RECTAS.

Perpendicularidad y paralelismo entre dos planos.

Definición: Dos planos π y π' , con vectores perpendiculares \bar{n} y \bar{n}' , respectivamente, son paralelos cuando \bar{n} y \bar{n}' , lo son. Análogamente, π y π' , son perpendiculares cuando lo son \bar{n} y \bar{n}' .

Proposición Sean los planos $\begin{cases} \pi \equiv ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0 \\ \pi' \equiv a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d' = 0 \end{cases}$. Se verifica, entonces, que:

$$1) \pi // \pi' \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

$$2) \pi \perp \pi' \Leftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0$$

Perpendicularidad y paralelismo entre dos rectas.

Definición: Sean r y r' dos rectas con vectores directores \bar{v} y \bar{v}' , respectivamente. Decimos que r y r' son paralelas cuando lo son \bar{v} y \bar{v}' . Análogamente r y r' son perpendiculares cuando lo son \bar{v} y \bar{v}' .

EL ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

Proposición Sean las rectas $r \equiv \frac{x_1 - p_1}{v_1} = \frac{x_2 - p_2}{v_2} = \frac{x_3 - p_3}{v_3}$ y $r' \equiv \frac{x_1 - p'_1}{v'_1} = \frac{x_2 - p'_2}{v'_2} = \frac{x_3 - p'_3}{v'_3}$. Se

verifica, entonces, que: 1) $r // r' \Leftrightarrow \frac{v_1}{v'_1} = \frac{v_2}{v'_2} = \frac{v_3}{v'_3}$ 2) $r \perp r' \Leftrightarrow v_1 v'_1 + v_2 v'_2 + v_3 v'_3 = 0$

Perpendicularidad y paralelismo entre una recta y un plano.

Definición: Sea una recta r con vector director \bar{v} y un plano π , con vector perpendicular \bar{n} . Decimos que r y π son paralelos cuando \bar{v} y \bar{n} son perpendiculares. Análogamente, r y π son perpendiculares cuando \bar{v} y \bar{n} son paralelos.

Proposición Sean la recta $r \equiv \frac{x_1 - p_1}{v_1} = \frac{x_2 - p_2}{v_2} = \frac{x_3 - p_3}{v_3}$ y el plano $\pi \equiv ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$ Se

verifica, entonces, que:

$$1) r // \pi \Leftrightarrow v_1 a + v_2 b + v_3 c = 0 \quad 2) r \perp \pi \Leftrightarrow \frac{v_1}{a} = \frac{v_2}{b} = \frac{v_3}{c}$$

DISTANCIAS

Distancia de un punto a un plano

Proposición: sea el plano $\pi \equiv ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$ y el punto $P = (p_1, p_2, p_3)$. La distancia de P a

π viene dada por: $d(P, \pi) = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

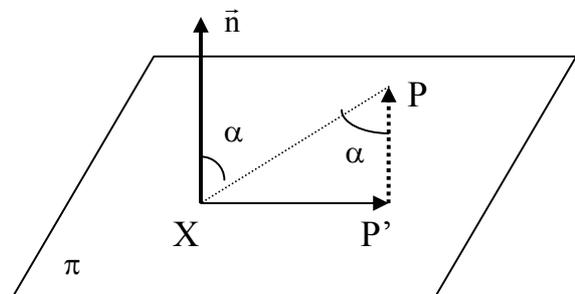
Demostración:

Se define: $d(P, \pi) = \text{Inf} \{d(P, X) / X \in \pi\}$.

Sea $P' \in \pi$ la intersección de la perpendicular a π trazada desde P .

Entonces $d(P, \pi) = d(P, P') = d$ y de la definición de producto escalar:

$$\overline{XP} \cdot \bar{n} = |\overline{XP}| \cdot |\bar{n}| \cos \alpha = |\bar{n}| d \Rightarrow$$



EL ESPACIO AFÍN

$$d = \frac{|\overline{XP} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{|(p_1 - x_1, p_2 - x_2, p_3 - x_3) \cdot (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 - ax_1 - bx_2 - cx_3|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

En particular, si el punto es el origen $O(0,0,0)$: $d(O, \pi) = \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Distancia de un punto a una recta

Proposición: Sea la recta $r \equiv \frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$ (un punto cualquiera $A(x_0, y_0, z_0)$ y el vector director $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ de la recta) y el punto $P = (p_1, p_2, p_3)$. La distancia de P a r viene dada por:

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{\left| \begin{matrix} p_2 - y_0 & p_3 - z_0 \\ v_2 & v_3 \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} p_3 - z_0 & p_2 - y_0 \\ v_3 & v_2 \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} p_1 - x_0 & p_2 - y_0 \\ v_1 & v_2 \end{matrix} \right|^2}}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Nota: En vez de aplicar la fórmula anterior, si se traza por P un plano π perpendicular a r , la distancia buscada es $d=d(P, Q)$, siendo Q el punto en el que el plano π corta a r .

Demostración:

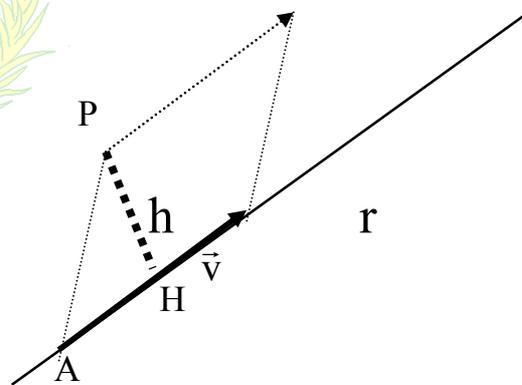
Se define: $d(P, r) = \text{Inf} \{d(P, X) / X \in r\}$.

Sea $A \in r$, el área del paralelogramo formado

por los vectores \overrightarrow{AP} y \vec{v} es:

$$S = |\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}| = |\vec{v}| \cdot h \Rightarrow$$

$$d(P, r) = d(P, H) = h = \frac{|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$



Distancia entre dos planos paralelos.

Sean π y π' dos planos paralelos. Sea r una recta perpendicular a ambos. Sean $P = r \cap \pi$ y $Q = r \cap \pi'$. Entonces, la distancia entre π y π' viene dada por $d=d(P, Q)$.

EL ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

Distancia entre dos rectas.

- Si las **rectas son paralelas**, r/r' , se construye un plano π perpendicular a ambas. Sean $P = r \cap \pi$ y $Q = r' \cap \pi$. Entonces $d(r,r')=d(P,Q)$.

- Si las **rectas se cruzan**:

1. $d(r,r') = \frac{\left| \left[\overrightarrow{PQ}, \vec{v}, \vec{v}' \right] \right|}{|\vec{v} \wedge \vec{v}'|}$, siendo \vec{v} y \vec{v}' los vectores directores de r y r' , respectivamente, P y Q sendos puntos de r y r' .

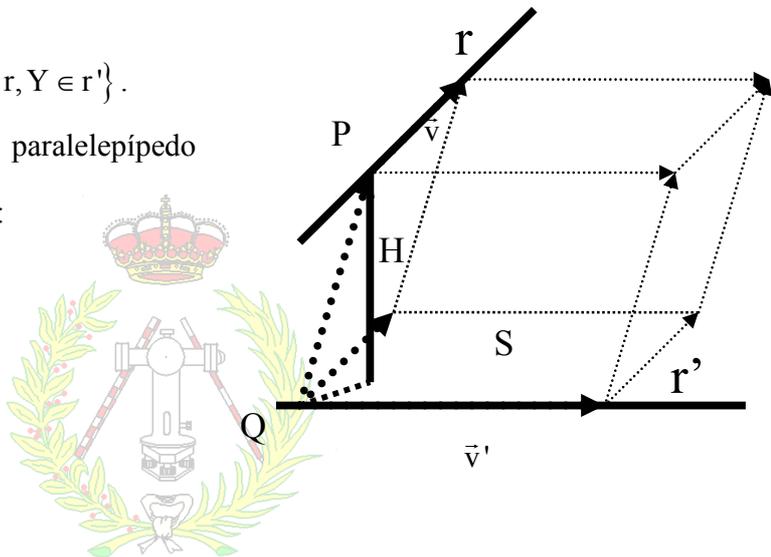
Demostración:

Se define: $d(r,r') = \text{Inf} \{d(X,Y) / X \in r, Y \in r'\}$.

Sean $P \in r, Q \in r'$, el volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\overrightarrow{PQ}, \vec{v}$ y \vec{v}' es:

$$V = S \cdot H = \left| \left[\vec{v} \wedge \vec{v}' \right] \cdot H \right| = \left| \left[\overrightarrow{PQ}, \vec{v}, \vec{v}' \right] \right| \Rightarrow$$

$$H = d(r,r') = \frac{\left| \left[\overrightarrow{PQ}, \vec{v}, \vec{v}' \right] \right|}{|\vec{v} \wedge \vec{v}'|}$$



2. Sea s la recta perpendicular común a r y a r' . Sean $P = r \cap s$ y $Q = r' \cap s$. Entonces $d(r,r')=d(P,Q)$.

Cálculo de la recta s perpendicular común a r y a r' :

$s = \pi \cap \pi'$; siendo $\pi \equiv$ plano que contiene a la recta r y su vector característico es perpendicular a los vectores $\vec{v}, \vec{v} \wedge \vec{v}'$ y $\pi' \equiv$ plano que contiene a la recta r' y su vector característico es perpendicular a los vectores \vec{v}' y $\vec{v} \wedge \vec{v}'$.

ECUACIÓN NORMAL DEL PLANO.

Definición: Se dice que la **ecuación** de un **plano** es **normal** cuando el vector perpendicular al plano es unitario. La ecuación normal del plano $\pi \equiv ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$ es la siguiente:

$$\pi \equiv \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}y + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}z + \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0,$$

EL ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO

es decir, $\cos\alpha x + \cos\beta y + \cos\gamma z + d(O, \pi) = 0$, siendo $\cos\alpha, \cos\beta$ y $\cos\gamma$ los cosenos directores del vector perpendicular al plano π .

ÁREAS

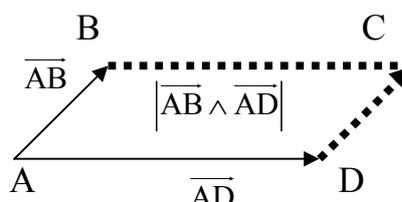
Área del paralelogramo.

El área del paralelogramo cuyos vértices son

$$A = (a_1, a_2, a_3), \quad B = (b_1, b_2, b_3),$$

$$C = (c_1, c_2, c_3) \text{ y } D = (d_1, d_2, d_3), \text{ puede}$$

calcularse mediante la fórmula:



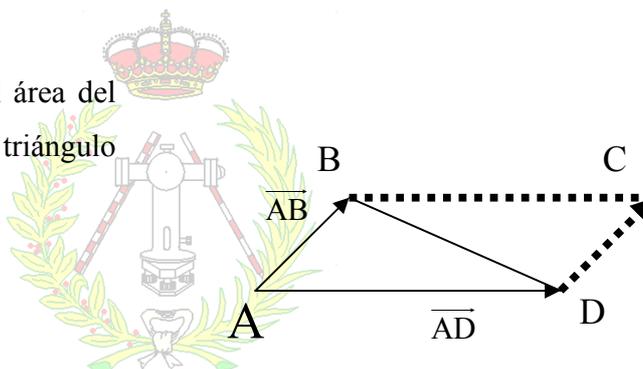
$$\text{Área} = \left| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} \right| = \sqrt{\begin{vmatrix} b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_3 - a_3 & b_1 - a_1 \\ d_3 - a_3 & d_1 - a_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ d_1 - a_1 & d_2 - a_2 \end{vmatrix}^2}$$

Área del triángulo

El **área del triángulo** ABD es $\frac{1}{2}$ del área del paralelogramo ABCD, luego: **área del triángulo**

ABD:

$$\frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} \right|.$$



Área de un polígono plano

Se descompone el polígono en triángulos que sólo tengan en común un lado o un vértice y se obtiene el área de cada uno de ellos, el área del polígono será la suma de dichas áreas

VOLÚMENES

Volumen de un paralelepípedo

El volumen del paralelepípedo que tiene a los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ y \overrightarrow{AE} como aristas, siendo $A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3), D = (d_1, d_2, d_3)$, y $E = (e_1, e_2, e_3)$ puede calcularse mediante la

fórmula:

$$V = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & d_1 & d_2 & d_3 \\ 1 & e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix}$$

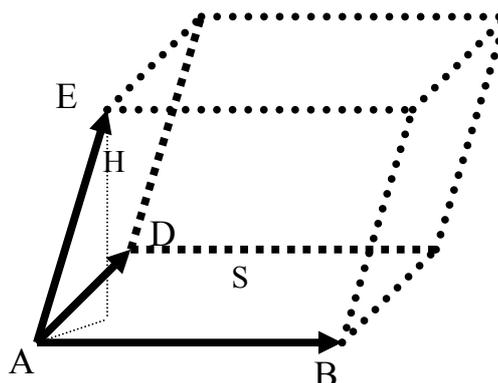
EL ESPACIO AFÍN

Demostración:

Se consideran las tres aristas concurrentes,

$$V = \left| \left[\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE} \right] \right| = \left| \overline{AB} \cdot (\overline{AD} \wedge \overline{AE}) \right| =$$

$$\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \\ e_1 - a_1 & e_2 - a_2 & e_3 - a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & d_1 & d_2 & d_3 \\ 1 & e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix}$$



Volumen del tetraedro

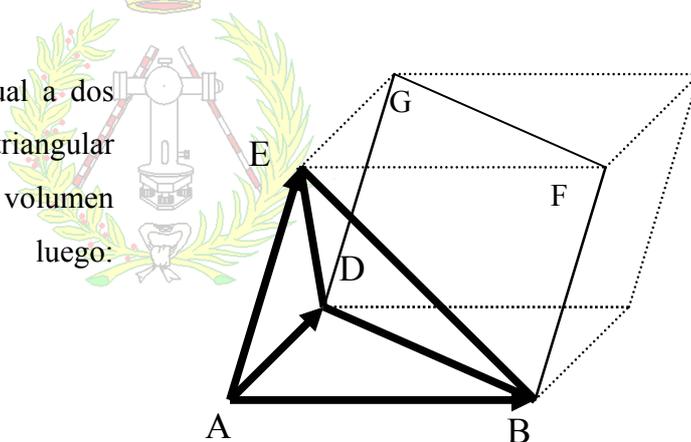
Con la misma notación del apartado anterior, el volumen del tetraedro ABDE viene dado por:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & d_1 & d_2 & d_3 \\ 1 & e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix}$$

Demostración:

El volumen del paralelepípedo es igual a dos veces el volumen del prisma triangular ABDEFG y este a su vez tres veces el volumen del tetraedro ABDE, luego:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & d_1 & d_2 & d_3 \\ 1 & e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix}$$



Nota: El determinante puede ser un número positivo o negativo, por lo que el volumen será el valor absoluto de dicho número.

Volumen de una pirámide

El volumen de una pirámide se obtiene calculando el área de la base, S, y la distancia del vértice a la base, h, con la siguiente fórmula $V = 1/3 S \cdot h$.

Volumen de un poliedro convexo

Se toma un punto interior de la figura y se consideran tantas pirámides como caras tiene el poliedro.