b. f es analítica en z_0 si f' existe en una vecindad de z_0.
Una función analítica en **C** se llama entera.
Si $f'(z_0)$ entonces f es continua en z_0.
Teorema de Cauchy – Riemann. Si f(z)=u+iv es analítica en $z_0=x_0+iy_0$ entonces las funciones u y v satisfacen: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ en (x_0, y_0)

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} \qquad f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y} \qquad f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

f(z)=u+iv es analítica en (x_0,y_0) si y solo si u y v tienen primeras derivadas parciales continuas en (x_0,y_0) y satisfacen las ecuaciones de Cauchy – Riemann en (x_0,y_0).
Si f y g son analíticas en A, entonces:
f+g es analítica en A y (f+g)' = f' + g'.
fg es analítica en A y (fg)' = fg' + f'g.
f/g es analítica en A y $(f/g)'=(gf'-fg')/g^2$ $g\neq 0$.

Integrales:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b[u(x,y)+iv(x,y)][x'(t)+iy'(t)]dt$$

$$\int_\gamma (u,-v)\cdot(dx,dy)+i\int_\gamma (v,u)\cdot(dx,dy)$$

$$\int_\gamma [f(z)+g(z)]dz=\int_\gamma f(z)dz+\int_\gamma g(z)dz$$

$$\int_{-\gamma} f(z)dz=-\int_\gamma f(z)dz$$

$$\int_{\gamma 1+\gamma 2} f(z)dz=\int_{\gamma 1} f(z)dz+\int_{\gamma 2} f(z)dz$$

$\int_\gamma f(z)dz=\int_\Gamma f(z)dz$ Si Γ es una reparametrización de γ.
Si ∃ F analítica tal que F'=f entonces:

$$\int_\gamma f(z)dz=F(\gamma(b))-F(\gamma(a))=F(z)\Big|_{\gamma(a)}^{\gamma(b)}$$

Teorema de Cauchy – Goursat. Si f es analítica dentro y sobre una curva cerrada simple, entonces:

$$\oint_\gamma f(z)dz=0$$

Si f es analítica en una región simplemente conexa A y γ es suave en A, entonces: $\oint_\gamma f(z)dz=0$ ·

Análisis de Fourier
Si n y m ∈ Z, no negativos distintos,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}(mx)\,\mathrm{sen}(nx)dx=0$$

Para cualquier par de enteros m y n

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\,\mathrm{sen}(nx)dx=0$$

Para cualquier entero positivo n:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}^2(mx)dx=\pi$$

Sea f una función integrable en [-L, L], los coeficientes de fourier en [-L, L] son: $a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)dx$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})dx \quad b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{L})dx$$

La serie de Fourier de f es:

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+b_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

Sea f una función integrable en [-L, L]. Si f es par ⇒ $\int_{-L}^{L}f(x)dx=2\int_0^L f(x)dx$ Si f es impar $\int_{-L}^{L}f(x)dx=0$ Si f es par, la serie de fourier es

$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$ en donde $a_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$ y

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})dx$$

Si f es impar su serie de Fourier es $\sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$ en

donde $b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{L})dx$

Si f continua en [-L, L] y f(L)=f(-L) y f' c.p.t entonces:

$$f'(x)=\frac{\pi}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-na_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+nb_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

$$\int_{-L}^{x}f(t)dt=a_0(x+L)+\frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{a_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)-b_n\left[\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)-\cos(n\pi)\right]\right\}$$

La serie de Fourier en cosenos de f en [0, L] es como la serie de una función par. La serie de Fourier en senos es como la serie de una función impar.
La transformada finita de Fourier en senos F_s de f se def:
$F_s(n)=\int_0^{\pi}f(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx$. Sean f y f' cont en [0, pi], f'' c.p.t. ⇒ $S_n\{f''(x)\}=-n^2F_s(n)+nf(0)-n(-1)^n f(\pi)$
con n=1,2,3,...
La transformada finita de Fourier en cosenos F_c de f:
$F_c(n)=\int_0^{\pi}f(x)\cos(nx)dx$. Sean f y f' cont en [0, pi], f'' c.p.t. ⇒ $C_n\{f''(x)\}=-n^2F_C(n)-f'(0)+(-1)^n f'(\pi)$
con n=1,2,3,...
Serie de Fourier compleja de f (con periodo T):
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\omega 0t}$ donde ω0=2π/T y

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-in\omega 0t}dt$$

La integral de Fourier o representación integral:
$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos(\omega t)+B(\omega)\,\mathrm{sen}(\omega t)]d\omega$ t ∈ R en donde:

$A(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos(\omega\xi)d\xi$ y $B(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\,\mathrm{sen}(\omega\xi)d\xi$

La integral de Fourier en cosenos: $\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos(\omega t)]d\omega$

donde $A(\omega)=2\int_0^{\infty}f(\xi)\cos(\omega\xi)d\xi$ pasa lo mismo con la integral de Fourier en senos.
La integral de fourier compleja: $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[C(\omega)e^{i\omega t}\right]d\omega$

donde: $C(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{i\omega\xi}d\xi$

La transformada de fourier:

$$F\{f(t)\}=F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\omega t}dt$$

La transformada inversa de Fourier:

$$F^{-1}\{F(\omega)\}=f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

Tabla de derivadas:

$\boxed{\frac{d}{dx}x=1}$ $\boxed{\frac{d}{dx}u^n=nu^{n-1}\frac{du}{dx}}$ $\boxed{\frac{d}{dx}uv=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}}$

$\frac{d}{dx}\sqrt{u}=\frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{du}{dx}$ $\frac{d}{dx}\frac{u}{v}=\frac{v(du/dx)-u(dv/dx)}{v^2}$

si y=f(u), u=g(x): $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ $\boxed{\frac{d}{dx}\mathrm{sen}\,u=\cos u\frac{du}{dx}}$

$\frac{d}{dx}\cos u=-\mathrm{sen}\,u\frac{du}{dx}$ $\frac{d}{dx}\mathrm{tg}\,u=\sec^2 u\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}\cot u=-\csc^2 u\frac{du}{dx}$ $\boxed{\frac{d}{dx}\sec u=\sec u\,\mathrm{tg}\,u\frac{du}{dx}}$

$\boxed{\frac{d}{dx}\csc u=-\csc u\cot u\frac{du}{dx}}$ $\frac{d}{dx}\mathrm{arcsen}\,u=\frac{du/dx}{\sqrt{1-u^2}}$

$\frac{d}{dx}\arccos u=-\frac{du/dx}{\sqrt{1-u^2}}$ $\boxed{\frac{d}{dx}\mathrm{arctg}\,u=\frac{du/dx}{1+u^2}}$

$\boxed{\frac{d}{dx}arc\cot u=-\frac{du/dx}{1+u^2}}$ $\frac{d}{dx}arc\sec u=\frac{du/dx}{u\sqrt{u^2-1}}$

$\frac{d}{dx}arc\csc u=-\frac{du/dx}{u\sqrt{u^2-1}}$ $\frac{d}{dx}\mathrm{senh}\,u=\cosh u\frac{du}{dx}$

$$\frac{d}{dx}\cosh u=\mathrm{senh}\,u\frac{du}{dx}$$

$\frac{d}{dx}\mathrm{tgh}\,u=\sec h^2u\frac{du}{dx}$ $\boxed{\frac{d}{dx}c\,\mathrm{tgh}\,u=-\cosh^2 u\frac{du}{dx}}$

$\frac{d}{dx}\sec hu=-\sec hu\,\mathrm{tgh}\,u\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}\csc hu=-\csc hu\coth u\frac{du}{dx}$ $\boxed{\frac{d}{dx}\ln u=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}}$

$\frac{d}{dx}\log_a u=\frac{1}{u\ln a}\frac{du}{dx}$ $\boxed{\frac{d}{dx}e^u=e^u\frac{du}{dx}}$ $\frac{d}{dx}a^u=a^u\ln a\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}u^v=vu^{v-1}\frac{du}{dx}+u^v\ln u\frac{dv}{dx}$

INTEGRALES:

$\int du=u+c$ $\boxed{\int(du+dv-dw)=u+v-w+c}$

$\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+c; n\neq -1$ $\int\frac{du}{u}=\ln u+c$

$\boxed{\int e^u du=e^u+c}$ $\int a^u du=\frac{a^u}{\ln a}+c; a=cte.$

$\int\ln u\,du=u(\ln u-1)+c$ $\boxed{\int ue^u du=e^u(u-1)+c}$

$\int\mathrm{sen}\,u\,du=-\cos u+c$ $\int\cos u\,du=\mathrm{sen}\,u+c$

$\int\mathrm{tg}\,u\,du=\ln|\sec u|+c$ $\int\cot u\,du=\ln|\mathrm{sen}\,u|+c$

$\int\sec u\,du=\ln|\sec u+\mathrm{tg}\,u|+c$

$\int\csc u\,du=\ln|\csc u-\cot u|+c$ $\int\sec^2 u\,du=\mathrm{tg}\,u+c$

$\boxed{\int\csc^2 u\,du=-\cot u+c}$ $\int\sec u\,\mathrm{tg}\,u\,du=\sec u+c$

$\int\csc u\cot u\,du=-\csc u+c$ $\boxed{\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{1}{a}+c}$

$$\int\frac{du}{u^2-a^2}=\tfrac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+c=-\tfrac{1}{2}\mathrm{tgh}^{-1}\tfrac{u}{a}+c$$

$$\int\frac{du}{a^2-u^2}=\tfrac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|+c=\tfrac{1}{2}\mathrm{tgh}^{-1}\tfrac{u}{a}+c$$

$$\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\mathrm{arcsen}\frac{u}{a}+c$$

$$\boxed{\int\frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right|+c}$$

$$\boxed{=\mathrm{senh}^{-1}\frac{u}{a}+c(+)=\cosh^{-1}\frac{u}{a}+c(-)}$$

$$\int\frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}}=\frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a}+c$$

$$\int\sqrt{a^2-u^2}\,du=\tfrac{1}{2}\left(u\sqrt{a^2-u^2}+a^2\,\mathrm{sen}^{-1}\tfrac{u}{a}\right)$$

$$\int\sqrt{u^2\pm a^2}\,du=\tfrac{1}{2}(u\sqrt{u^2\pm a^2}\pm a^2\ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right|)+c$$