UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL CORDOBA
DEPARTAMENTO ELECTRONICA

Carrera *: Ingeniería Electrónica*
Asignatura *: Análisis de Señales y Sistemas*

T.P.N 10 : *Series y transformada de Fourier, Transformada inversa de Fourier, aplicaciones en señales de uso en comunicaciones y control.*

Rev 1.2 *Enero 2001*

Serie trigonométrica de Fourier

$$f(t) = a_0 + a_1\, Cos\, \nu t + a_2\, Cos\, 2\nu t + a_3\, Cos\, 3\nu t + ...$$
$$+ b_1\, Sen\, \nu t + b_2\, Sen\, 2\nu t + b_3\, Sen\, 3\nu t + ...$$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt}$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\; Cos\; n\nu\; t\,dt = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\; Cos\; n\nu\; t\,dt}$$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\; Sen\; n\nu\; t\,dt = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\; Sen\; n\nu\; t\,dt}$$

MATHEMATICA

```
<< "Calculus`FourierTransform`"

FourierTrigSeries[f, {x, -5, 5}, 10]
```

$$\frac{3}{2} + \frac{6\,\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi x}{5}\right]}{\pi} + \frac{2\,\mathrm{Sin}\left[\frac{3\pi x}{5}\right]}{\pi} + \frac{6\,\mathrm{Sin}[\pi x]}{5\pi} + \frac{6\,\mathrm{Sin}\left[\frac{7\pi x}{5}\right]}{7\pi} + \frac{2\,\mathrm{Sin}\left[\frac{9\pi x}{5}\right]}{3\pi}$$

Serie exponencial de Fourier

$$f(t) = F_0 + F_1 e^{Jvt} + F_2 e^{J2vt} + F_3 e^{J3vt} + \ldots + F_n e^{Jnvt} + \ldots$$
$$+ F_{-1} e^{-Jvt} + F_{-2} e^{-J2vt} + F_3 e^{-J3vt} + \ldots + F_{-n} e^{-Jnvt} + \ldots$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{Jnvt} \quad para \ \ (t_0 < t < t_0 + T)$$

$$F_n = \frac{\int_{t0}^{t_0+T} f(t)(e^{Jnwt})^* \, dt}{\int_{t_0}^{t_0+T} e^{Jnvt}(e^{Jnvt})^* \, dt} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-Jnwt} dt$$

MATHEMATICA

```
<< "Calculus`FourierTransform`"
```

```
FourierExpSeries[x, {x, -π, π}, 2]
```

$$\mathrm{I}E^{-\mathrm{I}x} - \mathrm{I}E^{\mathrm{I}x} + \frac{E^{-2\mathrm{I}x}\left(\frac{1}{4}(-1-2\mathrm{I}\pi) + \frac{1}{4}(1-2\mathrm{I}\pi)\right)}{2\pi} + \frac{E^{2\mathrm{I}x}\left(\frac{1}{4}(-1+2\mathrm{I}\pi) + \frac{1}{4}(1+2\mathrm{I}\pi)\right)}{2\pi}$$

Relación de coeficientes entre la serie trigonométrica y exponencial

$$a_0 = F_0$$
$$a_n = F_n + F_{-n}$$
$$b_n = J(F_n + F_{-n})$$
$$F_n = \frac{1}{2}(a_n + Jb_n)$$

Espectro de frecuencias de Fourier

$$F(v) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \; e^{-Jnv\,t} \, dt$$

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(v) e^{Jnv\,t}$$

Transformada de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} F(v) e^{J\,v\,t} dv$$

$$F(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-J\,v\,t} dt$$

La función $F(v)$ *es la densidad espectral , y otro modo de expresar las transformadas es:*

$$\mathcal{F}\,[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-J\,v\,t} dt$$

$$\mathcal{F}^{-1}\,[F(v)] = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} F(v) e^{J\,v\,t} dv$$

MATHEMATICA

```
<< "Calculus`FourierTransform`"
```

$$\mathrm{FourierTransform}[E^{-t} * \mathrm{UnitStep}[t], t, w]$$

$$\frac{1}{1 - I\,w}$$

APLICACIONES

10.1) Hallar los coeficientes de Fourier correspondientes a la función , y la serie correspondiente.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -5 < x < 0 \\ 3 & 0 < x < 5 \end{cases} \qquad Periodo = 10$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f_{(t)} Cos(n\nu t)dt = \frac{2}{10}\left[\int_{-5}^{0} 0 + \int_0^5 3Cos(n\nu t)dt\right] = \frac{1}{5}\left[\int_0^5 3Cos\left(\frac{np}{5}t\right)dt\right] =$$

Resolución analítica

$$\nu = \frac{2p}{T} = \frac{p}{5} \qquad u = \frac{np}{5}t \therefore du = \frac{np}{5}t$$

$$a_n = \frac{1}{5}\int_0^5 3\frac{5}{np} Cos\left(\frac{np}{5}t\right)dt = \frac{3}{np} Sen\left(\frac{np}{5}t\right)\Bigg|_0^5 = \frac{3}{np}[Sen\,0 - Sen\,p] = 0$$

$$a_n = 0 \quad n \neq 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f_{(t)} Sen(n\nu t)dt = \frac{2}{10}\left[\int_{-5}^{0} 0 + \int_0^5 3\,Sen(n\nu t)dt\right] = \frac{1}{5}\left[\int_0^5 3\,Sen\left(\frac{np}{5}t\right)dt\right] =$$

$$b_n = \frac{1}{5}\int_0^5 3\frac{5}{np} Sen\left(\frac{np}{5}t\right)dt = \frac{3}{np} Cos\left(\frac{np}{5}t\right)\Bigg|_0^5 = \frac{3}{np}[-Cos(np) + Cos0] =$$

$$b_n = \frac{3}{np}[1 - Cos(np)]$$

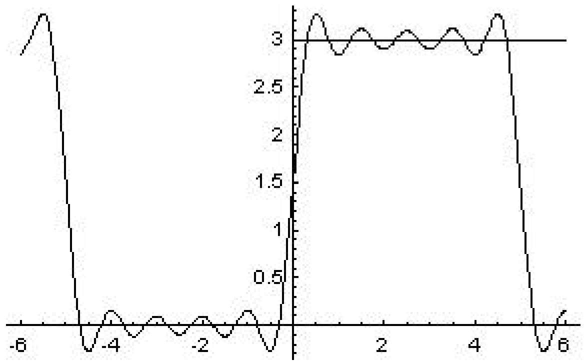
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f_{(t)}dt = \frac{1}{10}\left[\int_{-5}^{0} 0 + \int_0^5 3\,dt\right] = \frac{1}{10}3t\Big|_0^5 = \frac{1}{10}3(5-0) = \frac{3}{2}$$

Mathematica

```
f = 3 UnitStep[t]
```

```
g = FourierTrigSeries[f, {t, -5, 5}, 20]
```

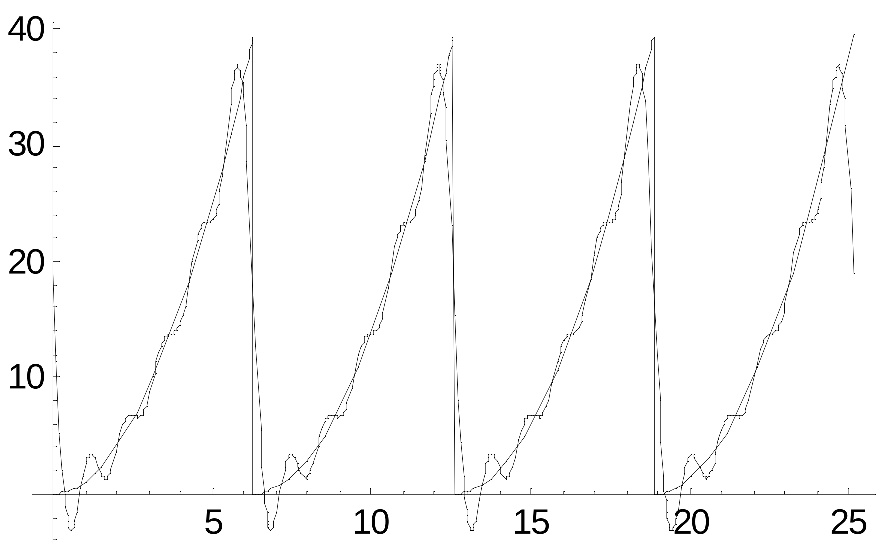
$$\frac{3}{2}+\frac{6\,\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi t}{5}\right]}{\pi}+\frac{2\,\mathrm{Sin}\left[\frac{3\pi t}{5}\right]}{\pi}+\frac{6\,\mathrm{Sin}[\pi t]}{5\pi}+\frac{6\,\mathrm{Sin}\left[\frac{7\pi t}{5}\right]}{7\pi}+\frac{2\,\mathrm{Sin}\left[\frac{9\pi t}{5}\right]}{3\pi}+\frac{6\,\mathrm{Sin}\left[\frac{11\pi t}{5}\right]}{11\pi}+\frac{6\,\mathrm{Sin}\left[\frac{13\pi t}{5}\right]}{13\pi}+$$
$$\frac{2\,\mathrm{Sin}[3\pi t]}{5\pi}+\frac{6\,\mathrm{Sin}\left[\frac{17\pi t}{5}\right]}{17\pi}+\frac{6\,\mathrm{Sin}\left[\frac{19\pi t}{5}\right]}{19\pi}$$



10.2) Desarrollar $F(x) = x^2 \quad 0 < x < 2p$ *en serie de Fourier*

a - Si el período es $2p$
b- Si el período no se especifica

$$\frac{4\pi^2}{3}+4\,\mathrm{Cos}[x]+\mathrm{Cos}[2x]+\frac{4}{9}\,\mathrm{Cos}[3x]+\frac{1}{4}\,\mathrm{Cos}[4x]-4\pi\,\mathrm{Sin}[x]-2\pi\,\mathrm{Sin}[2x]-\frac{4}{3}\,\pi\,\mathrm{Sin}[3x]-\pi\,\mathrm{Sin}[4x]$$



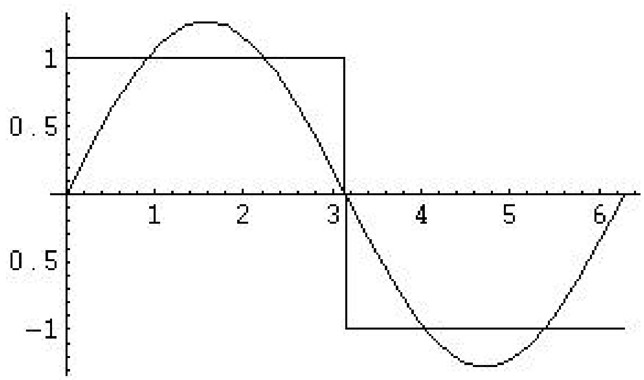
10.3) Se define una función rectangular f(t) a continuación

$$F(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < p \\ -1 & p < t < 2p \end{cases}$$

Aproximar esta función mediante la forma de onda sen t, en el intervalo $(0,2p)$ *de modo que el error cuadrático medio sea mínimo*

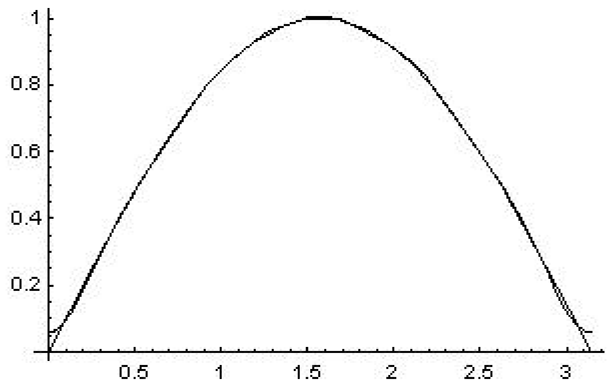
$$f(t) = Sen\ t$$

Considerando la función rectangular, demostrar que puede obtenerse una aproximación mejor mediante una gran cantidad de funciones mutuamente ortogonales.



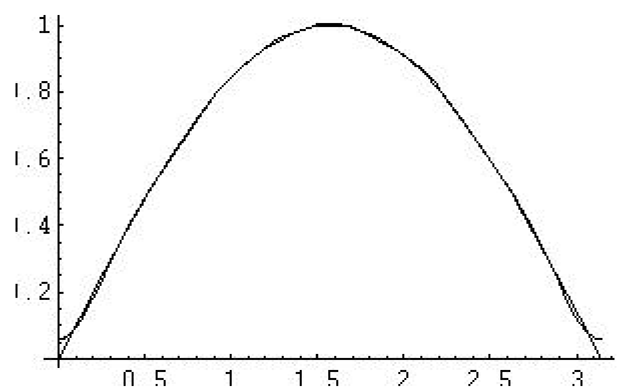
10.4) Desarrollar $f(t) = Sen\ t$ *,* $0 < t < p$ *en serie de Fourier trigonométrica*

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4\,\mathrm{Cos}[2\,x]}{3\,\pi} - \frac{4\,\mathrm{Cos}[4\,x]}{15\,\pi} - \frac{4\,\mathrm{Cos}[6\,x]}{35\,\pi} - \frac{4\,\mathrm{Cos}[8\,x]}{63\,\pi} - \frac{4\,\mathrm{Cos}[10\,x]}{99\,\pi}$$



10.5) Considerar la onda seno rectificada (onda completa), correspondiente a una función del tipo $f(t) = Sen\ t$, $0 < t < p$ *, desarrollar en serie de Fourier exponencial*

$$\frac{2}{\pi} - \frac{2E^{-2ix}}{3\pi} - \frac{2E^{2ix}}{3\pi} - \frac{2E^{-4ix}}{15\pi} - \frac{2E^{4ix}}{15\pi} - \frac{2E^{-6ix}}{35\pi} - \frac{2E^{6ix}}{35\pi} - \frac{2E^{-8ix}}{63\pi} - \frac{2E^{8ix}}{63\pi} - \frac{2E^{-10ix}}{99\pi} - \frac{2E^{10ix}}{99\pi}$$



10.6) Considersr la función periódica $f_{(t)}$ *en* $0 < t < p$ *y determinar el espectro de frecuencias de la función*

$$f_{(t)} = Sen\ t\ .$$

10.7) Desarrollar $f(x) = x$, $0 < x < 2$ *en serie de semiperíodo función seno.*

10.8) Desarrollar $f(x) = x$, $0 < x < 2$ *en serie de semiperíodo función coseno.*

10.9) Hacer la gráfica y desarrollar en serie de Fourier trigonométrica

$$F(x) = \begin{cases} 8 & 0 < x < 2 \\ -8 & 2 < x < 4 \end{cases} \qquad Periodo = 4$$

10.10) Hacer la gráfica y desarrollar en serie de Fourier trigonométrica

$$F(x) = \begin{cases} -x & -4 \leq x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq 4 \end{cases} \qquad Periodo = 8$$

10.11) Desarrollar en serie de Fourier de período 8

$$F(x) = \begin{cases} 2 - x & 0 < x < 4 \\ x - 6 & 4 < x < 8 \end{cases} \qquad Periodo = 8$$

10.12) Calcular los coeficientes a_0, a_n, b_n *de la serie trigonométrica que representa en período* $2p$ *.*

$$a) \quad F(t) = Sen\ t$$

$$b) \quad F(t) = Cos\ t$$

10.13) Desarrollar en serie de Fourier trigonométrica

$$F(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 4 \\ 8 - x & 4 < x < 8 \end{cases}$$

10.14) Graficar la función extendida periodicamente con período $2p$ *y hallar su transformada de Fourier.*

$$F(t) = \begin{cases} sent & 0 < t < p \\ 0 & p < t < 2p \end{cases}$$

10.15) Dada una onda cuadrada periódica $f(t) = \begin{cases} A & 0 < t < T/2 \\ 0 & -T/2 < t < 0 \end{cases}$, determinar

a) El espectro de frecuencias
b) F(w)
c) la función f(t)

$$F(\nu) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\ e^{-Jn\nu t} dt = \int_{-T/2}^{0} 0\, e^{-Jn\nu t} dt + \int_{0}^{T/2} A\ e^{-Jn\nu t} dt =$$

$$= A\int_{0}^{T/2} e^{-Jn\nu t} dt = -\frac{A}{Jn\nu}\int_{0}^{T/2} e^{-Jn\nu t} dt = -\frac{A}{Jn\nu}\left[e^{-Jn\nu t}\right]_{0}^{T/2} =$$

$$= -\frac{A}{Jn\nu}\left[e^{-Jn\nu\frac{T}{2}} - 1\right] = J\frac{A}{n\nu}\left[e^{-Jnp} - 1\right]$$

$$f(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{Jn\nu t} = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[J\frac{A}{n\nu}\left[e^{-Jnp} - 1\right] e^{Jn\nu t}\right]$$

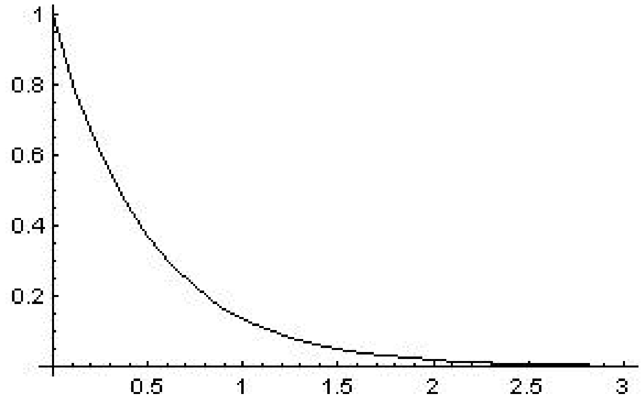
10.16) Desarrollar la función rectificada media onda en serie de Fourier trigonométrica $f(t) = \begin{cases} Sen\ t & 0 < t < p \\ 0 & p < t < 2p \end{cases}$

10.17) Considerar la onda seno rectificada (media onda), correspondiente a una función del tipo $f(t) = \begin{cases} Sen\ t & 0 < t < p \\ 0 & p < t < 2p \end{cases}$, desarrollar en serie de Fourier exponencial

10.18) Determinar el espectro de frecuencias de la función precedente.

10.19) Evaluar la transformada de Fourier de la señal exponencial unilateral (a= 2)

$$f(t) = e^{-at}u(t)$$



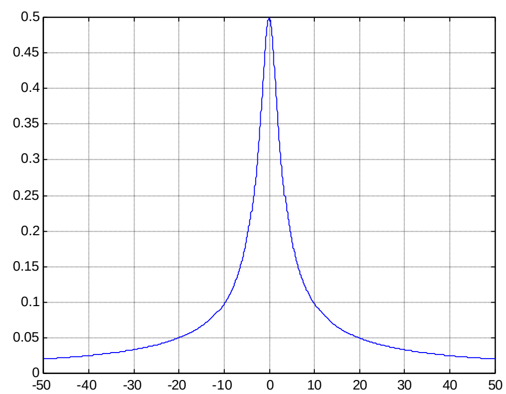
$$F(\,?\,) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-J\nu\, t} dt = -\frac{1}{2+J?}\left(e^{-\infty} - e^{0}\right) = \frac{1}{2+J?}$$

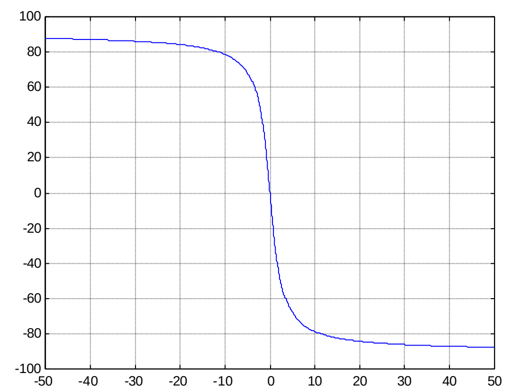
$$F(s) = \frac{1}{s+2}$$

MATLAB

```
a=[1,2];             % Coeficientes del denominador en orden decreciente
b=[1];               % Coeficientes del numerador
w=-50:.05:50;        % Rango de frecuencia  en rad/s

H=freqs(b,a,w);
mag=abs(H);
fase = angle(H);
axis([-50,50,0,.5]);

figure (1);
plot(w,mag);
title(' Espectro de frecuencias ( magnitud)');
xlabel('frecuencia, rad/s');
ylabel('magnitud');
grid;

figure(2);
```

```
fase =fase*180/pi;          % Cambio de fase de radianes a grados
axis([-50,50,-200,200]);
plot(w,fase);
title('Respuesta en frecuencia (fase)');
xlabel('frecuencia, rad/s');
ylabel('fase, degrees');
grid;
axis;
```

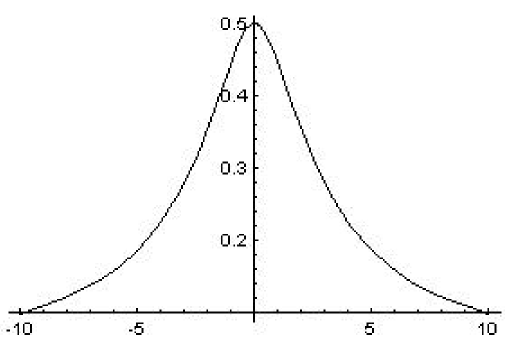


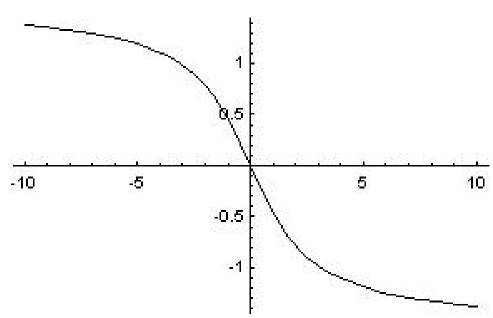


MATHEMATICA

```
g = FourierTransform[E^(-2 t) * UnitStep[t], t, w]
```

```
Plot[Abs[g], {w, -10, 10}]        Plot[Arg[g], {w, -10, 10}]
```



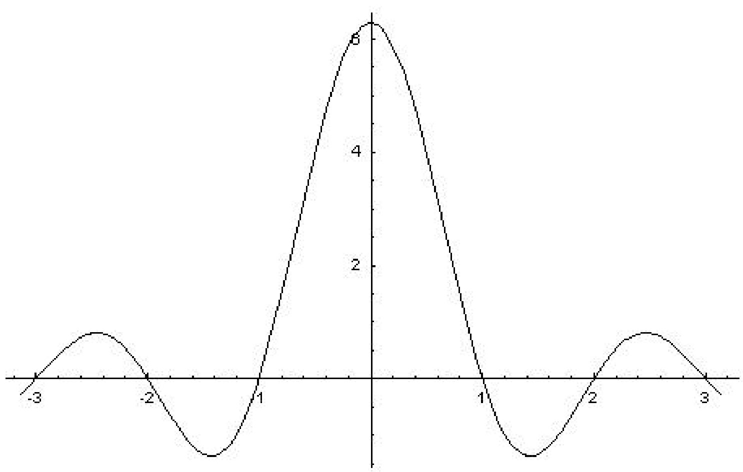


10.20) Evaluar la transformada de Fourier de la señal exponencial bilateral

$$f(t) = e^{-a|t|}$$

10.21) Evaluar la función pulso rectangular como se define a continuación

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \dfrac{T}{2} \\ 0 & |t| > \dfrac{T}{2} \end{cases}$$



10.22) Evaluar la transformada de Fourier de un impulso y de una constante.

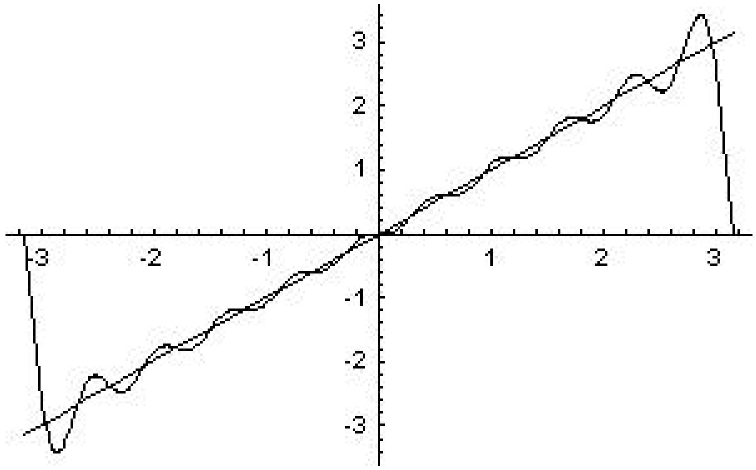
10.23) Transformada de la función signum , f(t)=sgn(t).

10.24) Determinar la serie de Fourier trigonométrica , la serie exponencial y deducir el espectro de frecuencias de la función definida a continuación.

$$f_{(q)} = q \quad para \quad -p \leq q \leq p$$

$$2\,\mathrm{Sin}[\theta] - \mathrm{Sin}[2\theta] + \frac{2}{3}\,\mathrm{Sin}[3\theta] - \frac{1}{2}\,\mathrm{Sin}[4\theta] + \frac{2}{5}\,\mathrm{Sin}[5\theta] - \frac{1}{3}\,\mathrm{Sin}[6\theta] + \frac{2}{7}\,\mathrm{Sin}[7\theta] - \frac{1}{4}\,\mathrm{Sin}[8\theta] + \frac{2}{9}\,\mathrm{Sin}[9\theta] - \frac{1}{5}\,\mathrm{Sin}[10\theta]$$

$$I E^{-I\theta} - I E^{I\theta} + \frac{E^{-2I\theta}\left(\frac{1}{4}(-1-2I\pi) + \frac{1}{4}(1-2I\pi)\right)}{2\pi} + \frac{E^{2I\theta}\left(\frac{1}{4}(-1+2I\pi) + \frac{1}{4}(1+2I\pi)\right)}{2\pi}$$

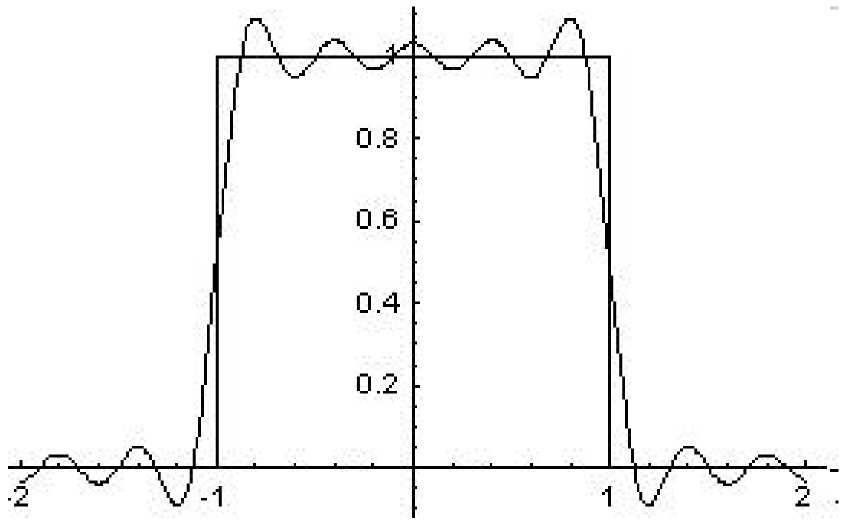


10.25) Determinar la serie de Fourier de :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & -1 < t < 1 \\ 0 & \begin{cases} -2 < t \le -1 \\ 1 \le t < 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2\,\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi t}{2}\right]}{\pi} - \frac{2\,\mathrm{Cos}\left[\frac{3\pi t}{2}\right]}{3\pi} + \frac{2\,\mathrm{Cos}\left[\frac{5\pi t}{2}\right]}{5\pi} - \frac{2\,\mathrm{Cos}\left[\frac{7\pi t}{2}\right]}{7\pi} + \frac{2\,\mathrm{Cos}\left[\frac{9\pi t}{2}\right]}{9\pi}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{E^{-\frac{1}{2} I \pi t}}{\pi} + \frac{E^{\frac{I \pi t}{2}}}{\pi} - \frac{E^{-\frac{3}{2} I \pi t}}{3\pi} - \frac{E^{\frac{3 I \pi t}{2}}}{3\pi} + \frac{E^{-\frac{5}{2} I \pi t}}{5\pi} + \frac{E^{\frac{5 I \pi t}{2}}}{5\pi}$$



Referencias :

Señales y sistemas
lan V. Oppenheim - Alan S.Willsky
Prentice Hall

Mathematica 3.0
MatLab 5.0
GrapMath 1.30C