1. El cometa Halley describe una orbita elíptica de excentricidad e ≈ 0.97. la longitud del eje mayor de la órbita es, aproximadamente, 36,18 unidades astronómicas (una u.a., distancia media entre la Tierra y el Sol, es ≈ 93 millones de millas).
   a) Hallar una ecuación en polares para la órbita con el polo en el Sol
   b) Hallar la ecuación cartesiana (eje mayor el de abscisas y origen en el centro de la cónica)
   c) ¿Cuál es la distancia más próxima al Sol (perihelio) ¿y la más lejana (afelio)?

Solución:

a) $e = 0{,}97 = \dfrac{c}{a}$, $\quad 2a = 36.18$ u.a. $\Rightarrow$ a = 18,09 u.a.

Tomamos una referencia polar de tipo1, la ecuación correspondiente de la cónica sería:

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\alpha}, \text{ donde } p = \frac{b^2}{a} \text{ y } e = \frac{c}{a};$$

como c = $a \cdot e$ = 17.5473 $\Rightarrow$ $b^2 = a^2 - c^2$ = 19, 3403627 $\Rightarrow$ $p = \dfrac{19{,}3403627}{18{,}09} \approx 1{,}069119$.

Luego, una ecuación en polares para la órbita es: $\boxed{r = \dfrac{1.069119}{1 - 0.97\cos\alpha}}$

b) La ecuación en cartesianas es $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, sustituyendo $\boxed{\dfrac{x^2}{327{,}2481} + \dfrac{y^2}{19{,}3403627} = 1}$

c) La distancia mínima (perihelio) entre el cometa Halley y el Sol es el valor de "*r*" mínimo, que se obtiene cuando el denominador $1 - 0.97\cos\alpha$ es máximo, es decir, para $\cos\alpha = -1$: $r = \dfrac{1.06911899}{1 + 0.97} \approx 0.5427$ u.a. También se obtiene con *a*-*c*.

La distancia máxima (afelio) entre el cometa Halley y el Sol es el valor de "*r*" máximo, que se obtiene cuando el denominador $1 - 0.97\cos\alpha$ es mínimo, es decir, para $\cos\alpha = 1$: $r = \dfrac{1.06911899}{1 - 0.97} \approx 35{,}63729996$ u.a. También se obtiene con $a + c$.

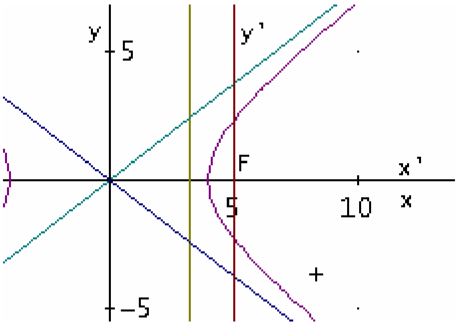
2. Dada la ecuación de la hipérbola $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$, hallar la ecuación polar de su rama derecha suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está:
   a) en el foco derecho de la hipérbola.
   b) en el foco izquierdo de la hipérbola.
   c) en el caso a), hallar la ecuación polar de sus directrices y asíntotas.

Solución:

$\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow a = 4, \mathrm{b} = 3 \Rightarrow \mathrm{c}^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow \mathrm{c} = 5$.

Por tanto, $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{4}$, $p = \dfrac{\mathrm{b}^2}{a} = \dfrac{9}{4}$, $d = \dfrac{\mathrm{b}^2}{c} = \dfrac{9}{5}$.

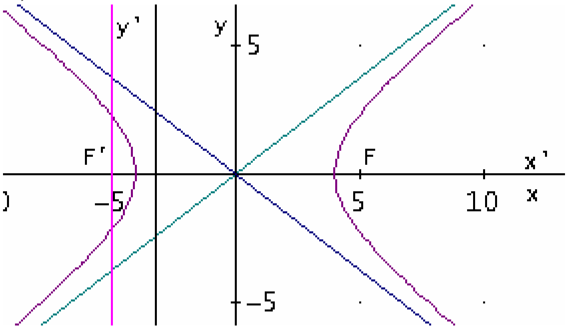
a)



La ecuación, en este caso, es:

$$r = \frac{p}{1-e\cos\alpha} = \frac{9/4}{1-5/4\cos\alpha} = \frac{9}{4-5\cos\alpha}.$$

b)



La ecuación que se debe emplear ahora es:

$$r = \frac{-p}{1-e\cos\alpha} = \frac{-9/4}{1-5/4\cos\alpha} = \frac{-9}{4-5\cos\alpha}.$$

Directrices en el caso a):

La ecuación polar de la directriz asociada al foco que coincide con el origen de la referencia polar es:

$$dir1 \equiv x = -d = -(c-\frac{a^2}{c}) = -\frac{9}{5} \Rightarrow r\cos\alpha = -\frac{9}{5} \Rightarrow \boxed{r = -\frac{9}{5\cos\alpha}}$$

La ecuación polar de la directriz asociada al foco que no coincide con el origen de la referencia polar es:

$$dir2 \equiv x = -\left(d+2\frac{a^2}{c}\right) = -(c+\frac{a^2}{c}) = -\frac{41}{5} \Rightarrow r\cos\alpha = -\frac{41}{5} \Rightarrow \boxed{r = -\frac{41}{5\cos\alpha}}$$

Asíntotas en el caso a):

Son las rectas que pasan por el centro de la hipérbola, P(-5, 0), y tienen de pendiente $\pm\frac{b}{a} = \pm\frac{3}{4}$, luego su ecuación en el sistema de referencia cartesiano asociado al polar dado es:

$$y - 0 = \pm\frac{3}{4}(x+5).$$

Pasando a polares, se obtiene: $rsen\alpha = \pm\frac{3}{4}(r\cos\alpha+5) \Rightarrow$,

$$\boxed{r = \frac{15/4}{sen\alpha - \frac{3}{4}\cos\alpha}} \quad \text{y} \quad \boxed{r = \frac{-15/4}{sen\alpha + \frac{3}{4}\cos\alpha}}$$

3. La sección de una gran antena parabólica admite como modelo la gráfica de

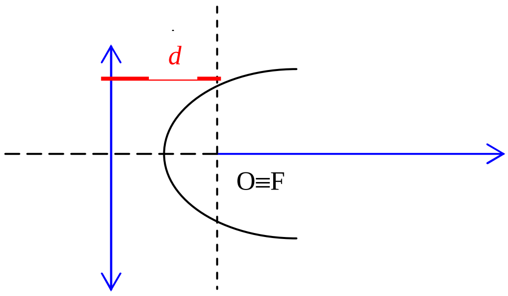
$$y = \frac{x^2}{200}, \qquad -100 < x < 100.$$

a) Hallar su ecuación polar suponiendo que la dirección del eje polar coincide con su eje de simetría y que el polo está en el foco de la parábola.

b) Ecuación polar de su directriz y distancia del foco al vértice.

c) El área de la antena.

Solución



a) La ecuación polar es de la forma: $r = \dfrac{p}{1 - e\cos\alpha}$.

De la ecuación cartesiana deducimos que $x^2 = 200y$, luego $2p = 200 \Rightarrow p = 100$, como además $e = 1$:

$$\boxed{r = \frac{100}{1-\cos\alpha}}$$

b) La ecuación de la directriz en el sistema cartesiano asociado al polar es $x = -d$, luego pasando a polares: $r\cos\alpha = -100 \Rightarrow \boxed{r = \dfrac{-100}{\cos\alpha}}$

La distancia del foco al vértice es el parámetro $p = 100$.

c) El área de la antena, es el área de la superficie de revolución generada por el arco de la parábola cuando gira alrededor del eje OY para $0 \le x \le 100$.

Como el giro es alrededor del eje de ordenadas la variable de integración es $y \Rightarrow$ despejando la variable x: $x = \sqrt{200y}$, y el intervalo de integración para y es:

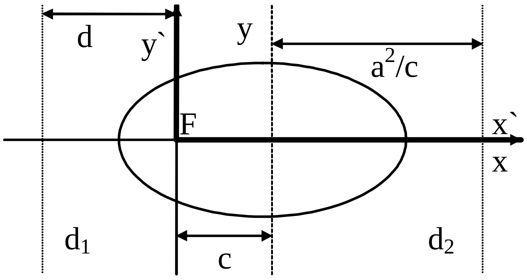
$$0 \le y \le \frac{100^2}{200} = 50 \Rightarrow \int_0^{50} 2\pi\sqrt{200y}\sqrt{1+\left(\frac{200}{2\sqrt{200y}}\right)^2}\,dy = \frac{2\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)10^4 \approx 3{,}83\cdot 10^4\ u^2,$$ es decir $\boxed{S \approx 3{,}83\cdot 10^4\ u^2}$

4. Verificar que la ecuación $r = \dfrac{21}{5-2\cos\alpha}$ determina una elipse y hallar los semiejes y las ecuaciones polares de sus directrices.

Solución:

$$r = \frac{21}{5-2\cos\alpha} = \frac{21/5}{1-2/5\cos\alpha} \Rightarrow p = \frac{21}{5},\ e = \frac{2}{5}$$

Por ser $e < 1$, se trata efectivamente de una *elipse*; y, por la forma de la ecuación, un foco está en el polo, la directriz no corta al eje polar y la cónica y el foco están en el mismo semiplano respecto de la directriz.



$$p = de \Rightarrow d = \frac{p}{e} = \frac{21/5}{2/5} = \frac{21}{2}\ .$$

$$a = \frac{p}{1-e^2} = 5,\ b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \sqrt{21}\ .$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 21 = 4 \Rightarrow c = 2\ .$$

La directriz d_1 tiene de ecuación:

$$x = -d = -\frac{21}{2} \Rightarrow r\cos\alpha = -\frac{21}{2} \Rightarrow \boxed{d_1 \equiv r = -\frac{21}{2\cos\alpha}}$$

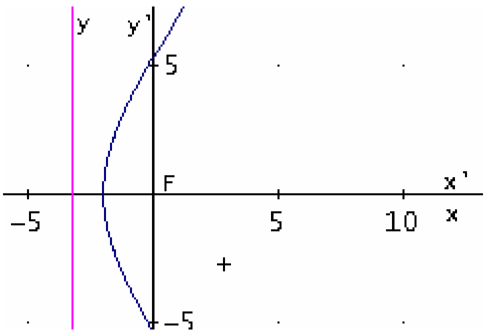
La otra directriz d_2 tiene de ecuación:

$$x = c + \frac{a^2}{c} = 2 + \frac{25}{2} = \frac{29}{2} \Rightarrow r\cos\alpha = \frac{29}{2} \Rightarrow \boxed{d_2 \equiv r = \frac{29}{2\cos\alpha}}$$

5. Verificar que la ecuación $r = \dfrac{16}{3-5\cos\alpha}$ determina la rama derecha de una hipérbola y hallar las ecuaciones polares de sus directrices y asíntotas.

Solución:

$$r = \frac{16}{3-5\cos\alpha} = \frac{16/3}{1-5/3\cos\alpha} \Rightarrow p = \frac{16}{3},\ \mathrm{e} = \frac{5}{3}\ .$$



Por ser $e > 1$, se trata de una rama de una hipérbola. A la vista de la ecuación, la cónica y el foco están del mismo lado respecto de la directriz y el eje polar no corta a dicha recta, luego, la situación es la que refleja la figura de la izquierda.

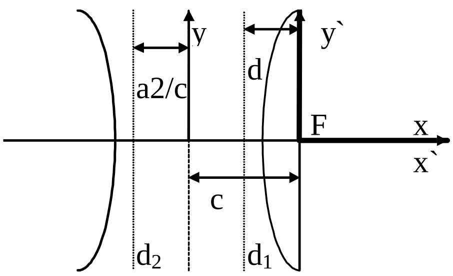
Así pues, se trata de la rama derecha de una hipérbola.

$$d = \frac{p}{e} = \frac{16}{5},\ a = \frac{p}{e^2-1} = 3,\ b = \frac{p}{\sqrt{e^2-1}} = 4\ .$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 25 \Rightarrow c = 5\ .$$

Las ecuaciones polares de las directrices se hallan de forma análoga a como se hizo en el problema anterior, obteniéndose:

$$\boxed{d_1 \equiv r = -\frac{16}{5\cos\alpha}\ , d_2 \equiv r = -\frac{34}{5\cos\alpha}}\ .$$



Las asíntotas tienen por pendientes $\pm\dfrac{b}{a}$ y las ecuaciones de las mismas respecto al sistema de referencia cartesiano asociado al polar (con origen en el foco de la rama de la hipérbola, y ejes el polar y la perpendicular al polar por el foco) son: .

$$y = \pm\frac{4}{3}(x+5)\ .$$

Por consiguiente, las ecuaciones polares de estas rectas son:

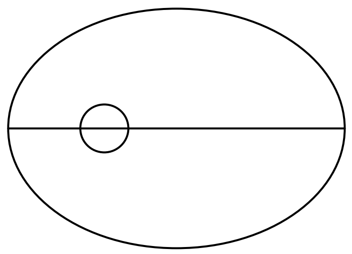
$r\,\text{sen}\alpha = \pm\frac{4}{3}(r\cos\alpha - 5)$; y operando para cada uno de los signos se obtiene:

$$\boxed{r = \frac{20}{3\,\text{sen}\alpha - 4\cos\alpha}}\ ,\ \boxed{r = \frac{-20}{4\cos\alpha + 3\,\text{sen}\alpha}}$$

6. Hallar la ecuación polar de la órbita del planeta Tierra, de sus directrices y las distancias del afelio y perihelio sabiendo que:

$$a = 92,957\text{x}10^6 \text{ millas ; } \quad e = 0{,}0167.$$

Solución:



Procediendo como en el ejercicio 1, y tomando como sistema de referencia polar la semirrecta con origen en el foco izquierdo de la órbita, se tiene:

$c = a\cdot e = 1{,}5523819\cdot10^6$;

$b^2 = a^2 - c^2 = 8{,}638593959\cdot10^{15}$;

y el parámetro p de la órbita elíptica es:

$p = \frac{b^2}{a} = 9{,}2931075\cdot10^7$ y la ecuación es:

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\alpha} = \frac{9{,}2931075\cdot10^7}{1 - 0{,}0167\cos\alpha}$$

Perihelio = $a - c$ = $9{,}14046181\cdot10^7$ millas.

Afelio = $a + c$ = $9{,}45093819\cdot10^7$ millas

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Determinar las cónicas que se dan en coordenadas polares mediante las ecuaciones siguientes:

a) $r = \dfrac{5}{1-\frac{1}{2}\cos\alpha}$ **b)** $r = \dfrac{6}{1-\cos\alpha}$ **c)** $r = \dfrac{10}{1-\frac{3}{2}\cos\alpha}$

d) $r = \dfrac{12}{2-\cos\alpha}$ **e)** $r = \dfrac{5}{3-4\cos\alpha}$ **f)** $r = \dfrac{1}{3-3\cos\alpha}$

Solución:
a) Elipse **b)** Parábola **c)** Una rama de una hipérbola **d)** Elipse **e)** Una rama de una hipérbola **f)** Parábola.

2) Dada la ecuación de la hipérbola $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{144}=1$, hallar la ecuación polar de su rama izquierda, suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está:

a) en el foco izquierdo de la hipérbola;
b) en el foco derecho.

Solución:
a) $r = \dfrac{144}{5+13\cos\alpha}$ **b)** $r = -\dfrac{144}{5+13\cos\alpha}$

3) Hallar en la elipse $r = \dfrac{12}{3-\sqrt{2}\cos\alpha}$ los puntos cuyos radios polares son iguales a 6.

Solución:
$\left(6,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$, $\left(6,\ -\dfrac{\pi}{4}\right)$

4) Hallar en la hipérbola $\rho = \dfrac{15}{3-4\cos\alpha}$ los puntos cuyos radios polares son iguales a 3.

Solución:
$\left(3,\ 2\dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left(6,\ -2\dfrac{\pi}{3}\right)$.

5) Hallar en la parábola $r = \dfrac{p}{1-\cos\alpha}$ los puntos :

a) cuyos radios polares sean mínimos.
b) cuyos radios polares sean iguales al parámetro de la parábola.

Solución:
a) $\left(\dfrac{p}{2},\pi\right)$, **b)** $\left(\dfrac{\pi}{2},p\right)$, $\left(p,-\dfrac{\pi}{2}\right)$