1.- Sea la función $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^6}{(x^2-y)+x^6} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$**. Probar que:**

a) Existen las derivadas parciales de f en (0, 0).
b) f no es continua en (0,0).

Solución

2.- Sea la función $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\ \text{sen}\dfrac{1}{x+y} & \text{si } x+y\neq 0\\ 0 & \text{si } x+y=0\end{cases}$**.**

a) Probar que f es continua en (0,0).
b) ¿Es f diferenciable en (0, 0)? (Nota: investigar la existencia de derivadas parciales).

Solución

3.- Hallar la derivada direccional de $z=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **en el punto (0,0), según la dirección del vector** $\vec{u}=(1,2)$**:**

Solución

4.- La fórmula que mide el efecto enfriador del viento viene dada por

$$E = 0{,}0817\ (3{,}71\sqrt{v} + 5{,}81 - 0{,}25v)(T-91{,}4) + 91{,}4$$

donde v es la velocidad del viento en millas/h y T la temperatura en grados Fahrenheit. Supongamos que la velocidad del viento es 23 ± 3 millas/h y la temperatura 8º ± 1º. Usar dE para estimar el error propagado máximo y el error relativo al calcular el efecto enfriador E.

Solución

5.- La superficie de una montaña admite aproximadamente el modelo:

$$h(x,y)=5000-0.001x^2-0.004y^2.$$

Si un montañero se encuentra en el punto (50, 300, 4390), ¿En qué dirección debe moverse si desea ascender con la mayor rapidez posible?

Solución

6.- La temperatura en un entorno del origen viene dada por una función de la forma $T(x,y)=T_0+e^y\ \text{sen}\ x$**. Hallar la trayectoria seguida por una partícula, originada en el origen, que huye del calor. Hallar la variación de temperatura que experimentaría la partícula si tomase la dirección del vector** $\vec{u}$ **= (1,-2).**

Solución

7.- Un campo escalar diferenciable z = f(x, y) tiene, en el punto P(1,2) las derivadas direccionales +2 en dirección al punto A(2,2) y –2 en dirección al punto B(1,1). Determinar el vector gradiente en P y calcular la derivada direccional en P en dirección al punto C(4,6).

Solución

8.- Hallar la constante c **tal que en todo punto de la intersección de las dos esferas**

$$(x-c)^2+y^2+z^2=3\ ;\ x^2+(y-c)^2+z^2=1$$

los planos tangentes correspondientes sean perpendiculares entre sí.

Solución

9.- Un pato está nadando a lo largo de la circunferencia unidad $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$ y la temperatura del agua en el estanque está dada por la expresión T = $x^2 e^y - x y^3$. Hallar el coeficiente de variación de la temperatura $\frac{\partial T}{\partial t}$ que puede sentir el pato:

a) **Expresando T en términos de t y diferenciando.**
b) **Mediante la regla de la cadena.**

Solución

10.- El cambio de variables $\begin{cases} x = u + v \\ y = uv^2 \end{cases}$ transforma z = f(x,y) en z = g(u,v). Calcular el valor de $\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}$ en el punto u =1, v =1, sabiendo que $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$ en dicho punto.

Solución

11.- La ecuación $xy + xz^3 + zy + 1 = 0$ define implícitamente una función real de dos variables reales z=f(x,y).

a) **Hallar el vector gradiente de f en el punto P(-1,1,0).**
b) **Calcular la derivada direccional de z en P en la dirección de descenso más pronunciado.**
c) **Dar la ecuación del plano tangente a la superficie z en el punto P.**
d) **Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ en P.**

Solución

12.- Dada la función f(x, y) = $x \cdot \operatorname{tg} y$, se pide:

a) **Hallar el dominio de f.**

b) **Dar las direcciones de máximo y nulo crecimiento de f en el punto $P\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$.**

c) **Calcular la derivada direccional h(α) de f en P en la dirección que forma un ángulo α con el eje de abscisas.**

d) **Hallar la aproximación lineal (plano tangente) de f(x,y) en P.**

e) **Suponiendo que el error estimado al medir la magnitud “x” es de un ±2% y el de “y” un 5% ¿cuál es la estimación del error propagado?**

f) **Calcula la derivada de f respecto de t en la circunferencia $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$.**

Solución

13.- La temperatura en un punto (x, y) de una lámina metálica es $T(x, y) = \frac{3x}{x^2 + y^2}$.

a) **Hallar la curva de nivel (isoterma) que pasa por el punto P(2, -1).**

b) **Hallar la dirección de máximo crecimiento de la temperatura en P.**

c) **Hallar el coeficiente de variación de la temperatura en P en la dirección de la bisectriz del primer cuadrante.**

d) Hallar, usando la regla de la cadena, el coeficiente de variación de la temperatura a lo largo de la curva $\begin{cases} x = 2\,\mathrm{sen}\,t \\ y = \cos t \end{cases}$.

e) Si la cota de error en la medida de "x" es de $\pm 1\%$ **y en la de "y" es de** $\pm 2\%$**, hallar el máximo error propagado de T en P.**

Solución

14.- La ecuación $z^2 + x^2 z + 2xy + yz - 3 = 0$ **define** $z = f(x,y)$ **como función implícita de x e y. Hallar:**

a) $\vec{\nabla} f(P_0)$**, siendo** $P_0(1,1,0)$**.**

b) Plano tangente a la superficie en el punto P_0**.**

c) La derivada direccional de f en el mismo punto P_0**, en la dirección de la bisectriz del segundo cuadrante. Decir si** $z = f(x,y)$**, en P y en esa dirección, es creciente, decreciente, o si está en la dirección de una curva de nivel.**

d) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(P_0)$**.**

Solución

15.- En una superficie, la temperatura en un entorno del punto $P\left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$ **viene dada por la función** $T(x,y) = \sqrt{2}e^{-y}\cos x$

a) Hallar la dirección de máximo calor seguida por una partícula que parte de P.

b) Hallar la variación de temperatura experimentada por la partícula si toma, desde P, la dirección del vector $\vec{u} = (1,-2)$**.**

Solución

16.- Hallar unas ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva intersección de las superficies $xy + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$**, en el punto** $P_0(2,1,-2)$**.**

Solución

17.- La ecuación $\cos(\pi x) - x^2 y + e^{xz} + yz = 4$ **define implícitamente la función** $z = f(x,y)$**. Suponiendo que se dieran las condiciones de diferenciabilidad adecuadas, calcular:**

a) Plano tangente a la superficie en el punto $P_0(0,1)$**.**

b) Derivada direccional de z en $P_0(0,1)$ **y en la dirección** $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$ **.**

c) Ecuación y dibujo aproximado de la curva de nivel que pasa por P_0**.**

d) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}(P_0)$**.**

Solución

18.- Un posible modelo para el consumo de leche "per cápita" viene dado por la función z = -1,83x- 1,09 y +140,7 donde x es el consumo de leche desnatada, y el de leche semidesnatada y z el de leche entera. Una empresa láctea estima para el año un consumo "per cápita" de 35,1± 1 litros de leche desnatada y 40,1± 1 litros de leche semidesnatada. Se pide estimar el máximo error propagado y el error porcentual en la predicción sobre el consumo de leche entera.

Solución

19.- a) Aplicando la regla de la cadena, calcular la derivada dz/dt a lo largo de la curva x=cost, y=sent, siendo $z=e^{x}\operatorname{sen}y$ y evaluar si, en t=π/2, z es creciente o decreciente.

b) El radio y la altura de un cilindro circular recto verifican que:

$$\frac{dr}{dt}=6\text{cm}/\min,\ \frac{dh}{dt}=-4\text{cm}/\min$$

Si $V=\pi r^2 h$ es el volumen de dicho cilindro se pide, aplicando la regla de la cadena, hallar para r=h=5cm, su ritmo de variación, es decir, la derivada, $\frac{dV}{dt}$.

Solución

20.- La ecuación $x\ln y+y^2z+z^3=10$ define de forma implícita a z como función de x e y, se pide:

a. **La derivada direccional de z en el punto P(2,1) en la dirección del vector (2,-2)**
b. **Las direcciones de la curva de nivel de z en P.**
c. **El plano tangente y la recta normal en P.**

Solución

21.- a) Sea una función diferenciable z = f(x,y) y sean x = s + α, y = sα, escribir las ecuaciones de un cambio de variable $\frac{\partial z}{\partial s},\frac{\partial z}{\partial \alpha}$ en función de $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$

b) La ecuación de Laplace es la ecuación en derivadas parciales $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

Comprobar que la siguiente función verifica la ecuación de Laplace $z=e^{x}\operatorname{sen}y$

Solución

22.- a) Dada la función *f*(*x*, *y*) = $\begin{cases}\dfrac{6xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$**, se pide calcular** $\vec{\nabla} f(0,0)$ **y la derivada direccional de *f* en (1, 1) y en la dirección de la curva de nivel.**

b) La caja de cambios automática de un Nissan Qasqhai tiene dos piezas con forma de cono circular recto, aproximar el error propagado y el error relativo cometidos en el cálculo del área lateral $\left(A=\pi r\sqrt{r^2+h^2}\right)$ **de uno de los conos si se han obtenido *r*=13,5 cm y *h*=20,1 cm con un error máximo de medida de 2mm.**

Solución

23.- Sea la función $f(x,y)=\dfrac{8xy}{1+x^2+y^2}$**, se pide:**

a) Hallar el error porcentual, en la estimación de f(1,-2), si se ha medido x=1 con un error de ±1% e y=-2 con un error de ±2%.
b) Hallar la curva de nivel correspondiente a z=2 y comprobar que es una hipérbola.
c) Hallar en P(1,-2) la derivada direccional en la dirección de máximo crecimiento.

Solución

24.- a) Hallar las ecuaciones de los planos tangentes a las superficies S≡ x y z = 1 y S'≡ $x^2+2y^2+3z^2=0$, respectivamente, en el punto P(1,1,1).

b) ¿Cuál sería la ecuación de la recta tangente a la curva intersección de las superficies S y S'.

Solución

25.- Sea z = f(x,y) una función con derivadas parciales continuas. Aplicar el cambio de variables: $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$ **y probar que** $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$

Solución

26.- Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ **. Se pide:**

- **a) Dominio f.**
- **b) Estudiar la continuidad de f.**
- **c) Calcular, si existen, las derivadas parciales de f en (0, 0).**
- **d) Calcular, si existen, las derivadas parciales de f en (√π, -√π).**

Solución

27.- Al hacer un levantamiento de una porción triangular de terreno se han medido dos lados a=150m y b=200m, así como el ángulo comprendido C=60º ¿Cuál es el error porcentual que tendrá el área de dicho terreno si la cota de error al medir a y b es de 2cm y la de C es de 2º.

Solución

28.- Sea la función $f(x,y) = \left(x^2+4y^2\right)e^{1-x^2-y^2}$ **, hallar:**

a) La derivada de *f* a lo largo de la curva $\begin{cases} x = \operatorname{sen}(2t) \\ y = \cos t^2 \end{cases}$

b) ¿Es f creciente o decreciente en t=π?

Solución

29.- La ecuación $x^3 + y^3 + z^3 - xyz = 0$ **define de forma implícita a z como función de x e y, se pide:**

a) La derivada direccional de z en el punto P(1,-1) en la dirección del vector (1,-2)

b) La dirección en P donde la z tiene el máximo decrecimiento y el valor del máximo decrecimiento.

c) El plano tangente y la recta normal en P.

Solución

30.- a) Sea una función diferenciable z=f(x,y) y sean r y α las coordenadas polares de cada punto (x,y), se pide hallar $\frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \alpha}$ **en función de** $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

b) Comprobar el resultado anterior considerando el cambio a polares de la función

$$z = \sqrt{25 - 5x^2 - 5y^2}$$

Solución

31.- La ecuación $z^3 + 2xz + yz - x = 0$ **define una función** $z = f(x,y)$ **diferenciable en un entorno del punto P(1, -2). Se pide:**

a) El gradiente de z en el punto P y la derivada de segundo orden $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(P)$.

b) El plano tangente y la recta normal en P.

c) La derivada direccional en P en la dirección $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Solución

32.- La temperatura en un punto (x, y) de una lámina metálica es $T(x,y) = \frac{3x}{x^2+y^2}$.

- **a) Hallar la curva de nivel (isoterma) que pasa por el punto P(2, -1).**
- **b) Hallar la dirección de máximo crecimiento de la temperatura en P.**
- **c) Hallar el coeficiente de variación de la temperatura en P en la dirección de la bisectriz del primer cuadrante.**
- **d) Hallar, usando la regla de la cadena, el coeficiente de variación de la temperatura a lo largo de la curva $\begin{cases} x = 2\,\mathrm{sen}\,t \\ y = \cos t \end{cases}$.**
- **e) Si la cota de error en la medida de "x" es de $\pm 1\%$ y en la de "y" es de $\pm 2\%$, hallar el máximo error propagado de T en P.**

Solución

33.- Dada la superficie $ze^{x^2-y^2} - 3 = 0$. Se pide:

a) Hallar la curva de nivel correspondiente a z = 1. ¿Qué tipo de curva es?

b) Hallar el plano tangente y la recta normal a la superficie en P(2, 2).

c) Estimar, mediante la diferencial, el incremento de la función, al pasar del punto P (2,2) al punto (2.01, 1.99).

Solución

34.- Sea la función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Se pide:

- **a) Razonar si esta función es continua en el punto (0,0).**
- **b) Hallar, si existen, las derivadas parciales $f'_x(0,0)$ y $f'_y(0,0)$.**

Solución

35.- a) Hallar la derivada direccional de $z = \frac{xy}{x^2-y^2}$ en el punto (1,0), según la dirección del vector $\vec{u} = (-1, 1)$:

a_1) Aplicando la definición.

a_2) Mediante la diferencial.

b) ¿Cuál es la dirección de máximo crecimiento de z en el punto (1, 0)?

Solución

36.- Dada la superficie $x^2 + 2y^2 + z^2 = 10$, con $z \geq 0$, se pide:

- **a) Hallar la curva de nivel correspondiente a z = 1. ¿Qué tipo de curva es?**
- **b) Hallar el plano tangente y la recta normal a la superficie en P (2, 1).**
- **c) Estimar, mediante la diferencial, el incremento de la función, al pasar del punto (2,1) de su dominio, al (2.01, 0.99).**

Solución

37.- a) Deducir cuál es la dirección de máximo crecimiento de una función diferenciable z=f(x, y) en un punto P(x_0, y_0).

b) Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

b_1) Si $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ = L, entonces obligatoriamente existe el límite a lo largo de cualquier camino que pasa por (x_0,y_0) y vale L.

b_2) Si f es diferenciable en (x_0, y_0), entonces f es continua en (x_0, y_0).

b_3) Si f tiene derivadas parciales en (x_0,y_0), entonces f es continua en (x_0, y_0).

Solución

38.- a) Hallar la derivada direccional de $z = \dfrac{xy}{x+y}$ en el punto P(1,0), según la dirección del vector $\vec{u} = (1,-1)$:

a_1) Aplicando la definición.

a_2) Mediante la diferencial.

b) Razonar si z es creciente o decreciente en P en la dirección de $\vec{u}$.

Solución

39.- Dada F (x,y, z) = $x^2 + y^2 + z^2 + xy + 2z - 1 = 0$, se pide:

a) Encontrar las derivadas parciales de primer de la función z=f(x,y) en el punto (0,-1,0)

b) Hallar en (0,-1) el valor de dz cuando dx = dy = 0.02.

c) Hallar el plano tangente a la superficie F(x,y,z) en el punto (0,-1, 0)

Solución

40.- Usa la regla de la cadena para hallar la derivada de z respecto de u siendo $z = x^2 - 2xy + y^2$, con x= u + 2v e y = u·v

Solución

41.- Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} (2x^2+3y^2)\,\text{sen}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Estudiar si f es diferenciable en un punto (a,b).

Solución

42.- Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x+y+\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right)\dfrac{|\text{sen}x|+|\text{sen}y|}{|x|+|y|} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Hallar la derivada $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial \vec{u}}$ respecto del vector $\vec{u} = (\cos\alpha, \text{sen}\alpha)$ y en particular las derivadas parciales $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}$.

b) Estudiar si f es diferenciable en un punto (0,0).

Solución

43.- Sea z = f(x,y) una función con derivadas parciales continuas. Aplicar el cambio de variables: $\begin{cases} u = xy \\ v = x^2 + y^2 \end{cases}$ **a la expresión:** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \dfrac{2}{x+y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$

Solución

44.- Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{2x^2 - y^2 - xy} & \text{si } (x,\ y) \neq (0,\ 0) \\ 0 & \text{si } (x,\ y) = (0,\ 0) \end{cases}$

a) **Hallar el dominio de la función f(x, y).**
b) **Calcular el límite de f(x, y) en (0, 0) a lo largo del camino y = x – 2 x^2.**
c) **Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de f en el origen.**
d) **Calcular** $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ **y** $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ **en los puntos (0,0) y (2, -1).**
e) **Determinar en el punto P(2, -1) el valor de la derivada de f(x,y) en la dirección del vector** $\vec{u} = \left(1, \sqrt{3}\right)$**.**

Solución

45.- Consideremos f(x,y)= $\begin{cases} \dfrac{x+2y-5}{2x-y} & \text{si } y \neq 2x \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } y=2x \end{cases}$ **. Se pide:**

a) **¿Existe el límite:** $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)$ **?**

b) **¿Es continua la función en (1,2)?**
c) **¿Es diferenciable la función en (1,2)?**

Solución

46.- Sea la función $z = f(x,y)$ **con derivadas parciales continuas y sean** $\begin{cases} x = u - v \\ y = v - u \end{cases}$ **las ecuaciones de un cambio de variable, se pide demostrar que** $\dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial v} = 0$ **y comprobarlo para** $z = (x-y)\text{sen}(y-x)$

Solución

47.- Sea la función z = sen (2x + 3y). Se efectúa el cambio de variables: $\begin{cases} x = 2u - v \\ y = v - 2u \end{cases}$

Hallar $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ **y** $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ **en** $\begin{cases} u = \dfrac{\pi}{2} \\ v = 0 \end{cases}$

Solución

1.- Sea la función $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^6}{(x^2-y)+x^6} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$. **Probar que:**

a) Existen las derivadas parciales de f en (0, 0).
b) f no es continua en (0,0).

Solución:

a) $f_x(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{h^6}{(h^2-0)+h^6}-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^5}{1+h^4}=\boxed{0}$.

$f_y(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{\dfrac{0}{(0-k)+0}-0}{k}=\lim\limits_{k\to 0}0=\boxed{0}$.

b) f no es continua en (0,0) al no existir el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Y es que los límites radiales son todos nulos, en cambio, el límite a lo largo de la parábola $y=x^2$ es 1.

Límites reiterados en (0, 0):

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{x\to 0}(0)=0$$
$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{y\to 0}(0)=0$$

Límites radiales en (0, 0):

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^6}{(x^2-mx)+x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{x^5}{(x-m)+x^5}=\frac{0}{-m}=0$$

Límite a lo largo de la parábola y=x^2:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^6}{(x^2-x^2)+x^6}=\lim_{x\to 0}1=1$$

Luego no existe el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ y, por tanto, **f no es continua en (0, 0)**.

2.- Sea la función $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\ \mathrm{sen}\dfrac{1}{x+y} & \text{si } x+y\neq 0\\ 0 & \text{si } x+y=0\end{cases}$.

a) Probar que f es continua en (0,0).
b)¿Es f diferenciable en (0, 0)? (Nota: investigar la existencia de derivadas parciales).

Solución:

a)
Los límites radiales son nulos.

$$\left|(r\cos\alpha+r\,\mathrm{sen}\alpha)\,\mathrm{sen}\frac{1}{r\cos\alpha+r\,\mathrm{sen}\alpha}-0\right|\le|r\cos\alpha+r\,\mathrm{sen}\alpha|=r|\cos\alpha+\mathrm{sen}\alpha|\le 2r=g(r)$$, con

$\lim\limits_{r\to 0} g(r)=0$

Luego $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$, y, por tanto **f es continua en (0,0)**.

b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(h+0)\,\mathrm{sen}\dfrac{1}{h+0}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\mathrm{sen}\frac{1}{h}\ \text{ No existe.}$$

Luego, **f no es diferenciable en (0,0)**, ya que si lo fuera existirían las derivadas parciales de f en dicho punto.

3.- Hallar la derivada direccional de $z=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **en el punto (0,0), según la dirección del vector** $\vec{u}=(1,2)$ **:**

Solución:

a) Mediante la definición de derivada direccional.

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\frac{(1,2)}{\sqrt{1+4}}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

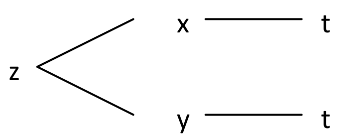
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\dfrac{h}{\sqrt{5}},\dfrac{2h}{\sqrt{5}}\right)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h^3}{\left(\sqrt{5}\right)^3}}{h\left(\dfrac{h^2}{5}+\dfrac{4h^2}{5}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^3}=\boxed{\frac{1}{5\sqrt{5}}}$$

b) Aplicando la regla de la cadena.

$$t\to(x(t),y(t))\xrightarrow{f}z=f(x,y)=z(t)$$

Recta que pasa por O(0, 0) y tiene de dirección $\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$:

$$r\equiv\begin{cases}x=\dfrac{t}{\sqrt{5}}\\ y=\dfrac{2t}{\sqrt{5}}\end{cases},$$



$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)=\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=0}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(0,0)}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0}+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{(0,0)}\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0}$$

$\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_{(0,0)}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{h^3}{h^2+0}-0}{h}=1$; análogamente, $\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_{(0,0)}=0$.

Por tanto, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)=\left(\dfrac{dz}{dt}\right)_{t=0}=1\dfrac{1}{\sqrt{5}}+0\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$

c) Mediante la fórmula para calcular derivadas direccionales de funciones diferenciables.

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}(0,0) = \vec{\nabla} f(0,0) \cdot \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} = (1,0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

A la vista del apartado anterior, ¿es f diferenciable en (0, 0)?

f no es diferenciable en (0,0), ya que si lo fuera, deberíamos haber obtenido el mismo resultado por los tres métodos al calcular $\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}(0,0)$.

4.- La fórmula que mide el efecto enfriador del viento viene dada por

$$\mathbf{E = 0{,}0817\,(3{,}71\sqrt{v} + 5{,}81 - 0{,}25v)(T - 91{,}4) + 91{,}4}$$

donde v es la velocidad del viento en millas/h y T la temperatura en grados Fahrenheit. Supongamos que la velocidad del viento es 23 ± 3 millas/h y la temperatura 8º ± 1º. Usar dE para estimar el error propagado máximo y el error relativo al calcular el efecto enfriador E.

Solución:

Error propagado máximo $= \Delta E \approx dE = \dfrac{\partial E}{\partial v}dv + \dfrac{\partial E}{\partial T}dT$

$$\left.\begin{array}{l} dv = \pm 3, \quad dT = \pm 1, \quad v = 23, \quad T = 8 \\ \dfrac{\partial E}{\partial v} = \dfrac{817(371 - 50\sqrt{v})(5T - 457)}{10^7\sqrt{v}} \underset{v=23,T=8}{=} -0.9320858435 \\ \dfrac{\partial E}{\partial t} = -\dfrac{817(25v - 371\sqrt{v} - 581)}{10^6} \underset{v=23,T=8}{=} 1.458552105 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$dE \approx -0.9320858435\cdot(\pm 3) + 1.458552105\cdot(\pm 1) =$$
$$= 3(-0.9320858435)\cdot(\pm 1) + 1.458552105\cdot(\pm 1) =$$
$$\boxed{\pm 1.337705425}$$

$$\text{Error relativo} = \frac{\Delta E}{E} \approx \frac{dE}{E} \approx \frac{\pm 1.337705425}{-30.24324560} = \pm 0.04423154322 \approx \boxed{\pm\ 4.4\%}$$

5.- La superficie de una montaña admite aproximadamente el modelo:

$$h(x,y) = 5000 - 0.001\,x^2 - 0.004\,y^2.$$

Si un montañero se encuentra en el punto (50, 300, 4390), ¿En qué dirección debe moverse si desea ascender con la mayor rapidez posible?

Solución:

Debe tomar la dirección dada por el vector:

$$\vec{\nabla} h(50,300) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}\right)_{(50,300)} = (-0.002x, -0.008y)_{(50,300)} = (-0.1, -2.4)$$

Que es lo mismo que seguir la dirección del vector **(-1,-24)**.

6.- La temperatura en un entorno del origen viene dada por una función de la forma $T(x,y) = T_0 + e^y \operatorname{sen} x$. Hallar la trayectoria seguida por una partícula, originada en el origen, que huye del calor. Hallar la variación de temperatura que experimentaría la partícula si tomase la dirección del vector $\vec{u}$ = (1,-2).

Solución:

Representamos la trayectoria por unas ecuaciones paramétricas: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$.

Un vector tangente a dicha trayectoria en cada punto $(x(t), y(t))$ viene dado por

$$\vec{r}\,`(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right).$$

Como la partícula huye del calor, tomará la dirección de máximo descenso de temperatura, que viene dada por el vector:

$$-\vec{\nabla}T(x,y) = -\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}\right) = -(e^y \cos x, e^y \operatorname{sen} x)$$

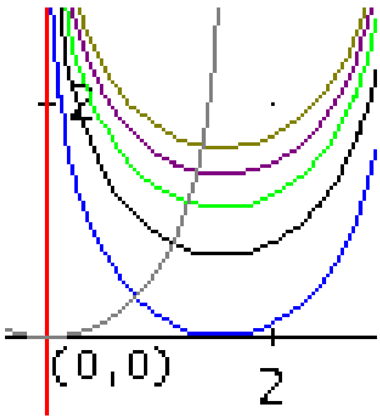
Por tanto, las direcciones de $\vec{r}\,`(t)$ y de $(-e^y \cos x, -e^y \operatorname{sen} x)$ son la misma a lo largo de toda la trayectoria. Así pues,

$-e^y \cos x = k\dfrac{dx}{dt}$ y $-e^y \operatorname{sen} x = k\dfrac{dy}{dt}$, donde k depende de t.

Despejando $\dfrac{dt}{k}$ en cada ecuación e igualando los resultados, se obtiene:

$$\frac{dx}{\cos x} = \frac{dy}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow \operatorname{tg} x\ dx = dy \Rightarrow y = \int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln(\cos x) + C$$

Como sabemos que la partícula parte del origen, ha de ser: $0 = -\ln(\cos 0) + C = C$.



Por consiguiente, la trayectoria seguida por la partícula será:

$\boxed{y = -\ln(\cos x)}$

La figura muestra esa trayectoria.

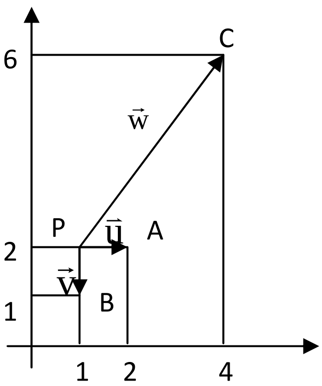
Observación: La trayectoria es perpendicular a las curvas de nivel (isotermas) pues en cada punto su vector tangente es paralelo al vector gradiente en ese punto.

La variación de temperatura que experimentaría la partícula si tomase la dirección del vector $\vec{u}$ = (1,-2) sería la derivada direccional de T en el (0, 0) en la dirección de dicho vector:

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{u}}(0,0) = \vec{\nabla}T(0,0)\cdot\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = (-1,0)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{5}}$$

7.- Un campo escalar diferenciable z = f(x, y) tiene, en el punto P(1,2) las derivadas direccionales +2 en dirección al punto A(2,2) y –2 en dirección al punto B(1,1). Determinar el vector gradiente en P y calcular la derivada direccional en P en dirección al punto C(4,6).

Solución:



Sea $\vec{\nabla} f(P) = (a, b)$

Vector dirección de P a A: $\vec{u} = (2,2) - (1,2) = (1,0)$

Vector dirección de P a B: $\vec{v} = (1,1) - (1,2) = (0,-1)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = \vec{\nabla} f(P) \cdot (1,0) = 2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P) = \vec{\nabla} f(P) \cdot (0,-1) = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (a, b)(1, 0) = a = 2 \\ (a, b)(0, -1) = -b = -2 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 2 \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} f(P) = (2, 2)}$$

Vector dirección de P a C: $\vec{w} = (4,6) - (1,2) = (3,4) \Rightarrow |\vec{w}| = \sqrt{9+16} = 5$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(P) = (2,2)\frac{(3,4)}{5} = \frac{14}{5}}$$

8.- Hallar la constante *c* tal que en todo punto de la intersección de las dos esferas

$$(x-c)^2+y^2+z^2=3\,;\;\; x^2+(y-c)^2+z^2=1$$

los planos tangentes correspondientes sean perpendiculares entre sí.

Solución:

Unas ecuaciones implícitas de ambas esferas son, respectivamente:

$$F(x,y,z)=(x-c)^2+y^2+z^2-3=0$$

$$G(x,y,z)=x^2+(y-c)^2+z^2-1=0$$

Un vector normal al plano tangente a la primera superficie es:

$$\vec{n}_1=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)=(2(x-c),\; 2y,\; 2z)$$

Un vector normal al plano tangente a la segunda superficie es:

$$\vec{n}_2=\left(\frac{\partial G}{\partial x},\frac{\partial G}{\partial y},\frac{\partial G}{\partial z}\right)=(2x,\; 2(y-c),\; 2z)$$

Para que se cumplan las condiciones exigidas en el enunciado del problema, para el punto genérico P(x, y, z) se ha de verificar:

1) P debe pertenecer a la primera superficie: $(x-c)^2+y^2+z^2-3=0$
2) P debe pertenecer a la segunda superficie: $x^2+(y-c)^2+z^2-1=0$
3) $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0 \Leftrightarrow (2(x-c),\; 2y,\; 2z)\cdot(2x,\; 2(y-c),\; 2z)=0 \Leftrightarrow x^2-cx+y^2-cy+z^2=0$

Resolviendo con DERIVE el sistema formado por las tres ecuaciones anteriores, se obtiene que ha de ser $\boxed{c=\pm\sqrt{2}}$.

9.- Un pato está nadando a lo largo de la circunferencia unidad $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$ y la temperatura del agua en el estanque está dada por la expresión $T = x^2 e^y - x y^3$. Hallar el coeficiente de variación de la temperatura $\frac{\partial T}{\partial t}$ que puede sentir el pato:

a) Expresando T en términos de t y diferenciando.
b) Mediante la regla de la cadena.

Solución:

a) $T(t) = \cos^2 t \cdot e^{\operatorname{sen} t} - \cos t \cdot \operatorname{sen}^3 t$

$$\frac{dT}{dt} = 2\cos t\,(-\operatorname{sen} t)e^{\operatorname{sen} t} + \cos^2 t\, e^{\operatorname{sen} t}\cos t - \left[(-\operatorname{sen} t)\operatorname{sen}^3 t + \cos t\, 3\operatorname{sen}^2 t \cos t\right] =$$

$$\boxed{-2\cos t \operatorname{sen} t\, e^{\operatorname{sen} t} + \cos^3 t\, e^{\operatorname{sen} t} + \operatorname{sen}^4 t - 3\operatorname{sen}^2 t \cos^2 t}$$

b)

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[r, dash] & t \\ T \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \\ & y \arrow[r, dash] & t \end{tikzcd}$$

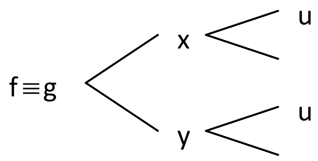
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} =$$

$$\left(2xe^y - y^3\right)\left(-\operatorname{sen} t\right) + \left(x^2 e^y - 3xy^2\right)\cos t =$$

$$\boxed{-2\cos t \operatorname{sen} t\, e^{\operatorname{sen} t} + \cos^3 t\, e^{\operatorname{sen} t} + \operatorname{sen}^4 t - 3\operatorname{sen}^2 t \cos^2 t}$$

10.- El cambio de variables $\begin{cases} x = u + v \\ y = uv^2 \end{cases}$ transforma z = f(x,y) en z = g(u,v). Calcular el valor de $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}$ en el punto u =1, v =1, sabiendo que $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$ en dicho punto.

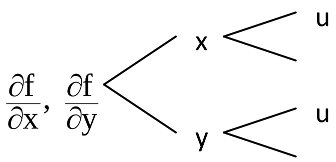
Solución:



$$\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot v^2$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot v^2\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\cdot v^2\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + v^2\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$



$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial v}$$

Sustituyendo estas dos últimas expresiones en la anterior a ellas, queda:

$$\boxed{\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial v} + v^2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial v}\right] + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial v}\left(v^2\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}2uv + v^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}2uv\right] + \frac{\partial f}{\partial y}2v \underset{(u,v)=(1,1)}{=} 1+2+1+2+2 = \boxed{8}$$

11.- La ecuación $xy + xz^3 + zy + 1 = 0$ define implícitamente una función real de dos variables reales $z=f(x,y)$.
a) Hallar el vector gradiente de f en el punto P(-1,1,0).
b) Calcular la derivada direccional de z en P en la dirección de descenso más pronunciado.
c) Dar la ecuación del plano tangente a la superficie z en el punto P.
d) Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ en P.

Solución:

a) $F(x, y, z) = xy + xz^3 + zy + 1 = 0$ define implícitamente a la función $z = f(x,y)$.

El vector gradiente de f en el punto P es $\vec{\nabla} f(P) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)_P$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{y+z^3}{3xz^2+y} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(P) = \frac{-1}{1} = -1 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = -\frac{x+z}{3xz^2+y} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(P) = -\frac{-1}{1} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} f(P) = (-1,1)}$$

b) La dirección de descenso más pronunciado viene dada por el vector:

$$\vec{u} = -\vec{\nabla} f(P) = (1,-1)$$

La derivada direccional de z en P en esta dirección es:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = (-1,1)\frac{(1,-1)}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{-1}{\sqrt{2}} = \boxed{-\frac{2}{\sqrt{2}}}$$

c) Ecuación del plano tangente a la superficie z en el punto P:

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(P)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)(y-y_0) \Leftrightarrow z - 0 = -1\cdot(x+1) + 1\cdot(y-1) \Leftrightarrow x - y + z + 2 = \boxed{0}$$

d) $$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x+z}{3xz^2+y}\right) = -\frac{(3xz^2+y)\frac{\partial}{\partial y}(x+z) - (x+z)\frac{\partial}{\partial y}(3xz^2+y)}{(3xz^2+y)^2} =$$

$$\frac{(3xz^2+y)\frac{\partial z}{\partial y} - (x+z)\left(3x2z\frac{\partial z}{\partial y}+1\right)}{(3xz^2+y)^2} \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_P = -\frac{(0+1)\cdot 1 - (-1+0)\cdot(0+1)}{(0+1)^2} = \boxed{-2}$$

12.- Dada la función f(x, y) = $x \cdot \text{tg}\, y$**, se pide:**
a) Hallar el dominio de f.
b) Dar las direcciones de máximo y nulo crecimiento de f en el punto $P\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$**.**
c) Calcular la derivada direccional h(α) de f en P en la dirección que forma un ángulo α con el eje de abscisas.
d) Hallar la aproximación lineal (plano tangente) de f(x,y) en P.
e) Suponiendo que el error estimado al medir la magnitud "x" es de un ±2% y el de "y" un 5% ¿cuál es la estimación del error propagado?
f) Calcula la derivada de f respecto de t en la circunferencia $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \text{sen}\, t \end{cases}$**.**

Solución

a) Domf = **R^2- {(x, y) tales que y= kπ/2, k∈R}**

b) La dirección de máximo crecimiento es la del gradiente:

$$\vec{\nabla} f(P) = \left(\tan y, \frac{x}{\cos^2 y}\right)_P = \boxed{(1,4)}.$$

Análogamente la dirección de nulo crecimiento es $\vec{u} \perp \vec{\nabla} f(P)$, luego $\vec{u} =$ **(4,-1)**.

c) Un vector en la dirección indicada es $\vec{u}$= (cosα, senα), además $|\vec{u}| = 1$, por tanto, $h(\alpha) = \vec{\nabla} f(P)$ (cosα, senα)= (1,4) (cosα, senα)= **cosα+4senα**.

d) La ecuación de la aproximación lineal es la del plano tangente en P:

$$z = z_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P (y - y_0)$$

$$z_0 = f(2,\pi/4) = 2 \Rightarrow \boxed{z = 2 + 1(x-2) + 4\left(y - \frac{\pi}{4}\right)}$$

e) $dz = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P dy \Rightarrow$ el error propagado es

$$E \approx 1\cdot(\pm 0{,}02) + 4\cdot(\pm 0{,}05) = \boxed{\pm 0{,}22}$$

f) $$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt} = \tan y \cos t + \frac{x}{\cos^2 y}\text{sen}t =$$

$$\boxed{\tan(\text{sen}t)\cos t + \frac{\cos t}{\cos^2(\text{sen}t)}\text{sen}t}$$

13.- La temperatura en un punto (x, y) de una lámina metálica es $T(x,y)=\dfrac{3x}{x^2+y^2}$.

a) Hallar la curva de nivel (isoterma) que pasa por el punto P(2, -1).
b) Hallar la dirección de máximo crecimiento de la temperatura en P.
c) Hallar el coeficiente de variación de la temperatura en P en la dirección de la bisectriz del primer cuadrante.
d) Hallar, usando la regla de la cadena, el coeficiente de variación de la temperatura a lo largo de la curva $\begin{cases} x = 2\operatorname{sen} t \\ y = \cos t \end{cases}$.
e) Si la cota de error en la medida de "x" es de $\pm 1\%$ y en la de "y" es de $\pm 2\%$, hallar el máximo error propagado de T en P.

Solución

a) Para hallar la curva de nivel en P(2,-1) calculamos previamente el valor de T(P)

#1: $$\frac{3\cdot 2}{2^2+(-1)^2}=\frac{6}{5}$$

La curva de nivel en P tiene por ecuación

#2: $$\frac{6}{5}=\frac{3\cdot x}{x^2+y^2}$$

Operando obtenemos $x^2+y^2-5/2x=0$ que corresponde a una circunferencia de centro (5/4,0) y radio 5/4.

b) La dirección de máximo crecimiento sabemos, por teoría que es la del vector gradiente.

#3: $$\frac{d}{dx}\frac{3\cdot x}{x^2+y^2}=\frac{3\cdot(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

#4: $$\frac{d}{dy}\frac{3\cdot x}{x^2+y^2}=-\frac{6\cdot x\cdot y}{(x^2+y^2)^2}$$

El vector gradiente en un punto (x,y) es:

#5: $$\left[\frac{3\cdot(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},\ -\frac{6\cdot x\cdot y}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

Y en P es:

#6: $$\left[\frac{3\cdot((-1)^2-2^2)}{(2^2+(-1)^2)^2},\ -\frac{6\cdot 2\cdot(-1)}{(2^2+(-1)^2)^2}\right]=\left[-\frac{9}{25},\ \frac{12}{25}\right]$$

c) Se nos pide la derivada direccional de T en P y en la dirección $\alpha=\pi/4$

#7: $$\left[-\frac{9}{25}, \frac{12}{25}\right]\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{3\cdot\sqrt{2}}{50}$$

d) Aplicamos la regla de la cadena a T a lo largo de la curva x=sent, y= cost, y sustituimos x e y por las funciones de t que definen x e y

#8: $$\frac{3\cdot(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}\cdot(2\cdot\cos(t)) + \left(-\frac{6\cdot x\cdot y}{(x^2 + y^2)^2}\right)\cdot(-\sin(t)) =$$

$$\frac{6\cdot(y^2 - x^2)\cdot\cos(t)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{6\cdot x\cdot y\cdot\sin(t)}{(x^2 + y^2)^2}$$

#9: $$\frac{6\cdot\cos(t)\cdot(1 - 3\cdot\sin(t)^2)}{(3\cdot\sin(t)^2 + 1)^2}$$

e) El error propagado máximo (en la medición de T) se obtiene a partir de la fórmula de la diferencial total de T

#10: $$dT = \left(\frac{d}{dx}\frac{3\cdot x}{x^2 + y^2}\right)\cdot(dx) + \left(\frac{d}{dy}\frac{3\cdot x}{x^2 + y^2}\right)\cdot(dy)$$

#11: $$dT = \frac{3\cdot(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}\cdot(dx) + \left(-\frac{6\cdot x\cdot y}{(x^2 + y^2)^2}\right)\cdot(dy)$$

Ahora sustituimos x=2, y=-1,dx=±0.01, dy=±0.02 y se obtiene la cota de error que denominamos "error propagado máximo"

#12: $$\text{error propagado máximo} = \frac{3\cdot((-1)^2 - 2^2)}{(2^2 + (-1)^2)^2}\cdot(\pm 0.01) + \left(-\frac{6\cdot 2\cdot(-1)}{(2^2 + (-1)^2)^2}\right)\cdot(\pm 0.02)$$

#13: $$\text{error propagado máximo} = (-0.36)\cdot(\pm 0.01) + 0.48\cdot(\pm 0.02)$$

#14: $$\text{error propagado máximo} = \pm\,|0.36\cdot 0.01 + 0.48\cdot 0.02|$$

#15: **error propagado máximo = ±0.0132**

14.- La ecuación $z^2+x^2z+2xy+yz-3=0$ define $z=f(x,y)$ como función implícita de x e y. Hallar:

a) $\vec{\nabla} f(P_0)$, **siendo $P_0(1,1,0)$.**

b) Plano tangente a la superficie en el punto P_0.

c) La derivada direccional de f en el mismo punto P_0, en la dirección de la bisectriz del segundo cuadrante. Decir si $z=f(x,y)$, en P y en esa dirección, es creciente, decreciente, o si está en la dirección de una curva de nivel.

d) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(P_0)$.

Solución

a) $F(x,y,z)=z^2+x^2z+2xy+yz-3$

$$\left.\begin{array}{l} F_x=2xz+2y \\ F_y=2x+z \\ F_z=2z+x^2+y \end{array}\right| \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} z_x=-\dfrac{F_x}{F_z}=-\dfrac{2xz+2y}{2z+x^2+y} \\ z_y=-\dfrac{F_y}{F_z}=-\dfrac{2x+z}{2z+x^2+y} \end{array}\right|$$

Sustituyendo en P_0: $z_x=-1$, $z_y=-1$, luego, $\vec{\nabla} f(P_0)$ = $\boxed{\textbf{(-1, -1)}}$.

b) Plano tangente a la superficie en el punto P_0:

$$z-z_0=\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y-y_0) \Leftrightarrow z-0=-1\cdot(x-1)-1\cdot(y-1) \Leftrightarrow \boxed{x+y+z-2=0}$$

c) Vector unitario en la dirección de la bisectriz del segundo cuadrante:

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Derivada direccional de f en P_0, en la dirección de este vector:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{u}}(1,1)=\vec{\nabla} z(1,1)\cdot\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=(-1,-1)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$$

Luego, en P y en esa dirección, $\boxed{\textbf{z está en una curva de nivel}}$.

d) $$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2x+z}{2z+x^2+y}\right)=$$

$$=-\frac{(2z+x^2+y)\dfrac{\partial}{\partial y}(2x+z)-(2x+z)\dfrac{\partial}{\partial y}(2z+x^2+y)}{(2z+x^2+y)^2}=$$

$$=-\frac{(2z+x^2+y)\dfrac{\partial z}{\partial y}-(2x+z)\left(2\dfrac{\partial z}{\partial y}+1\right)}{(2z+x^2+y)^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(P_0)=-\frac{-1(2)-2(-2+1)}{4}=0}$$

15.- En una superficie, la temperatura en un entorno del punto P$\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ viene dada por la función T(x,y)= $\sqrt{2}e^{-y}\cos x$
a) Hallar la dirección de máximo calor seguida por una partícula que parte de P.
b) Hallar la variación de temperatura experimentada por la partícula si toma, desde P, la dirección del vector $\vec{u}=$**(1,-2).**

Solución

a) $\vec{\nabla}T\left(\frac{\pi}{4},0\right)=\left(\frac{\partial T}{\partial x},\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{\left(\frac{\pi}{4},0\right)}=\boxed{(-1,-1)}$

b) $\frac{\partial T}{\partial \vec{u}}(P)=\quad \vec{\nabla}T(P)\cdot\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=(-1,-1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)=\boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}}$

16.- Hallar unas ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva intersección de las superficies $xy + z=0$, $x^2 + y^2 + z^2=9$, en el punto $P_0(2,1,-2)$.

Solución

La recta tangente es la intersección de los dos planos tangentes a ambas superficies en el punto P_0.

Plano tangente a la primera superficie:

$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(P)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)(y - y_0) \Leftrightarrow x + 2y + z - 2 = 0$, siendo $f(x, y) = - x\, y$.

Plano tangente a la segunda superfície:

$\frac{\partial F}{\partial x}(P)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(P)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(P)(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 2z - 9 = 0$, siendo $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$.

Ecuación de la recta tangente pedida: $\boxed{t \equiv \begin{cases} x + 2y + z - 2 = 0 \\ 2x + y - 2z - 9 = 0 \end{cases}}$

17.- La ecuación $\cos(\pi x)-x^2y+e^{xz}+yz=4$ **define implícitamente la función** $z=f(x,y)$**. Suponiendo que se dieran las condiciones de diferenciabilidad adecuadas, calcular:**
a) Plano tangente a la superficie en el punto $P_0(0,1)$**.**
b) Derivada direccional de z en $P_0(0,1)$ **y en la dirección** $\alpha=-\frac{\pi}{4}$ **.**
c) Ecuación y dibujo aproximado de la curva de nivel que pasa por P_0**.**
d) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(P_0)$**.**

Solución:

a) $F(x,y,z)=\cos(\pi x)-x^2y+e^{xz}+yz-4=0$

Para x = 0, y = 1, se obtiene: $1-0+1+z-4=0\Rightarrow z=2$

$$\pi\equiv\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{P_0}(x-x_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{P_0}(y-y_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{P_0}(z-z_0)=0$$

$$F_x(x,y,z)=-\pi\operatorname{sen}(\pi x)-2xy+e^{xz}z\Rightarrow F_x(0,1,2)=2$$
$$F_y(x,y,z)=-x^2+z\Rightarrow F_y(0,1,2)=2$$
$$F_z(x,y,z)=e^{xz}x+y\Rightarrow F_z(0,1,2)=1$$

Luego, se tiene que:

$$\pi\equiv 2(x-0)+2(y-1)+1(z-2)=0\Leftrightarrow \boxed{2x+2y+z-4=0}$$

b) Si el vector es unitario: $\frac{\partial z}{\partial \vec{u}}(P_0)=\vec{\nabla}f(P_0)\cdot\vec{u}$.

Un vector unitario en la dirección $\alpha=-\frac{\pi}{4}$, es:

$$\vec{u}=\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right),\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(P_0)=-\frac{F_x(0,1,2)}{F_z(0,1,2)}=-2;\quad \frac{\partial z}{\partial y}(P_0)=-\frac{F_y(0,1,2)}{F_z(0,1,2)}=-2$$

Por tanto, $\frac{\partial z}{\partial \vec{u}}(P_0)=\vec{\nabla}f(P_0)\cdot\vec{u}=(-2,-2)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}+\sqrt{2}=\boxed{0}$.

c) Curva de nivel que pasa por $P_0(0,1)$: Se sustituye z por 2 en la ecuación de la superficie:

$$\cos(\pi x)-x^2y+e^{2x}+2y=4\Leftrightarrow \boxed{y=\frac{e^{2x}+\cos(\pi x)-4}{x^2-2}}$$

d) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(P_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{F_y}{F_z}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z - x^2}{xe^{xz} + y}\right) =$

$$-\frac{(xe^{xz} + y)(z_x - 2x) - (z - x^2)\left[xe^{xz}(xz_x + z) + e^{xz}\right]}{(xe^{xz} + y)^2}$$

Particularizando en P_0 (x = 0, y = 1, z = 2), se obtiene:

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(P_0) = -\frac{1(-2) - 2}{1} = 4}$$

18.- Un posible modelo para el consumo de leche "per cápita" viene dado por la función z = -1,83x- 1,09 y +140,7 donde x es el consumo de leche desnatada, y el de leche semidesnatada y z el de leche entera. Una empresa láctea estima para el año un consumo "per cápita" de 35,1± 1 litros de leche desnatada y 40,1± 1 litros de leche semidesnatada. Se pide estimar el máximo error propagado y el error porcentual en la predicción sobre el consumo de leche entera.

Solución

El error propagado viene dado por la diferencial:

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x}(P_0)\ \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(P_0)\ \Delta y$$

#1: $z = f(x, y) = -1.83\cdot x - 1.09\cdot y + 140.7$

#2: $f(35.1, 40.1) = -1.83\cdot 35.1 - 1.09\cdot 40.1 + 140.7 = 32.758$

#3: $\frac{d}{dx}(-1.83\cdot x - 1.09\cdot y + 140.7) = -1.83$

#4: $\frac{d}{dy}(-1.83\cdot x - 1.09\cdot y + 140.7) = -1.09$

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x}(P_0)\ \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(P_0)\ \Delta y = (-1.83).\ 1 + (-1.09)\ 1 = \boxed{-2.92}.$$

Error porcentual:

#5: $\frac{-1.83\cdot 1 + (-1.09)\cdot 1}{32.758}\cdot 100 = -\frac{146000}{16379}$

#6: $\frac{-1.83\cdot 1 + (-1.09)\cdot 1}{32.758}\cdot 100 = -8.913853104$

#7: $\left|\frac{-1.83\cdot 1 + (-1.09)\cdot 1}{32.758}\cdot 100\right| = \left|-8.913853104\right| = \boxed{8.913853104\ \%}$

19.- a) Aplicando la regla de la cadena, calcular la derivada dz/dt a lo largo de la curva x=cost, y=sent, siendo $z = e^x \text{sen}y$ y evaluar si, en t=π/2, z es creciente o decreciente.
b) El radio y la altura de un cilindro circular recto verifican que:

$$\frac{dr}{dt} = 6cm/\min, \frac{dh}{dt} = -4cm/\min$$

Si V=πr²h es el volumen de dicho cilindro se pide, aplicando la regla de la cadena, hallar para r=h=5cm, su ritmo de variación, es decir, la derivada, $\frac{dV}{dt}$.

Solución

a) $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$

#8: $z = e^x \cdot \text{SIN}(y)$

#9: $\frac{d}{dx}(e^x \cdot \text{SIN}(y)) = e^x \cdot \text{SIN}(y)$

#10: $\frac{d}{dy}(e^x \cdot \text{SIN}(y)) = e^x \cdot \text{COS}(y)$

Llevando estas expresiones a la derivada:

#11: $\frac{dz}{dt} = (e^x \cdot \text{SIN}(y)) \cdot (-\text{SIN}(t)) + (e^x \cdot \text{COS}(y)) \cdot \text{COS}(t)$

Sustituyendo x e y en función de t en la expresión anterior:

#12: $(e^{\text{COS}(t)} \cdot \text{SIN}(\text{SIN}(t))) \cdot (-\text{SIN}(t)) + (e^{\text{COS}(t)} \cdot \text{COS}(\text{SIN}(t))) \cdot \text{COS}(t) = e^{\text{COS}(t)} \cdot (\text{COS}(t) \cdot \text{COS}(\text{SIN}(t)) - \text{SIN}(t) \cdot \text{SIN}(\text{SIN}(t)))$

#13: $e^{\text{COS}(t)} \cdot (\text{COS}(t) \cdot \text{COS}(\text{SIN}(t)) - \text{SIN}(t) \cdot \text{SIN}(\text{SIN}(t)))$

Para el valor t=π/2:

#14: $e^{\text{COS}(\pi/2)} \cdot \left(\text{COS}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{COS}\left(\text{SIN}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \text{SIN}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{SIN}\left(\text{SIN}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) =$

$\boxed{-\text{SIN}(1)}$

Por ser la derivada $\frac{dz}{dt}$(π/2) < 0, z es **decreciente** en dicho valor de t.

b)

#15: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Calculemos $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt}$:

$$\left(\frac{d}{dr}(\pi \cdot r^2 \cdot h)\right) \cdot \frac{d}{dt} r + \left(\frac{d}{dh}(\pi \cdot r^2 \cdot h)\right) \cdot \frac{d}{dt} h = (2 \cdot \pi \cdot h \cdot r) \cdot \frac{d}{dt} r + (\pi \cdot r^2) \cdot \frac{d}{dt} h$$

Sustituyendo r y h por sus valores concretos, se obtiene $\frac{dV}{dt}(5, 5)$:

#17: $(2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 5) \cdot 6 + (\pi \cdot 5^2) \cdot (-4) = \boxed{200 \cdot \pi}$

20.- La ecuación $x\ln y+y^2z+z^3=10$ define de forma implícita a z como función de x e y, se pide:
a) La derivada direccional de z en el punto P(2,1) en la dirección del vector (2,-2)
b) Las direcciones de la curva de nivel de z en P.
c) El plano tangente y la recta normal en P.

Solución:

a) $\frac{\partial z}{\partial \vec{u}}(P)=\vec{\nabla} f(P)\cdot\vec{u}$

Hemos de hallar el vector gradiente de f en forma implícita:

#18: $F(x, y, z) = x\cdot LN(y) + y^2\cdot z + z^3 - 10 = 0$

#19: $\frac{d}{dx}(x\cdot LN(y) + y^2\cdot z + z^3 - 10) = LN(y)$

#20: $\frac{d}{dy}(x\cdot LN(y) + y^2\cdot z + z^3 - 10) = \frac{x}{y} + 2\cdot y\cdot z$

#21: $\frac{d}{dz}(x\cdot LN(y) + y^2\cdot z + z^3 - 10) = y^2 + 3\cdot z^2$

El gradiente de z en (x, y) es

#22: $\left[-\frac{LN(y)}{y^2 + 3\cdot z^2}, -\frac{\frac{x}{y} + 2\cdot y\cdot z}{y^2 + 3\cdot z^2}\right]$

Hallemos f(2,1), despejando z en la ecuación implícita para esos valores de x e y:

#23: $SOLVE(2\cdot LN(1) + 1^2\cdot z + z^3 - 10 = 0, z)$

#24: $z = -1 - 2\cdot i \vee z = -1 + 2\cdot i \vee z = 2$

Luego, **z = 2**.

El gradiente de z en (2, 1) es:

$$\#25:\quad \left[-\frac{LN(1)}{1^2+3\cdot 2^2},\ -\frac{\frac{2}{1}+2\cdot 1\cdot 2}{1^2+3\cdot 2^2}\right]$$

$$\#26:\quad \left[-\frac{LN(1)}{1^2+3\cdot 2^2},\ -\frac{\frac{2}{1}+2\cdot 1\cdot 2}{1^2+3\cdot 2^2}\right]=\left[0,\ -\frac{6}{13}\right]$$

Y la derivada direccional pedida es:

$$\#27:\quad \left[0,\ -\frac{6}{13}\right]\cdot\frac{[2,\ -2]}{|[2,\ -2]|}=\frac{3\cdot\sqrt{2}}{13}$$

b)

Las direcciones de la curva de nivel indican crecimiento nulo, es decir, en P y en dichas direcciones la derivada es 0, luego la dirección seguida es ortogonal al vector gradiente, por lo tanto, son las indicadas por los vectores **(-1,0), (1,0)**.

c)

La ecuación del plano tangente en el punto P (x=2, y=1, z=2), es

$$\#28:\quad z-2=0\cdot(x-2)+\left(-\frac{6}{13}\right)\cdot(y-1)$$

Operando y pasando al primer miembro queda: 6y+13z-32=0
Un vector ortogonal al plano es (0,6,13) por lo que una ecuación de la recta normal en P es

$$\#29:\quad \frac{x-2}{0}=\frac{y-1}{6}=\frac{z-2}{13}$$

21.- a) Sea una función diferenciable z = f(x,y) y sean x = s + α, y = sα, escribir las ecuaciones de un cambio de variable $\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial \alpha}$ en función de $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

b) La ecuación de Laplace es la ecuación en derivadas parciales $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

Comprobar que la siguiente función verifica la ecuación de Laplace $z = e^x \operatorname{sen} y$

Solución

a)

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\alpha}$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}s}$$

b) No hay más que hallar las derivadas segundas, sustituir en la ecuación y ver que se cumple:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \operatorname{sen} y$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^x \cos y \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^x \operatorname{sen} y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^x \operatorname{sen} y - e^x \operatorname{sen} y = 0$$

22.- a) Dada la función $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{6xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, se pide calcular $\vec{\nabla} f(0,0)$ y la derivada direccional de *f* en (1, 1) y en la dirección de la curva de nivel.

c) La caja de cambios automática de un Nissan Qasqhai tiene dos piezas con forma de cono circular recto, aproximar el error propagado y el error relativo cometidos en el cálculo del área lateral $\left(A = \pi r\sqrt{r^2+h^2}\right)$ de uno de los conos si se han obtenido *r*=13,5 cm y *h*=20,1 cm con un error máximo de medida de 2mm.

Solución:

a) Por estar definida la función *f*(*x*, *y*) de forma distinta en (0,0) que en el resto, el cálculo de $\vec{\nabla} f(0,0) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{(0,0)}$ hemos de hacerlo mediante límites:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(0,0)} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{6h\cdot 0}{\sqrt{h^2+0^2}} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(0,0)} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{6\cdot 0\cdot h}{\sqrt{0^2+h^2}} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Luego $\boxed{\vec{\nabla} f(0,0) = (0,0)}$

La curva de nivel es el conjunto de puntos (*x*,*y*) donde la función tiene el mismo valor, luego su dirección indica, en cada punto, la dirección de crecimiento cero, luego la derivada direccional de *f* en (1,1) y en la dirección de la curva de nivel es $\boxed{0}$.

b) El error propagado es una cota del error obtenida mediante la diferencial de la función $A = \pi r\sqrt{r^2+h^2}$, es decir, teniendo en cuenta que $dA = \dfrac{\partial A}{\partial r}dr + \dfrac{\partial A}{\partial h}dh$ y tomando *r*=13.5cm y *h*=20.1cm, *dr= dh =0,2cm.*

$$\frac{d}{dr}\left(\pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+h^2}\right) = \frac{\pi\cdot(h^2+2\cdot r^2)}{\sqrt{h^2+r^2}}$$

$$\frac{d}{dh}\left(\pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+h^2}\right) = \frac{\pi\cdot h\cdot r}{\sqrt{h^2+r^2}}$$

$$\frac{\pi\cdot(20.1^2+2\cdot 13.5^2)}{\sqrt{20.1^2+13.5^2}}\cdot 0.2 + \frac{\pi\cdot 20.1\cdot 13.5}{\sqrt{20.1^2+13.5^2}}\cdot 0.2 = 26.98420385$$

Luego, el error propagado es $\boxed{E_p \approx 26.9842 \text{ cm}}$.

El error relativo es el cociente entre el error propagado y el valor (aproximado) del área medida

$$E_r \approx \frac{E_p}{A}$$

$$\pi \cdot 13.5 \cdot \sqrt{(13.5^2 + 20.1^2)}$$

$$\frac{26.98420385}{\pi \cdot 13.5 \cdot \sqrt{(13.5^2 + 20.1^2)}} = 0.02627730585$$

Luego, $\boxed{\boldsymbol{E_r \approx 0.02627}}$, en porcentaje sería un error porcentual del 2.63% aproximadamente.

23.- Sea la función $f(x,y)=\dfrac{8xy}{1+x^2+y^2}$ **, se pide:**

a) Hallar el error porcentual, en la estimación de f(1,-2), si se ha medido x=1 con un error de ±1% e y=-2 con un error de ±2%.
b) Hallar la curva de nivel correspondiente a z=2 y comprobar que es una hipérbola.
c) Hallar en P(1,-2) la derivada direccional en la dirección de máximo crecimiento.

Solución:

#37: $$\frac{8\cdot x\cdot y}{1+x^2+y^2}$$

a) El error porcentual se estima con (df(1,-2)/f(1,-2))*100.
Los datos de los errores de medida que nos proporcionan nos dicen que (dx/x)*100=±1, (dy/y)*100=±2, luego dx=±0.01x, dy=±0.02y. Calcularemos, en x=1, y=-2, el error porcentual en valor absoluto

#38: $$\frac{8\cdot 1\cdot(-2)}{1+1^2+(-2)^2}=-\frac{8}{3}$$

#39: $$\frac{d}{dx}\frac{8\cdot x\cdot y}{1+x^2+y^2}=-\frac{8\cdot y\cdot(x^2-y^2-1)}{(x^2+y^2+1)^2}$$

#40: $$-\frac{8\cdot(-2)\cdot(1^2-(-2)^2-1)}{(1^2+(-2)^2+1)^2}=-\frac{16}{9}$$

#41: $$\frac{d}{dy}\frac{8\cdot x\cdot y}{1+x^2+y^2}=\frac{8\cdot x\cdot(x^2-y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2}$$

#42: $$\frac{8\cdot 1\cdot(1^2-(-2)^2+1)}{(1^2+(-2)^2+1)^2}=-\frac{4}{9}$$

#43: $$\frac{\left(-\dfrac{16}{9}\right)\cdot 0.01+\left(-\dfrac{4}{9}\right)\cdot 0.02\cdot 2}{-\dfrac{8}{3}}\cdot 100=1.333333333$$

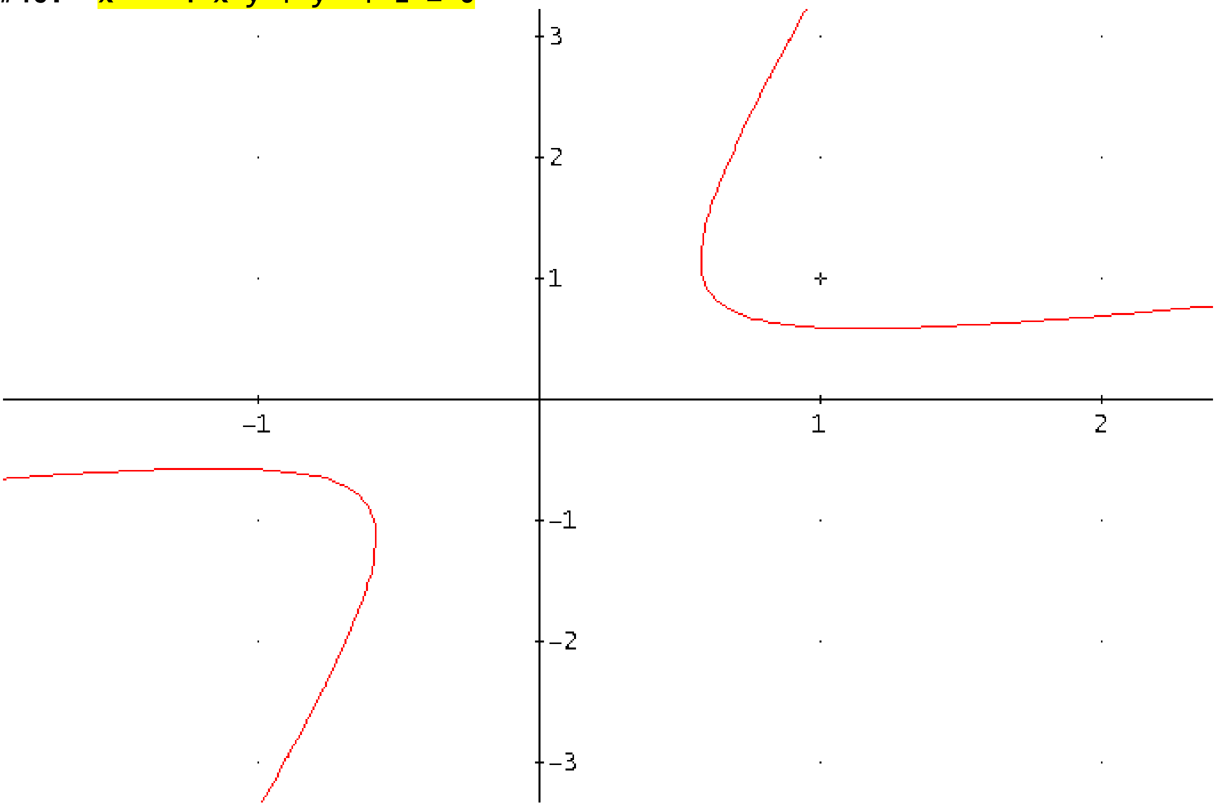
Es decir, el error porcentual es aproximadamente un **1,33%**

b) Es una hipérbola, como se ve operando y dibujando

#44: $$\frac{8\cdot x\cdot y}{1+x^2+y^2}=2$$

#45: $$2\cdot(1+x^2+y^2)-8\cdot x\cdot y=0$$

#46: $x^2 - 4\cdot x\cdot y + y^2 + 1 = 0$



c) La dirección de máximo crecimiento es la del gradiente en (1,-2) y el valor de la derivada direccional es el módulo del gradiente. Las derivadas en (1,-2) están calculadas en el apartado a)

#47: $$\left\|\left[-\frac{16}{9}, -\frac{4}{9}\right]\right\| = \frac{4\cdot\sqrt{17}}{9}$$

24.- a) Hallar las ecuaciones de los planos tangentes a las superficies S≡ x y z = 1 y S'≡ $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 0$, respectivamente, en el punto P(1,1,1).
b) ¿Cuál sería la ecuación de la recta tangente a la curva intersección de las superficies S y S'.

Solución:

a)

Utilizaremos las fórmulas de la derivación implícitas para obtener los gradientes de cada superficie en el punto indicado

#48: $x\cdot y\cdot z - 1 = 0$

#49: $$\left[-\frac{\frac{d}{dx}(x\cdot y\cdot z - 1)}{\frac{d}{dz}(x\cdot y\cdot z - 1)}, -\frac{\frac{d}{dy}(x\cdot y\cdot z - 1)}{\frac{d}{dz}(x\cdot y\cdot z - 1)}\right] = \left[-\frac{z}{x}, -\frac{z}{y}\right]$$

#50: $$\left[-\frac{1}{1}, -\frac{1}{1}\right] = [-1, -1]$$

#51: $z - 1 = -1\cdot(x - 1) + -1\cdot(y - 1)$

#52: $\boxed{x + y + z = 3}$

#53: $x^2 + 2\cdot y^2 + 3\cdot z^2 = 0$

$$\left[-\frac{\frac{d}{dx}(x^2 + 2\cdot y^2 + 3\cdot z^2)}{\frac{d}{dz}(x^2 + 2\cdot y^2 + 3\cdot z^2)}, -\frac{\frac{d}{dy}(x^2 + 2\cdot y^2 + 3\cdot z^2)}{\frac{d}{dz}(x^2 + 2\cdot y^2 + 3\cdot z^2)}\right] = \left[-\frac{x}{3\cdot z}, -\frac{2\ y}{3\cdot z}\right]$$

#55: $$\left[-\frac{1}{3\cdot 1}, -\frac{2\cdot 1}{3\cdot 1}\right] = \left[-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right]$$

#56: $$z - 1 = -\frac{1}{3}\cdot(x - 1) + -\frac{2}{3}\cdot(y - 1)$$

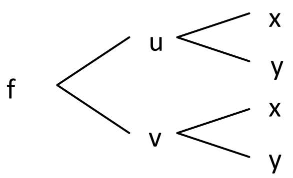
#57: $\boxed{x + 2\cdot y + 3\cdot z = 6}$

b) La recta tangente a la curva intersección de las superficies S y S' es la determinada por la intersección de los dos planos obtenidos

#58:SOLUTIONS([x + y + z = 3, x + 2·y + 3·z = 6], [x, y, z]) = $\boxed{[@1, 3 - 2\cdot @1, @1]}$

25.- Sea z = f(x,y) una función con derivadas parciales continuas. Aplicar el cambio de variables: $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$ **y probar que** $\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} = \left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2$

Solución:



$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot 1\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot(-1)\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

26.- Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **. Se pide:**

a) Dom f.
b) Estudiar la continuidad de f.
c) Calcular, si existen, las derivadas parciales de f en (0, 0).
d) Calcular, si existen, las derivadas parciales de f en (√π, -√π).

Solución:

a) El dominio de la función es todo $\mathbb{R}^2$

b) En todo (x,y)≠(0,0) la función es cociente de funciones continuas cuyo denominador es distinto de 0.
En (0,0) hemos de estudiar si el límite es 1.
Pasamos a polares

#13: $\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\dfrac{\sin((r\cdot\cos(\alpha))^2+(r\cdot\sin(\alpha))^2)}{(r\cdot\cos(\alpha))^2+(r\cdot\sin(\alpha))^2}=\dfrac{\sin(r^2)}{r^2}$

#14: $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{\sin(r^2)}{r^2}=1$

Luego **f también es continua en (0,0)**

c) El cálculo de las derivadas parciales en (0,0) se realiza aplicando la definición

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(0,0)}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\operatorname{sen}(h^2+0^2)}{h^2+0^2}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0}0=\boxed{0}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(0,0)}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\operatorname{sen}(0^2+h^2)}{0^2+h^2}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0}0=\boxed{0}$$

d) Al ser la función diferenciable en (x,y)≠(0,0), por ser cociente de funciones diferenciables, aplicamos las reglas de derivación

#17: $\dfrac{d}{dx}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\dfrac{2\cdot x\cdot((x^2+y^2)\cdot\cos(x^2+y^2)-\sin(x^2+y^2))}{(x^2+y^2)^2}$

#18: $\dfrac{d}{dy}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\dfrac{2\cdot y\cdot((x^2+y^2)\cdot\cos(x^2+y^2)-\sin(x^2+y^2))}{(x^2+y^2)^2}$

Sustituimos en $(\sqrt{\pi},-\sqrt{\pi})$

$$\frac{2\cdot\sqrt{\pi}\cdot((\sqrt{\pi}^2+(-\sqrt{\pi})^2)\cdot\cos(\sqrt{\pi}^2+(-\sqrt{\pi})^2)-\sin(\sqrt{\pi}^2+(-\sqrt{\pi})^2))}{(\sqrt{\pi}^2+(-\sqrt{\pi})^2)^2}=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\pi}}$$

27.- Al hacer un levantamiento de una porción triangular de terreno se han medido dos lados a=150m y b=200m, así como el ángulo comprendido C=60º ¿Cuál es el error porcentual que tendrá el área de dicho terreno si la cota de error al medir a y b es de 2cm y la de C es de 2º.

Solución:

#1: $$\frac{a\cdot b\cdot \mathrm{SIN}(\alpha)}{2}$$

#2: $$\frac{\dfrac{b\cdot \mathrm{SIN}(\alpha)}{2}\cdot 0.02+\dfrac{a\cdot \mathrm{SIN}(\alpha)}{2}\cdot 0.02+\dfrac{a\cdot b\cdot \mathrm{COS}(\alpha)}{2}\cdot\dfrac{\pi}{90}}{\dfrac{a\cdot b\cdot \mathrm{SIN}(\alpha)}{2}}$$

$$\frac{\dfrac{200\cdot \mathrm{SIN}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2}\cdot 0.02+\dfrac{150\cdot \mathrm{SIN}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2}\cdot 0.02+\dfrac{150\cdot 200\cdot \mathrm{COS}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2}\cdot\dfrac{\pi}{90}}{\dfrac{150\cdot 200\cdot \mathrm{SIN}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2}}\cdot 100=$$

$$= \boxed{2.03866596}$$

28.- Sea la función $f(x,y)=\left(x^2+4y^2\right)e^{1-x^2-y^2}$ **, hallar:**

c) La derivada de *f* a lo largo de la curva $\begin{cases} x=\operatorname{sen}(2t) \\ y=\cos t^2 \end{cases}$

d) ¿Es f creciente o decreciente en t=π?

Solución:

a)

#4: $$(x^2+4\cdot y^2)\cdot e^{1-x^2-y^2}$$

#5: $$\left(\frac{d}{dx}\left((x^2+4\cdot y^2)\cdot e^{1-x^2-y^2}\right)\right)\cdot\frac{d}{dt}\mathrm{SIN}(2\cdot t)+\left(\frac{d}{dy}\left((x^2+4\cdot y^2)\cdot e^{1-x^2-y^2}\right)\right)\cdot\frac{d}{dt}\mathrm{COS}(t^2)$$

#6: $$4\cdot x\cdot e^{-x^2-y^2+1}\cdot\mathrm{COS}(2\cdot t)+e^{-x^2-y^2}\cdot(4\cdot e\cdot t\cdot y\cdot(x^2+4\cdot(y^2-1))\cdot\mathrm{SIN}(t^2)-4\cdot e\cdot x\cdot(x^2+4\cdot y^2)\cdot\mathrm{COS}(2\cdot t))$$

#7: $$4\cdot e^{-x^2-y^2+1}\cdot((t\cdot x^2\cdot y+4\cdot t\cdot y\cdot(y^2-1))\cdot\mathrm{SIN}(t^2)-(x^3+x\cdot(4\cdot y^2-1))\cdot\mathrm{COS}(2\cdot t))$$

b)

#8: $$4\cdot e^{-\mathrm{SIN}(2\cdot\pi)^2-\mathrm{COS}(\pi^2)^2+1}\cdot((\pi\cdot\mathrm{SIN}(2\cdot\pi)^2\cdot\mathrm{COS}(\pi^2)+4\cdot\pi\cdot\mathrm{COS}(\pi^2)\cdot(\mathrm{COS}(\pi^2)^2-1))\cdot\mathrm{SIN}(\pi^2)-(\mathrm{SIN}(2\cdot\pi)^3+\mathrm{SIN}(2\cdot\pi)\cdot(4\cdot\mathrm{COS}(\pi^2)^2-1))\cdot\mathrm{COS}(2\cdot\pi))$$

#9: $$-16\cdot\pi\cdot e^{\mathrm{SIN}(\pi^2)^2}\cdot\mathrm{SIN}(\pi^2)^3\cdot\mathrm{COS}(\pi^2)$$

#10: $$-4.350483943$$

f es decreciente en t=π

29.- La ecuación $x^3+y^3+z^3-xyz=0$ define de forma implícita a z como función de x e y, se pide:

a) La derivada direccional de z en el punto P(1,-1) en la dirección del vector (1,-2)

b) La dirección en P donde la z tiene el máximo decrecimiento y el valor del máximo decrecimiento.

c) El plano tangente y la recta normal en P.

Solución:

a)

#11: $x^3 + y^3 + z^3 - x\bullet y\bullet z = 0$

#12: $\frac{d}{dx}(x^3 + y^3 + z^3 - x\bullet y\bullet z) = 3\bullet x^2 - y\bullet z$

#13: $\frac{d}{dy}(x^3 + y^3 + z^3 - x\bullet y\bullet z) = 3\bullet y^2 - x\bullet z$

#14: $\frac{d}{dz}(x^3 + y^3 + z^3 - x\bullet y\bullet z) = 3\bullet z^2 - x\bullet y$

El gradiente de z es

#15: $\left[-\frac{3\bullet x^2 - y\bullet z}{3\bullet z^2 - x\bullet y}, -\frac{3\bullet y^2 - x\bullet z}{3\bullet z^2 - x\bullet y}\right]$

#16: $1^3 + (-1)^3 + z^3 - 1\bullet(-1)\bullet z = 0$

#17: $\text{SOLVE}(1^3 + (-1)^3 + z^3 - 1\bullet(-1)\bullet z = 0, z)$

#18: $z = -i \vee z = i \vee z = 0$

#19: $\left[-\frac{3\bullet 1^2 - (-1)\bullet 0}{3\bullet 0^2 - 1\bullet(-1)}, -\frac{3\bullet(-1)^2 - 1\bullet 0}{3\bullet 0^2 - 1\bullet(-1)}\right] = [-3, -3]$

#20: $[-3, -3]\bullet\left[\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right] = \frac{3\bullet\sqrt{5}}{5}$

b) El máximo decrecimiento corresponde a un ángulo de 180º cuyo coseno vale -1, luego la dirección es la opuesta al vector (-3,-3)

$\boxed{\vec{u} = (3,3)}$

Y el valor del máximo decrecimiento

#21: $|-[-3, -3]| = \boxed{3\bullet\sqrt{2}}$

c)

La ecuación del plano tangente en el punto P (x=1, y=-1, z=0), es

#22: $z - 0 = -3\bullet(x - 1) - 3\bullet(y + 1)$

#23: $z = -3\bullet(x + y)$

Operando y pasando al primer miembro queda: $\boxed{3x+3y+z=0}$

Un vector ortogonal al plano es (0,1,-3) por lo que una ecuación de la recta normal en P es

#24: $\frac{x - 1}{0} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z - 0}{-3}$

30.- a) Sea una función diferenciable z=f(x,y) y sean r y α las coordenadas polares de cada punto (x,y), se pide hallar $\frac{\partial z}{\partial r},\frac{\partial z}{\partial \alpha}$ en función de $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$

c) Comprobar el resultado anterior considerando el cambio a polares de la función

$$z=\sqrt{25-5x^2-5y^2}$$

Solución:

#24: $z = \sqrt{(25 - 5\cdot x^2 - 5\cdot y^2)}$

#25: $\left(\frac{d}{dx}\sqrt{(25 - 5\cdot x^2 - 5\cdot y^2)}\right)\cdot\frac{d}{dr}(r\cdot COS(\alpha)) + \left(\frac{d}{dy}\sqrt{(25 - 5\cdot x^2 - 5\cdot y^2)}\right)\cdot\frac{d}{dr}(r\cdot SIN(\alpha)) = - \frac{\sqrt{5}\cdot x\cdot COS(\alpha)}{\sqrt{(- x^2 - y^2 + 5)}} - \frac{\sqrt{5}\cdot y\cdot SIN(\alpha)}{\sqrt{(- x^2 - y^2 + 5)}}$

#26: $- \frac{\sqrt{5}\cdot x\cdot COS(\alpha)}{\sqrt{(- x^2 - y^2 + 5)}} - \frac{\sqrt{5}\cdot y\cdot SIN(\alpha)}{\sqrt{(- x^2 - y^2 + 5)}} = - \frac{\sqrt{5}\cdot r}{\sqrt{(5 - r^2)}}$

#27: $\left(\frac{d}{dx}\sqrt{(25 - 5\cdot x^2 - 5\cdot y^2)}\right)\cdot\frac{d}{d\alpha}(r\cdot COS(\alpha)) + \left(\frac{d}{dy}\sqrt{(25 - 5\cdot x^2 - 5\cdot y^2)}\right)\cdot\frac{d}{d\alpha}(r\cdot SIN(\alpha)) = \frac{\sqrt{5}\cdot r\cdot x\cdot SIN(\alpha)}{\sqrt{(- x^2 - y^2 + 5)}} - \frac{\sqrt{5}\cdot r\cdot y\cdot COS(\alpha)}{\sqrt{(- x^2 - y^2 + 5)}}$

#28: $\frac{\sqrt{5}\cdot r\cdot x\cdot SIN(\alpha)}{\sqrt{(- x^2 - y^2 + 5)}} - \frac{\sqrt{5}\cdot r\cdot y\cdot COS(\alpha)}{\sqrt{(- x^2 - y^2 + 5)}} = 0$

#29: $\sqrt{(25 - 5\cdot(r\cdot COS(\alpha))^2 - 5\cdot(r\cdot SIN(\alpha))^2)}$

#30: $\sqrt{(25 - 5\cdot(r\cdot COS(\alpha))^2 - 5\cdot(r\cdot SIN(\alpha))^2)} = \sqrt{5}\cdot\sqrt{(5 - r^2)}$

#31: $\frac{d}{dr}(\sqrt{5}\cdot\sqrt{(5 - r^2)}) = - \frac{\sqrt{5}\cdot r}{\sqrt{(5 - r^2)}}$

#32: $\frac{d}{d\alpha}(\sqrt{5}\cdot\sqrt{(5 - r^2)}) = 0$

31.- La ecuación $z^3+2xz+yz-x=0$ define una función $z=f(x,y)$ diferenciable en un entorno del punto P(1, -2). Se pide:

a) El gradiente de z en el punto P y la derivada de segundo orden $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(P)$.

b) El plano tangente y la recta normal en P.

c) La derivada direccional en P en la dirección $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

Solución:

a) F(x, y, z) = $z^3+2xz+yz-x=0$ define implícitamente a la función z = f(x,y).

$z^3+2z-2z-1=0 \Rightarrow z^3=1 \Rightarrow z=1$

El vector gradiente de f en el punto P es $\vec{\nabla} f(P)=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}=-\frac{2z-1}{3z^2+2x+y} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(P)=-\frac{1}{3} \\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}=-\frac{z}{3z^2+2x+y} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(P)=-\frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} f(P)=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2z-1}{3z^2+2x+y}\right)=-\frac{(3z^2+2x+y)\frac{\partial}{\partial x}(2z-1)-(2z-1)\frac{\partial}{\partial x}(3z^2+2x+y)}{(3z^2+2x+y)^2}=$$

$$=-\frac{(3z^2+2x+y)2\frac{\partial z}{\partial x}-(2z-1)\left(6z\frac{\partial z}{\partial x}+2\right)}{(3z^2+2x+y)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(P)=-\frac{3\left(-2\frac{1}{3}\right)-\left(-6\frac{1}{3}+2\right)}{9}=\boxed{\frac{-2}{9}}$$

b) Ecuación del plano tangente a la superficie z en el punto P:

$$z-z_0=\frac{\partial f}{\partial x}(P)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(P)(y-y_0) \Leftrightarrow z-1=-\frac{1}{3}\cdot(x-1)-\frac{1}{3}\cdot(y+2) \Leftrightarrow \boxed{x+y+3z-2=0}$$

Recta normal en P (pasa por P y es perpendicular al plano tangente en P):

$$\boxed{\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-2+\lambda \\ z=1+3\lambda \end{cases}}$$

c) $\vec{u}=\left(\cos\frac{\pi}{3},\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P)=\vec{\nabla} f(P)\cdot\vec{u}=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\boxed{-\frac{1+\sqrt{3}}{6}}$$

32.- La temperatura en un punto (x, y) de una lámina metálica es $T(x,y)=\dfrac{3x}{x^2+y^2}$**.**

a) Hallar la curva de nivel (isoterma) que pasa por el punto P(2, -1).
b) Hallar la dirección de máximo crecimiento de la temperatura en P.
c) Hallar el coeficiente de variación de la temperatura en P en la dirección de la bisectriz del primer cuadrante.
d) Hallar, usando la regla de la cadena, el coeficiente de variación de la temperatura a lo largo de la curva $\begin{cases} x = 2\,\text{sen}t \\ y = \cos t \end{cases}$**.**
e) Si la cota de error en la medida de "x" es de $\pm 1\%$ **y en la de "y" es de** $\pm 2\%$**, hallar el máximo error propagado de T en P.**

Solución:

a) Para hallar la curva de nivel en P(2,–1) calculamos previamente el valor de T(P)

#1: $$\frac{3\cdot 2}{2^2+(-1)^2}=\frac{6}{5}$$

La curva de nivel en P tiene por ecuación

#2: $$\frac{6}{5}=\frac{3\cdot x}{x^2+y^2}$$

Operando obtenemos $x^2+y^2-5/2x=0$ que corresponde a una circunferencia de centro (5/4,0) y radio 5/4.

b) La dirección de máximo crecimiento sabemos, por teoría que es la del vector gradiente.

#3: $$\frac{d}{dx}\frac{3\cdot x}{x^2+y^2}=\frac{3\cdot(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

#4: $$\frac{d}{dy}\frac{3\cdot x}{x^2+y^2}=-\frac{6\cdot x\cdot y}{(x^2+y^2)^2}$$

El vector gradiente en un punto (x,y) es:

#5: $$\left[\frac{3\cdot(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},\ -\frac{6\cdot x\cdot y}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

Y en P es:

#6: $$\left[\frac{3\cdot((-1)^2-2^2)}{(2^2+(-1)^2)^2},\ -\frac{6\cdot 2\cdot(-1)}{(2^2+(-1)^2)^2}\right]=\left[-\frac{9}{25},\ \frac{12}{25}\right]$$

c) Se nos pide la derivada direccional de T en P y en la dirección $\alpha=\pi/4$

#7: $$\left[-\frac{9}{25}, \frac{12}{25}\right]\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{3\cdot\sqrt{2}}{50}$$

d) Aplicamos la regla de la cadena a T a lo largo de la curva x=sent, y= cost, y sustituimos x e y por las funciones de t que definen x e y

#8: $$\frac{3\cdot(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}\cdot(2\cdot\cos(t)) + \left(-\frac{6\cdot x\cdot y}{(x^2 + y^2)^2}\right)\cdot(-\sin(t)) =$$

$$\frac{6\cdot(y^2 - x^2)\cdot\cos(t)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{6\cdot x\cdot y\cdot\sin(t)}{(x^2 + y^2)^2}$$

#9: $$\frac{6\cdot\cos(t)\cdot(1 - 3\cdot\sin(t)^2)}{(3\cdot\sin(t)^2 + 1)^2}$$

e) El error propagado máximo (en la medición de T) se obtiene a partir de la fórmula de la diferencial total de T

#10: $$dT = \left(\frac{d}{dx}\frac{3\cdot x}{x^2 + y^2}\right)\cdot(dx) + \left(\frac{d}{dy}\frac{3\cdot x}{x^2 + y^2}\right)\cdot(dy)$$

#11: $$dT = \frac{3\cdot(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}\cdot(dx) + \left(-\frac{6\cdot x\cdot y}{(x^2 + y^2)^2}\right)\cdot(dy)$$

Ahora sustituimos x=2, y=-1,dx=±0.01, dy=±0.02 y se obtiene la cota de error que denominamos "error propagado máximo"

$$\text{error propagado máximo} = \frac{3\cdot((-1)^2 - 2^2)}{(2^2 + (-1)^2)^2}\cdot(\pm 0.01) + \left(-\frac{6\cdot 2\cdot(-1)}{(2^2 + (-1)^2)^2}\right)\cdot(\pm 0.02)$$

#13: $$\text{error propagado máximo} = (-0.36)\cdot(\pm 0.01) + 0.48\cdot(\pm 0.02)$$

$$\text{error propagado máximo} = \pm\,|0.36\cdot 0.01 + 0.48\cdot 0.02|$$

$$\text{error propagado máximo} = \boxed{\pm 0.0132}$$

33.- Dada la superficie $ze^{x^2-y^2}-3=0$. Se pide:
a) Hallar la curva de nivel correspondiente a z = 1. ¿Qué tipo de curva es?
b) Hallar el plano tangente y la recta normal a la superficie en P(2, 2).
c) Estimar, mediante la diferencial, el incremento de la función, al pasar del punto P (2,2) al punto (2.01, 1.99).

Solución:

#1: $z\cdot e^{x^2-y^2}-3=0$

a)

#2: $1\cdot e^{x^2-y^2}-3=0$

#3: $e^{x^2-y^2}-3=0$

#4: $\mathrm{LN}\left(e^{x^2-y^2}\right)=\mathrm{LN}(3)$

#5: $x^2-y^2=\mathrm{LN}(3)$

#6: $\dfrac{x^2-y^2}{\mathrm{LN}(3)}=1$

Es una **hipérbola equilátera** de semiejes a = b = $\sqrt{\ln 3}$

b)

#7: $\dfrac{d}{dx}\left(z\cdot e^{x^2-y^2}-3\right)$

#8: $2\cdot x\cdot z\cdot e^{x^2-y^2}$

#9: $\dfrac{d}{dy}\left(z\cdot e^{x^2-y^2}-3\right)$

#10: $-2\cdot y\cdot z\cdot e^{x^2-y^2}$

#11: $\dfrac{d}{dz}\left(z\cdot e^{x^2-y^2}-3\right)$

#12: $e^{x^2-y^2}$

#13: $z\cdot e^{2^2-2^2}-3=0$

#14: $\mathrm{SOLVE}\left(z\cdot e^{2^2-2^2}-3=0,\ z,\ \mathrm{Real}\right)$

#15: $z=3$

Particularizamos las derivadas en el punto (2, 2, 3):

#16: $2\cdot 2\cdot 3\cdot e^{2^2 - 2^2}$

#17: 12

#18: $-\,2\cdot 2\cdot 3\cdot e^{2^2 - 2^2}$

#19: –12

#20: $e^{2^2 - 2^2}$

#21: 1

Y sustituimos en la ecuación del plano tangente:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P)(x-2)+\frac{\partial F}{\partial y}(P)(y-2)+\frac{\partial F}{\partial z}(P)(z-3)=0$$

#22: $12\cdot(x - 2) - 12\cdot(y - 2) + 1\cdot(z - 3) = 0$

#23: $\boxed{12\cdot x - 12\cdot y + z - 3 = 0}$

Recta normal en P:

#24: $[x, y, z] = [2, 2, 3] + \lambda\cdot[12, -12, 1]$

#25: $\boxed{x = 12\cdot\lambda + 2 \wedge y = 2 - 12\cdot\lambda \wedge z = \lambda + 3}$

c)

$$\Delta f(P)\approx df(P)=f`_x(P)\Delta x+f`_y(P)\Delta y$$

$$\left.\begin{array}{l} z`_x(P)=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(P)}{\frac{\partial F}{\partial z}(P)}=-12 \\[2ex] z`_y(P)=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}(P)}{\frac{\partial F}{\partial z}(P)}=12 \end{array}\right\}\Rightarrow \Delta f(P)\approx -12\times 0.01+12\times(-0.01)\approx \boxed{-0.24}$$

34.- Sea la función $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$. **Se pide:**

a) Razonar si esta función es continua en el punto (0,0).

b) Hallar, si existen, las derivadas parciales $f'_x(0,0)$ **y** $f'_y(0,0)$**.**

Solución:

Límites radiales

a) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xmx+m^3x^3}{x^2+m^2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{m+m^3x}{1+m^2}=\dfrac{m}{1+m^2}$

Los límites radiales depende de m, luego, no existe el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Por tanto, ***f* no es continua en (0, 0)**.

b)

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=\lim_{h\to 0}0=\boxed{0}$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{k^3}{k^2}-0}{k}=\lim_{k\to 0}1=\boxed{1}$$

35.- a) Hallar la derivada direccional de $z=\dfrac{xy}{x^2-y^2}$ en el punto (1,0), según la dirección del vector $\vec{u}=(-1,1)$:
a_1) Aplicando la definición.
a_2) Mediante la diferencial.
b) ¿Cuál es la dirección de máximo crecimiento de z en el punto (1, 0)?

Solución:
a)

a_1) $\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,0)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f\left((1,0)+\lambda\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)-f(1,0)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\left[f\left(1-\frac{\lambda}{\sqrt{2}},\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)-0\right]=$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\left(1-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}{\left(1-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{\lambda^2}{2}}\right]=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\left(1-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{2}{\sqrt{2}}\lambda}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

a_2)

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,1)=\vec{\nabla}f(1,0)\cdot\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_x(x,y)=\dfrac{-y(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}\Rightarrow f'_x(1,0)=0 \\ f'_y(x,y)=\dfrac{x(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}\Rightarrow f'_y(1,0)=1 \end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,0)=(0,1)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

b) La dirección de máximo crecimiento de z en el punto (1,0) viene dada por:

$$\boxed{\vec{\nabla}f(1,0)=(0,\ 1)}$$

36.- Dada la superficie $x^2 + 2y^2 + z^2 = 10$, con $z \geq 0$, se pide:
a) Hallar la curva de nivel correspondiente a z = 1. ¿Qué tipo de curva es?
b) Hallar el plano tangente y la recta normal a la superficie en P (2, 1).
c) Estimar, mediante la diferencial, el incremento de la función, al pasar del punto (2,1) de su dominio, al (2.01, 0.99).

Solución:

$$F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 10 = 0; \quad z \geq 0$$

a)

$$z = 1 \Rightarrow x^2 + 2y^2 + 1 - 10 = 0 \quad \Rightarrow x^2 + 2y^2 = 9 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9/2} = 1}$$

Es una elipse de semiejes a = 3, $b = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

b)

$$F'_x(P_0)(x - x_0) + F'_y(P_0)(y - y_0) + F'_z(P_0)(z - z_0) = 0$$

$$F'_x = 2x \Rightarrow F'_x(2,1) = 4$$

$$F'_y = 4y \Rightarrow F'_y(2,1) = 4$$

$$F'_z = 2z; \quad 4 + 2 + z^2 = 10 \Rightarrow z^2 = 10 - 6 = 4 \quad \Rightarrow z = \pm 2; \quad como \quad z \geq 0, \quad z = 2$$

$$F'_z(2,1) = 2 \cdot 2 = 4$$

Plano tangente:

$$4(x-2)+4(y-1)+4(z-2)=0 \Leftrightarrow x-2+y-1+z-2=0 \Leftrightarrow \boxed{x+y+z-5=0}$$

Recta normal:

$$\boxed{\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}}$$

Pues $\vec{n} = (1,1,1)$ es perpendicular al plano tangente en (2,1)

c)

$$\Delta x = 0.01$$

$$\Delta y = -0.01$$

$$\Delta f(2,1) \approx df(2,1) = f'_x(2,1)\Delta x + f'_y(2,1)\Delta y$$

$$f'_x(2,1) = -\frac{F'_x(2,1)}{F'_z(2,1)} = -\frac{4}{4} = -1$$

$$f'_y(2,1) = -\frac{F'_y(2,1)}{F'_z(2,1)} = -\frac{4}{4} = -1$$

$$\Rightarrow \Delta f(2,1) \approx (-1) \cdot 0.01 + (-1) \cdot (-0.01) = \boxed{0}$$

37.- a) Deducir cuál es la dirección de máximo crecimiento de una función diferenciable z=f(x, y) en un punto P(x_0, y_0).

b) Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

b_1) Si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ = L, entonces obligatoriamente existe el límite a lo largo de cualquier camino que pasa por (x_0,y_0) y vale L.

b_2) Si f es diferenciable en (x_0, y_0), entonces f es continua en (x_0, y_0).

b_3) Si f tiene derivadas parciales en (x_0,y_0), entonces f es continua en (x_0, y_0).

Solución:

a)

$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = \vec{\nabla} f(P) \cdot \vec{u} = |\vec{\nabla} f(P)| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos(\alpha)$ es máxima cuando $\cos(\alpha) = 1$ siendo:

$$\boxed{\alpha = \widehat{\vec{\nabla} f(P), \vec{u}} = 0^{\circ}}$$

Luego, la dirección y el sentido de $\vec{u}$ coincide con los de $\vec{\nabla} f(P)$.

b)

b_1) VERDADERO

b_2) VERDADERO

b_3) FALSO

38.- a) Hallar la derivada direccional de $z=\dfrac{xy}{x+y}$ **en el punto P(1,0), según la dirección del vector** $\vec{u}=(1,-1)$ **:**

a$_1$) Aplicando la definición.

a$_2$) Mediante la diferencial.

b) Razonar si z es creciente o decreciente en P en la dirección de $\vec{u}$**.**

c) ¿Cuál es la dirección de máximo crecimiento de z en el punto (1, 0)?

Solución:

a)

a$_1$) $\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,0)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f\left(1+\frac{\lambda}{\sqrt{2}},0-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)-f(1,0)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\left[\frac{-1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)\right]=\boxed{\frac{-1}{\sqrt{2}}}$$

a$_2$)

$$z`_x=\frac{(x+y)y-xy}{(x+y)^2}\Rightarrow z`_x(1,0)=0$$

$$z`_y=\frac{(x+y)x-xy}{(x+y)^2}\Rightarrow z`_y(1,0)=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,0)=\vec{\nabla} f(1,0)\cdot\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=(0,\ 1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\boxed{\frac{-1}{\sqrt{2}}}$$

b) **z es decreciente en P en la dirección de** $\vec{u}$ por ser $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,0)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<0$.

c) La dirección de máximo crecimiento de z en el punto (1, 0) viene dada por:

$$\boxed{\vec{\nabla} f(1,0)=(0,1)}$$

6.- La temperatura en un entorno del origen viene dada por una función de la forma $T(x,y) = T_0 + e^y \operatorname{sen} x$. Hallar la trayectoria seguida por una partícula, originada en el origen, que huye del calor. Hallar la variación de temperatura que experimentaría la partícula si tomase la dirección del vector $\bar{u}$ = (1,-2).

Solución:

Representamos la trayectoria por unas ecuaciones paramétricas: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$.

Un vector tangente a dicha trayectoria en cada punto $(x(t), y(t))$ viene dado por

$$\vec{r}\,`(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right).$$

Como la partícula huye del calor, tomará la dirección de máximo descenso de temperatura, que viene dada por el vector:

$$-\vec{\nabla}T(x,y) = -\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}\right) = -\left(e^y \cos x, e^y \operatorname{sen} x\right)$$

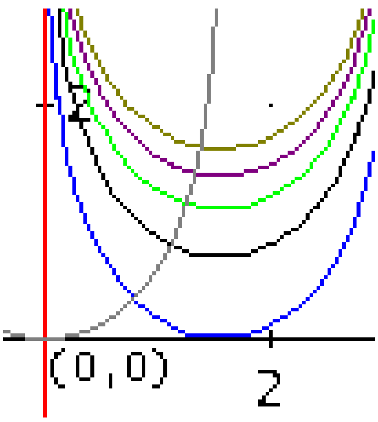
Por tanto, las direcciones de $\vec{r}\,`(t)$ y de $\left(-e^y \cos x, -e^y \operatorname{sen} x\right)$ son la misma a lo largo de toda la trayectoria. Así pues,

$-e^y \cos x = k\dfrac{dx}{dt}$ y $-e^y \operatorname{sen} x = k\dfrac{dy}{dt}$, donde k depende de t.

Despejando $\dfrac{dt}{k}$ en cada ecuación e igualando los resultados, se obtiene:

$$\frac{dx}{\cos x} = \frac{dy}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow \operatorname{tg} x \; dx = dy \Rightarrow y = \int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln(\cos x) + C$$

Como sabemos que la partícula parte del origen, ha de ser: $0 = -\ln(\cos 0) + C = C$.



Por consiguiente, la trayectoria seguida por la partícula será:

$$\boxed{y = -\ln(\cos x)}$$

La figura muestra esa trayectoria.

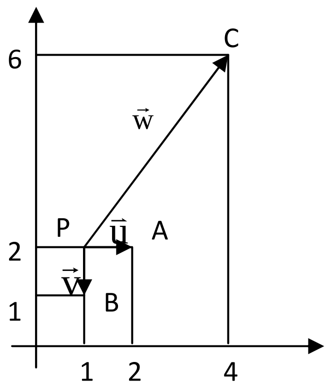
Observación: La trayectoria es perpendicular a las curvas de nivel (isotermas) pues en cada punto su vector tangente es paralelo al vector gradiente en ese punto.

La variación de temperatura que experimentaría la partícula si tomase la dirección del vector $\bar{u}$ = (1,-2) sería la derivada direccional de T en el (0, 0) en la dirección de dicho vector:

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{u}}(0,0) = \vec{\nabla}T(0,0) \cdot \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} = (-1,0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{5}}$$

7.- Un campo escalar diferenciable z = f(x, y) tiene, en el punto P(1,2) las derivadas direccionales +2 en dirección al punto A(2,2) y –2 en dirección al punto B(1,1). Determinar el vector gradiente en P y calcular la derivada direccional en P en dirección al punto C(4,6).

Solución:



Sea $\vec{\nabla} f(P) = (a, b)$

Vector dirección de P a A: $\vec{u} = (2,2) - (1,2) = (1,0)$

Vector dirección de P a B: $\vec{v} = (1,1) - (1,2) = (0,-1)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) &= \vec{\nabla} f(P)\cdot(1,0) = 2 \\ \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P) &= \vec{\nabla} f(P)\cdot(0,-1) = -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{aligned} (a,b)(1,0) &= a = 2 \\ (a,b)(0,-1) &= -b = -2 \end{aligned}\right. \Rightarrow a = 2, b = 2 \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} f(P) = (2,2)}$$

Vector dirección de P a C: $\vec{w} = (4,6) - (1,2) = (3,4) \Rightarrow |\vec{w}| = \sqrt{9+16} = 5$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(P) = (2,2)\frac{(3,4)}{5} = \frac{14}{5}}$$

8.- Hallar la constante *c* tal que en todo punto de la intersección de las dos esferas

$$(x-c)^2+y^2+z^2=3\,;\; x^2+(y-c)^2+z^2=1$$

los planos tangentes correspondientes sean perpendiculares entre sí.

Solución:

Unas ecuaciones implícitas de ambas esferas son, respectivamente:

$$F(x,y,z)=(x-c)^2+y^2+z^2-3=0$$

$$G(x,y,z)=x^2+(y-c)^2+z^2-1=0$$

Un vector normal al plano tangente a la primera superficie es:

$$\vec{n}_1=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)=(2(x-c),\ 2y,\ 2z)$$

Un vector normal al plano tangente a la segunda superficie es:

$$\vec{n}_2=\left(\frac{\partial G}{\partial x},\frac{\partial G}{\partial y},\frac{\partial G}{\partial z}\right)=(2x,\ 2(y-c),\ 2z)$$

Para que se cumplan las condiciones exigidas en el enunciado del problema, para el punto genérico P(x, y, z) se ha de verificar:

1) P debe pertenecer a la primera superficie: $(x-c)^2+y^2+z^2-3=0$
2) P debe pertenecer a la segunda superficie: $x^2+(y-c)^2+z^2-1=0$
3) $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0 \Leftrightarrow (2(x-c),\ 2y,\ 2z)\cdot(2x,\ 2(y-c),\ 2z)=0 \Leftrightarrow x^2-cx+y^2-cy+z^2=0$

Resolviendo con DERIVE el sistema formado por las tres ecuaciones anteriores, se obtiene que ha de ser $\boxed{c=\pm\sqrt{2}}$.

9.- Un pato está nadando a lo largo de la circunferencia unidad $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$ y la temperatura del agua en el estanque está dada por la expresión $T = x^2 e^y - x y^3$. Hallar el coeficiente de variación de la temperatura $\dfrac{\partial T}{\partial t}$ que puede sentir el pato:

a) Expresando T en términos de t y diferenciando.
b) Mediante la regla de la cadena.

Solución:

a) $T(t) = \cos^2 t \cdot e^{\operatorname{sen} t} - \cos t \cdot \operatorname{sen}^3 t$

$$\frac{dT}{dt} = 2\cos t\,(-\operatorname{sen} t)e^{\operatorname{sen} t} + \cos^2 t\, e^{\operatorname{sen} t}\cos t - \left[(-\operatorname{sen} t)\operatorname{sen}^3 t + \cos t\, 3\operatorname{sen}^2 t\cos t\right] =$$

$$\boxed{-2\cos t\operatorname{sen} t\, e^{\operatorname{sen} t} + \cos^3 t\, e^{\operatorname{sen} t} + \operatorname{sen}^4 t - 3\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t}$$

b)

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[r, dash] & t \\ T \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \\ & y \arrow[r, dash] & t \end{tikzcd}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} =$$

$$\left(2xe^y - y^3\right)\left(-\operatorname{sen} t\right) + \left(x^2 e^y - 3xy^2\right)\cos t =$$

$$\boxed{-2\cos t\operatorname{sen} t\, e^{\operatorname{sen} t} + \cos^3 t\, e^{\operatorname{sen} t} + \operatorname{sen}^4 t - 3\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t}$$

10.- El cambio de variables $\begin{cases} x = u + v \\ y = uv^2 \end{cases}$ **transforma z = f(x,y) en z = g(u,v). Calcular el valor de** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}$ **en el punto u =1, v =1, sabiendo que** $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$ **en dicho punto.**

Solución:

$$f \equiv g \begin{cases} x \begin{cases} u \\ \ \end{cases} \\ y \begin{cases} u \\ \ \end{cases} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot v^2$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot v^2\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\cdot v^2\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + v^2 \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \begin{cases} x \begin{cases} u \\ \ \end{cases} \\ y \begin{cases} u \\ \ \end{cases} \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial v}$$

Sustituyendo estas dos últimas expresiones en la anterior a ellas, queda:

$$\boxed{\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial v} + v^2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial v}\right] + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial v}\left(v^2\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}2uv + v^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}2uv\right] + \frac{\partial f}{\partial y}2v \underset{(u,v)=(1,1)}{=} 1+2+1+2+2 = \boxed{8}$$

11.- La ecuación $xy + xz^3 + zy + 1 = 0$ define implícitamente una función real de dos variables reales z=f(x,y).
a) Hallar el vector gradiente de f en el punto P(-1,1,0).
b) Calcular la derivada direccional de z en P en la dirección de descenso más pronunciado.
c) Dar la ecuación del plano tangente a la superficie z en el punto P.
d) Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ en P.

Solución:

a) $F(x, y, z) = xy + xz^3 + zy + 1 = 0$ define implícitamente a la función z = f(x,y).

El vector gradiente de f en el punto P es $\vec{\nabla} f(P) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)_P$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{y+z^3}{3xz^2+y} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(P) = \frac{-1}{1} = -1 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = -\frac{x+z}{3xz^2+y} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(P) = -\frac{-1}{1} = 1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} f(P) = (-1,1)}$$

b) La dirección de descenso más pronunciado viene dada por el vector:

$$\vec{u} = -\vec{\nabla} f(P) = (1,-1)$$

La derivada direccional de z en P en esta dirección es:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = (-1,1)\frac{(1,-1)}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{-1}{\sqrt{2}} = \boxed{-\frac{2}{\sqrt{2}}}$$

c) Ecuación del plano tangente a la superficie z en el punto P:

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(P)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)(y - y_0) \Leftrightarrow z - 0 = -1\cdot(x+1) + 1\cdot(y-1) \Leftrightarrow x - y + z + 2 = \boxed{0}$$

d) $$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x+z}{3xz^2+y}\right) = -\frac{(3xz^2+y)\frac{\partial}{\partial y}(x+z) - (x+z)\frac{\partial}{\partial y}(3xz^2+y)}{(3xz^2+y)^2} =$$

$$\frac{(3xz^2+y)\frac{\partial z}{\partial y} - (x+z)\left(3x2z\frac{\partial z}{\partial y}+1\right)}{(3xz^2+y)^2} \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_P = -\frac{(0+1)\cdot 1 - (-1+0)\cdot(0+1)}{(0+1)^2} = \boxed{-2}$$

12.- Dada la función f(x, y) = $x \cdot \mathrm{tg}\, y$**, se pide:**
a) Hallar el dominio de f.
b) Dar las direcciones de máximo y nulo crecimiento de f en el punto P$\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$**.**
c) Calcular la derivada direccional h(α) de f en P en la dirección que forma un ángulo α con el eje de abscisas.
d) Hallar la aproximación lineal (plano tangente) de f(x,y) en P.
e) Suponiendo que el error estimado al medir la magnitud "x" es de un ±2% y el de "y" un 5% ¿cuál es la estimación del error propagado?
f) Calcula la derivada de f respecto de t en la circunferencia $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \mathrm{sen}\, t \end{cases}$**.**

Solución

a) Domf = **R^2- {(x, y) tales que y= kπ/2, k∈R}**

b) La dirección de máximo crecimiento es la del gradiente:

$$\vec{\nabla} f(P) = \left(\tan y, \frac{x}{\cos^2 y}\right)_P = \mathbf{(1,4)}.$$

Análogamente la dirección de nulo crecimiento es $\vec{u} \perp \vec{\nabla} f(P)$, luego $\vec{u} =$ **(4,-1)**.

c) Un vector en la dirección indicada es $\vec{u}=$ (cosα, senα), además $|\vec{u}| = 1$, por tanto, h(α)=$\vec{\nabla} f(P)$ (cosα, senα)= (1,4) (cosα, senα)= **cosα+4senα**.

d) La ecuación de la aproximación lineal es la del plano tangente en P:

$$z = z_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P (y - y_0)$$

$$z_0 = f(2,\pi/4) = 2 \Rightarrow \boxed{\mathbf{z = 2+}1(x-2)+4(y-\frac{\pi}{4})}$$

e) $dz = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P dy \Rightarrow$ el error propagado es

$$E \approx 1\cdot(\pm 0{,}02) + 4\cdot(\pm 0{,}05) = \mathbf{\pm 0{,}22}$$

f) $\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt} = \tan y \cos t + \frac{x}{\cos^2 y}\mathrm{sen} t =$

$$\boxed{\tan(\mathrm{sen} t)\cos t + \frac{\cos t}{\cos^2(\mathrm{sen} t)}\mathrm{sen} t}$$

13.- La temperatura en un punto (x, y) de una lámina metálica es $T(x,y)=\dfrac{3x}{x^2+y^2}$.

a) Hallar la curva de nivel (isoterma) que pasa por el punto P(2, -1).
b) Hallar la dirección de máximo crecimiento de la temperatura en P.
c) Hallar el coeficiente de variación de la temperatura en P en la dirección de la bisectriz del primer cuadrante.
d) Hallar, usando la regla de la cadena, el coeficiente de variación de la temperatura a lo largo de la curva $\begin{cases} x=2\,\mathrm{sen}\,t \\ y=\cos t \end{cases}$.
e) Si la cota de error en la medida de "x" es de $\pm 1\%$ **y en la de "y" es de** $\pm 2\%$**, hallar el máximo error propagado de T en P.**

Solución

a) Para hallar la curva de nivel en P(2,-1) calculamos previamente el valor de T(P)

#1: $$\frac{3\cdot 2}{2^2+(-1)^2}=\frac{6}{5}$$

La curva de nivel en P tiene por ecuación

#2: $$\frac{6}{5}=\frac{3\cdot x}{x^2+y^2}$$

Operando obtenemos $x^2+y^2-5/2x=0$ que corresponde a una circunferencia de centro (5/4,0) y radio 5/4.

b) La dirección de máximo crecimiento sabemos, por teoría que es la del vector gradiente.

#3: $$\frac{d}{dx}\frac{3\cdot x}{x^2+y^2}=\frac{3\cdot(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

#4: $$\frac{d}{dy}\frac{3\cdot x}{x^2+y^2}=-\frac{6\cdot x\cdot y}{(x^2+y^2)^2}$$

El vector gradiente en un punto (x,y) es:

#5: $$\left[\frac{3\cdot(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},\ -\frac{6\cdot x\cdot y}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

Y en P es:

#6: $$\left[\frac{3\cdot((-1)^2-2^2)}{(2^2+(-1)^2)^2},\ -\frac{6\cdot 2\cdot(-1)}{(2^2+(-1)^2)^2}\right]=\left[-\frac{9}{25},\ \frac{12}{25}\right]$$

c) Se nos pide la derivada direccional de T en P y en la dirección $\alpha=\pi/4$

#7: $$\left[-\frac{9}{25}, \frac{12}{25}\right]\cdot\left[\mathrm{COS}\left(\frac{\pi}{4}\right), \mathrm{SIN}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{3\cdot\sqrt{2}}{50}$$

d) Aplicamos la regla de la cadena a T a lo largo de la curva x=sent, y= cost, y sustituimos x e y por las funciones de t que definen x e y

#8: $$\frac{3\cdot(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}\cdot(2\cdot\mathrm{COS}(t)) + \left(-\frac{6\cdot x\cdot y}{(x^2 + y^2)^2}\right)\cdot(-\mathrm{SIN}(t)) =$$

$$\frac{6\cdot(y^2 - x^2)\cdot\mathrm{COS}(t)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{6\cdot x\cdot y\cdot\mathrm{SIN}(t)}{(x^2 + y^2)^2}$$

#9: $$\frac{6\cdot\mathrm{COS}(t)\cdot(1 - 3\cdot\mathrm{SIN}(t)^2)}{(3\cdot\mathrm{SIN}(t)^2 + 1)^2}$$

e) El error propagado máximo (en la medición de T) se obtiene a partir de la fórmula de la diferencial total de T

#10: $$dT = \left(\frac{d}{dx}\frac{3\cdot x}{x^2 + y^2}\right)\cdot(dx) + \left(\frac{d}{dy}\frac{3\cdot x}{x^2 + y^2}\right)\cdot(dy)$$

#11: $$dT = \frac{3\cdot(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}\cdot(dx) + \left(-\frac{6\cdot x\cdot y}{(x^2 + y^2)^2}\right)\cdot(dy)$$

Ahora sustituimos x=2, y=-1,dx=±0.01, dy=±0.02 y se obtiene la cota de error que denominamos "error propagado máximo"

#12: $$\text{error propagado máximo} = \frac{3\cdot((-1)^2 - 2^2)}{(2^2 + (-1)^2)^2}\cdot(\pm 0.01) + \left(-\frac{6\cdot 2\cdot(-1)}{(2^2 + (-1)^2)^2}\right)\cdot(\pm 0.02)$$

#13: $$\text{error propagado máximo} = (-0.36)\cdot(\pm 0.01) + 0.48\cdot(\pm 0.02)$$

#14: $$\text{error propagado máximo} = \pm\ |0.36\cdot 0.01 + 0.48\cdot 0.02|$$

#15: $$\text{error propagado máximo} = \pm 0.0132$$

14.- La ecuación $z^2+x^2z+2xy+yz-3=0$ define $z=f(x,y)$ como función implícita de x e y. Hallar:

a) $\vec{\nabla} f(P_0)$**, siendo $P_0(1,1,0)$.**

b) Plano tangente a la superficie en el punto P_0.

c) La derivada direccional de f en el mismo punto P_0, en la dirección de la bisectriz del segundo cuadrante. Decir si $z=f(x,y)$, en P y en esa dirección, es creciente, decreciente, o si está en la dirección de una curva de nivel.

d) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(P_0)$**.**

Solución

a) $F(x,y,z)=z^2+x^2z+2xy+yz-3$

$$\left.\begin{aligned} F_x &= 2xz+2y \\ F_y &= 2x+z \\ F_z &= 2z+x^2+y \end{aligned}\right| \Rightarrow \left.\begin{aligned} z_x &= -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2xz+2y}{2z+x^2+y} \\ z_y &= -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2x+z}{2z+x^2+y} \end{aligned}\right|$$

Sustituyendo en P_0: $z_x=-1$, $z_y=-1$, luego, $\vec{\nabla} f(P_0)$ = **(-1, -1)**.

b) Plano tangente a la superficie en el punto P_0:

$$z-z_0=\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y-y_0) \Leftrightarrow z-0=-1\cdot(x-1)-1\cdot(y-1) \Leftrightarrow \boxed{x+y+z-2=0}$$

c) Vector unitario en la dirección de la bisectriz del segundo cuadrante:

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Derivada direccional de f en P_0, en la dirección de este vector:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{u}}(1,1)= \vec{\nabla} z(1,1)\cdot\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=(-1,-1)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$$

Luego, en P y en esa dirección, **z está en una curva de nivel**.

d) $$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2x+z}{2z+x^2+y}\right)=$$

$$=-\frac{(2z+x^2+y)\frac{\partial}{\partial y}(2x+z)-(2x+z)\frac{\partial}{\partial y}(2z+x^2+y)}{(2z+x^2+y)^2}=$$

$$=-\frac{(2z+x^2+y)\frac{\partial z}{\partial y}-(2x+z)\left(2\frac{\partial z}{\partial y}+1\right)}{(2z+x^2+y)^2}\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(P_0)=-\frac{-1(2)-2(-2+1)}{4}=0}$$

15.- En una superficie, la temperatura en un entorno del punto P$\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ viene dada por la función T(x,y)= $\sqrt{2}e^{-y}\cos x$

a) Hallar la dirección de máximo calor seguida por una partícula que parte de P.

b) Hallar la variación de temperatura experimentada por la partícula si toma, desde P, la dirección del vector $\vec{u}=$**(1,-2).**

Solución

a) $\vec{\nabla}T\left(\frac{\pi}{4},0\right)=\left(\frac{\partial T}{\partial x},\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{\left(\frac{\pi}{4},0\right)}=\boxed{(-1,-1)}$

b) $\frac{\partial T}{\partial \vec{u}}(P)=\vec{\nabla}T(P)\cdot\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=(-1,-1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)=\boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}}$

16.- Hallar unas ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva intersección de las superficies $xy + z=0$, $x^2 + y^2 + z^2=9$, en el punto $P_0(2,1,-2)$.

Solución

La recta tangente es la intersección de los dos planos tangentes a ambas superficies en el punto P_0.

Plano tangente a la primera superficie:

$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(P)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)(y - y_0) \Leftrightarrow x + 2y + z - 2 = 0$, siendo $f(x, y) = - x y$.

Plano tangente a la segunda superfície:

$\frac{\partial F}{\partial x}(P)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(P)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(P)(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 2z - 9 = 0$, siendo $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$.

Ecuación de la recta tangente pedida: $\boxed{t \equiv \begin{cases} x + 2y + z - 2 = 0 \\ 2x + y - 2z - 9 = 0 \end{cases}}$

17.- La ecuación $\cos(\pi x) - x^2 y + e^{xz} + yz = 4$ **define implícitamente la función** $z = f(x,y)$**. Suponiendo que se dieran las condiciones de diferenciabilidad adecuadas, calcular:**

a) Plano tangente a la superficie en el punto $P_0(0,1)$**.**

b) Derivada direccional de z en $P_0(0,1)$ **y en la dirección** $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ **.**

c) Ecuación y dibujo aproximado de la curva de nivel que pasa por P_0**.**

d) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}(P_0)$**.**

Solución:

a) $F(x,y,z) = \cos(\pi x) - x^2 y + e^{xz} + yz - 4 = 0$

Para x = 0, y = 1, se obtiene: $1 - 0 + 1 + z - 4 = 0 \Rightarrow z = 2$

$$\pi \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{P_0}(x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{P_0}(y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{P_0}(z - z_0) = 0$$

$$F_x(x,y,z) = -\pi \operatorname{sen}(\pi x) - 2xy + e^{xz} z \Rightarrow F_x(0,1,2) = 2$$

$$F_y(x,y,z) = -x^2 + z \Rightarrow F_y(0,1,2) = 2$$

$$F_z(x,y,z) = e^{xz} x + y \Rightarrow F_z(0,1,2) = 1$$

Luego, se tiene que:

$$\pi \equiv 2(x-0) + 2(y-1) + 1(z-2) = 0 \Leftrightarrow \boxed{2x + 2y + z - 4 = 0}$$

b) Si el vector es unitario: $\frac{\partial z}{\partial \vec{u}}(P_0) = \vec{\nabla} f(P_0) \cdot \vec{u}$.

Un vector unitario en la dirección $\alpha = -\frac{\pi}{4}$, es:

$$\vec{u} = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right), \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(P_0) = -\frac{F_x(0,1,2)}{F_z(0,1,2)} = -2; \quad \frac{\partial z}{\partial y}(P_0) = -\frac{F_y(0,1,2)}{F_z(0,1,2)} = -2$$

Por tanto, $\frac{\partial z}{\partial \vec{u}}(P_0) = \vec{\nabla} f(P_0) \cdot \vec{u} = (-2,-2) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2} = \boxed{0}$.

c) Curva de nivel que pasa por $P_0(0,1)$: Se sustituye z por 2 en la ecuación de la superficie:

$$\cos(\pi x) - x^2 y + e^{2x} + 2y = 4 \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{e^{2x} + \cos(\pi x) - 4}{x^2 - 2}}$$

d) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(P_0)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{F_y}{F_z}\right)=-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{z-x^2}{xe^{xz}+y}\right)=$

$$-\frac{\left(xe^{xz}+y\right)\left(z_x-2x\right)-\left(z-x^2\right)\left[xe^{xz}\left(xz_x+z\right)+e^{xz}\right]}{\left(xe^{xz}+y\right)^2}$$

Particularizando en P_0 (x = 0, y = 1, z = 2), se obtiene:

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(P_0)=-\frac{1(-2)-2}{1}=4}$$

18.- Un posible modelo para el consumo de leche "per cápita" viene dado por la función z = -1,83x- 1,09 y +140,7 donde x es el consumo de leche desnatada, y el de leche semidesnatada y z el de leche entera. Una empresa láctea estima para el año un consumo "per cápita" de 35,1± 1 litros de leche desnatada y 40,1± 1 litros de leche semidesnatada. Se pide estimar el máximo error propagado y el error porcentual en la predicción sobre el consumo de leche entera.

Solución

El error propagado viene dado por la diferencial:

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x}(P_0)\ \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(P_0)\ \Delta y$$

#1: $z = f(x, y) = -1.83 \cdot x - 1.09 \cdot y + 140.7$

#2: $f(35.1, 40.1) = -1.83 \cdot 35.1 - 1.09 \cdot 40.1 + 140.7 = 32.758$

#3: $\frac{d}{dx}(-1.83 \cdot x - 1.09 \cdot y + 140.7) = -1.83$

#4: $\frac{d}{dy}(-1.83 \cdot x - 1.09 \cdot y + 140.7) = -1.09$

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x}(P_0)\ \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(P_0)\ \Delta y = (-1.83).\ 1 + (-1.09)\ 1 = \boxed{-\ 2.92}.$$

Error porcentual:

#5: $\frac{-1.83 \cdot 1 + (-1.09) \cdot 1}{32.758} \cdot 100 = -\frac{146000}{16379}$

#6: $\frac{-1.83 \cdot 1 + (-1.09) \cdot 1}{32.758} \cdot 100 = -8.913853104$

#7: $\left| \frac{-1.83 \cdot 1 + (-1.09) \cdot 1}{32.758} \cdot 100 \right| = \left| -8.913853104 \right| = \boxed{8.913853104\ \%}$

19.- a) Aplicando la regla de la cadena, calcular la derivada dz/dt a lo largo de la curva x=cost, y=sent, siendo $z = e^x \operatorname{sen} y$ y evaluar si, en t=π/2, z es creciente o decreciente.
b) El radio y la altura de un cilindro circular recto verifican que:

$$\frac{dr}{dt} = 6cm/\min, \frac{dh}{dt} = -4cm/\min$$

Si V=πr²h es el volumen de dicho cilindro se pide, aplicando la regla de la cadena, hallar para r=h=5cm, su ritmo de variación, es decir, la derivada, $\frac{dV}{dt}$.

Solución

a) $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$

#8: $z = e^x \cdot \mathrm{SIN}(y)$

#9: $\frac{d}{dx}(e^x \cdot \mathrm{SIN}(y)) = e^x \cdot \mathrm{SIN}(y)$

#10: $\frac{d}{dy}(e^x \cdot \mathrm{SIN}(y)) = e^x \cdot \mathrm{COS}(y)$

Llevando estas expresiones a la derivada:

#11: $\frac{dz}{dt} = (e^x \cdot \mathrm{SIN}(y))\cdot(-\ \mathrm{SIN}(t)) + (e^x \cdot \mathrm{COS}(y))\cdot \mathrm{COS}(t)$

Sustituyendo x e y en función de t en la expresión anterior:

#12: $(e^{\mathrm{COS}(t)} \cdot \mathrm{SIN}(\mathrm{SIN}(t)))\cdot(-\ \mathrm{SIN}(t)) + (e^{\mathrm{COS}(t)} \cdot \mathrm{COS}(\mathrm{SIN}(t)))\cdot \mathrm{COS}(t) =$
$e^{\mathrm{COS}(t)} \cdot (\mathrm{COS}(t)\cdot \mathrm{COS}(\mathrm{SIN}(t)) - \mathrm{SIN}(t)\cdot \mathrm{SIN}(\mathrm{SIN}(t)))$

#13: $e^{\mathrm{COS}(t)} \cdot (\mathrm{COS}(t)\cdot \mathrm{COS}(\mathrm{SIN}(t)) - \mathrm{SIN}(t)\cdot \mathrm{SIN}(\mathrm{SIN}(t)))$

Para el valor t=π/2:

#14: $e^{\mathrm{COS}(\pi/2)} \cdot \left(\mathrm{COS}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot \mathrm{COS}\left(\mathrm{SIN}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \mathrm{SIN}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot \mathrm{SIN}\left(\mathrm{SIN}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) =$

$\boxed{-\mathrm{SIN}(1)}$

Por ser la derivada $\frac{dz}{dt}$(π/2) < 0, z es **decreciente** en dicho valor de t.

b)

#15: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Calculemos $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt}$:

$$\left(\frac{d}{dr}(\pi \cdot r^2 \cdot h)\right)\cdot \frac{d}{dt} r + \left(\frac{d}{dh}(\pi \cdot r^2 \cdot h)\right)\cdot \frac{d}{dt} h = (2\cdot \pi \cdot h \cdot r)\cdot \frac{d}{dt} r + (\pi \cdot r^2)\cdot \frac{d}{dt} h$$

Sustituyendo r y h por sus valores concretos, se obtiene $\frac{dV}{dt}$(5, 5):

#17: $(2\cdot \pi \cdot 5 \cdot 5)\cdot 6 + (\pi \cdot 5^2)\cdot(-4) = \boxed{200\cdot \pi}$

20.- La ecuación $x\ln y + y^2 z + z^3 = 10$ define de forma implícita a z como función de x e y, se pide:
a) La derivada direccional de z en el punto P(2,1) en la dirección del vector (2,-2)
b) Las direcciones de la curva de nivel de z en P.
c) El plano tangente y la recta normal en P.

Solución:

a) $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{u}}(P) = \vec{\nabla} f(P) \cdot \vec{u}$

Hemos de hallar el vector gradiente de f en forma implícita:

#18: $F(x, y, z) = x \cdot LN(y) + y^2 \cdot z + z^3 - 10 = 0$

#19: $\dfrac{d}{dx}(x \cdot LN(y) + y^2 \cdot z + z^3 - 10) = LN(y)$

#20: $\dfrac{d}{dy}(x \cdot LN(y) + y^2 \cdot z + z^3 - 10) = \dfrac{x}{y} + 2 \cdot y \cdot z$

#21: $\dfrac{d}{dz}(x \cdot LN(y) + y^2 \cdot z + z^3 - 10) = y^2 + 3 \cdot z^2$

El gradiente de z en (x, y) es

#22: $\left[- \dfrac{LN(y)}{y^2 + 3 \cdot z^2}, - \dfrac{\dfrac{x}{y} + 2 \cdot y \cdot z}{y^2 + 3 \cdot z^2}\right]$

Hallemos f(2,1), despejando z en la ecuación implícita para esos valores de x e y:

#23: $SOLVE(2 \cdot LN(1) + 1^2 \cdot z + z^3 - 10 = 0, z)$

#24: $z = -1 - 2 \cdot i \lor z = -1 + 2 \cdot i \lor z = 2$

Luego, **z = 2**.

El gradiente de z en (2, 1) es:

$$\#25: \quad \left[- \frac{LN(1)}{1^2 + 3\cdot 2^2}, - \frac{\frac{2}{1} + 2\cdot 1\cdot 2}{1^2 + 3\cdot 2^2} \right]$$

$$\#26: \quad \left[- \frac{LN(1)}{1^2 + 3\cdot 2^2}, - \frac{\frac{2}{1} + 2\cdot 1\cdot 2}{1^2 + 3\cdot 2^2} \right] = \left[0, - \frac{6}{13} \right]$$

Y la derivada direccional pedida es:

$$\#27: \quad \left[0, - \frac{6}{13} \right] \cdot \frac{[2, -2]}{|[2, -2]|} = \frac{3\cdot\sqrt{2}}{13}$$

b)

Las direcciones de la curva de nivel indican crecimiento nulo, es decir, en P y en dichas direcciones la derivada es 0, luego la dirección seguida es ortogonal al vector gradiente, por lo tanto, son las indicadas por los vectores **(-1,0), (1,0)**.

c)

La ecuación del plano tangente en el punto P (x=2, y=1, z=2), es

$$\#28: \quad z - 2 = 0\cdot(x - 2) + \left(- \frac{6}{13} \right)\cdot(y - 1)$$

Operando y pasando al primer miembro queda: 6y+13z-32=0

Un vector ortogonal al plano es (0,6,13) por lo que una ecuación de la recta normal en P es

$$\#29: \quad \frac{x - 2}{0} = \frac{y - 1}{6} = \frac{z - 2}{13}$$

21.- a) Sea una función diferenciable z = f(x,y) y sean x = s + α, y = sα, escribir las ecuaciones de un cambio de variable $\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial \alpha}$ **en función de** $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

b) La ecuación de Laplace es la ecuación en derivadas parciales $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

Comprobar que la siguiente función verifica la ecuación de Laplace $z = e^x \operatorname{sen} y$

Solución

a) $\boxed{\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\alpha}$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}s}$$

b) No hay más que hallar las derivadas segundas, sustituir en la ecuación y ver que se cumple:

$$\#30: \left(\frac{d}{dx}\right)^2 (e^x \cdot \mathrm{SIN}(y)) + \left(\frac{d}{dy}\right)^2 (e^x \cdot \mathrm{SIN}(y)) = e^x \cdot \mathrm{SIN}(y) + - e^x \cdot \mathrm{SIN}(y) = 0$$

22.- a) Dada la función $f(x, y)$ = $\begin{cases} \dfrac{6xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ **, se pide calcular $\vec{\nabla} f(0,0)$ y la derivada direccional de f en (1, 1) y en la dirección de la curva de nivel.**

c) La caja de cambios automática de un Nissan Qasqhai tiene dos piezas con forma de cono circular recto, aproximar el error propagado y el error relativo cometidos en el cálculo del área lateral $\left(A=\pi r\sqrt{r^2+h^2}\right)$ de uno de los conos si se han obtenido r=13,5 cm y h=20,1 cm con un error máximo de medida de 2mm.

Solución:

a) Por estar definida la función $f(x, y)$ de forma distinta en (0,0) que en el resto, el cálculo de $\vec{\nabla} f(0,0)=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{(0,0)}$ hemos de hacerlo mediante límites:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(0,0)}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{6h\cdot 0}{\sqrt{h^2+0^2}}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(0,0)}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{6\cdot 0\cdot h}{\sqrt{0^2+h^2}}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

Luego $\boxed{\vec{\nabla} f(0,0)=(0,0)}$

La curva de nivel es el conjunto de puntos (x,y) donde la función tiene el mismo valor, luego su dirección indica, en cada punto, la dirección de crecimiento cero, luego la derivada direccional de f en (1,1) y en la dirección de la curva de nivel es $\boxed{0}$.

b) El error propagado es una cota del error obtenida mediante la diferencial de la función $A=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$, es decir, teniendo en cuenta que $dA=\dfrac{\partial A}{\partial r}dr+\dfrac{\partial A}{\partial h}dh$ y tomando r=13.5cm y h=20.1cm, $dr= dh$ =0,2cm.

$$\frac{d}{dr}\left(\pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+h^2}\right)=\frac{\pi\cdot(h^2+2\cdot r^2)}{\sqrt{h^2+r^2}}$$

$$\frac{d}{dh}\left(\pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+h^2}\right)=\frac{\pi\cdot h\cdot r}{\sqrt{h^2+r^2}}$$

$$\frac{\pi\cdot(20.1^2+2\cdot 13.5^2)}{\sqrt{20.1^2+13.5^2}}\cdot 0.2+\frac{\pi\cdot 20.1\cdot 13.5}{\sqrt{20.1^2+13.5^2}}\cdot 0.2=26.98420385$$

Luego, el error propagado es $\boxed{E_p\approx 26.9842\text{ cm}}$.

El error relativo es el cociente entre el error propagado y el valor (aproximado) del área medida

$$E_r\approx\frac{E_p}{A}$$

$$\pi \cdot 13.5 \cdot \sqrt{13.5^2 + 20.1^2}$$

$$\frac{26.98420385}{\pi \cdot 13.5 \cdot \sqrt{13.5^2 + 20.1^2}} = 0.02627730585$$

Luego, $\boxed{E_r \approx 0.02627}$, en porcentaje sería un error porcentual del 2.63% aproximadamente.

23.- Sea la función $f(x,y)=\dfrac{8xy}{1+x^2+y^2}$ **, se pide:**

a) Hallar el error porcentual, en la estimación de f(1,-2), si se ha medido x=1 con un error de ±1% e y=-2 con un error de ±2%.
b) Hallar la curva de nivel correspondiente a z=2 y comprobar que es una hipérbola.
c) Hallar en P(1,-2) la derivada direccional en la dirección de máximo crecimiento.

Solución:

#37: $\dfrac{8\cdot x\cdot y}{1+x^2+y^2}$

a) El error porcentual se estima con (df(1,-2)/f(1,-2))*100.
Los datos de los errores de medida que nos proporcionan nos dicen que (dx/x)*100=±1, (dy/y)*100=±2, luego dx=±0.01x, dy=±0.02y. Calcularemos, en x=1, y=-2, el error porcentual en valor absoluto

#38: $\dfrac{8\cdot 1\cdot(-2)}{1+1^2+(-2)^2}=-\dfrac{8}{3}$

#39: $\dfrac{d}{dx}\dfrac{8\cdot x\cdot y}{1+x^2+y^2}=-\dfrac{8\cdot y\cdot(x^2-y^2-1)}{(x^2+y^2+1)^2}$

#40: $-\dfrac{8\cdot(-2)\cdot(1^2-(-2)^2-1)}{(1^2+(-2)^2+1)^2}=-\dfrac{16}{9}$

#41: $\dfrac{d}{dy}\dfrac{8\cdot x\cdot y}{1+x^2+y^2}=\dfrac{8\cdot x\cdot(x^2-y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2}$

#42: $\dfrac{8\cdot 1\cdot(1^2-(-2)^2+1)}{(1^2+(-2)^2+1)^2}=-\dfrac{4}{9}$

#43: $\dfrac{\left(-\dfrac{16}{9}\right)\cdot 0.01+\left(-\dfrac{4}{9}\right)\cdot 0.02\cdot 2}{-\dfrac{8}{3}}\cdot 100=1.333333333$

Es decir, el error porcentual es aproximadamente un 1,33%

b) Es una hipérbola, como se ve operando y dibujando

#44: $\dfrac{8\cdot x\cdot y}{1+x^2+y^2}=2$

#45: $2\cdot(1+x^2+y^2)-8\cdot x\cdot y=0$

#46: $x^2 - 4\cdot x\cdot y + y^2 + 1 = 0$

c) La dirección de máximo crecimiento es la del gradiente en (1,-2) y el valor de la derivada direccional es el módulo del gradiente. Las derivadas en (1,-2) están calculadas en el apartado a)

#47: $$\left|\left[-\frac{16}{9}, -\frac{4}{9}\right]\right| = \frac{4\cdot\sqrt{17}}{9}$$

24.- a) Hallar las ecuaciones de los planos tangentes a las superficies S≡ x y z = 1 y S'≡ x^2+ $2y^2$ + $3z^2$ =0, respectivamente, en el punto P(1,1,1).
b) ¿Cuál sería la ecuación de la recta tangente a la curva intersección de las superficies S y S'.

Solución:
a)
Utilizaremos las fórmulas de la derivación implícitas para obtener los gradientes de cada superficie en el punto indicado

#48: $x\cdot y\cdot z - 1 = 0$

#49: $$\left[- \frac{\frac{d}{dx}(x\cdot y\cdot z - 1)}{\frac{d}{dz}(x\cdot y\cdot z - 1)}, - \frac{\frac{d}{dy}(x\cdot y\cdot z - 1)}{\frac{d}{dz}(x\cdot y\cdot z - 1)}\right] = \left[- \frac{z}{x}, - \frac{z}{y}\right]$$

#50: $$\left[- \frac{1}{1}, - \frac{1}{1}\right] = [-1, -1]$$

#51: $z - 1 = - 1\cdot(x - 1) + - 1\cdot(y - 1)$

#52: $\boxed{x + y + z = 3}$

#53: $x^2 + 2\cdot y^2 + 3\cdot z^2 = 0$

$$\left[- \frac{\frac{d}{dx}(x^2 + 2\cdot y^2 + 3\cdot z^2)}{\frac{d}{dz}(x^2 + 2\cdot y^2 + 3\cdot z^2)}, - \frac{\frac{d}{dy}(x^2 + 2\cdot y^2 + 3\cdot z^2)}{\frac{d}{dz}(x^2 + 2\cdot y^2 + 3\cdot z^2)}\right] = \left[- \frac{x}{3\cdot z}, - \frac{2\ y}{3\cdot z}\right]$$

#55: $$\left[- \frac{1}{3\cdot 1}, - \frac{2\cdot 1}{3\cdot 1}\right] = \left[- \frac{1}{3}, - \frac{2}{3}\right]$$

#56: $$z - 1 = - \frac{1}{3}\cdot(x - 1) + - \frac{2}{3}\cdot(y - 1)$$

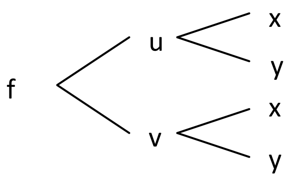
#57: $\boxed{x + 2\cdot y + 3\cdot z = 6}$

b) La recta tangente a la curva intersección de las superficies S y S' es la determinada por la intersección de los dos planos obtenidos

#58:SOLUTIONS([x + y + z = 3, x + 2·y + 3·z = 6], [x, y, z]) =
$\boxed{[@1, 3 - 2\cdot @1, @1]}$

25.- Sea z = f(x,y) una función con derivadas parciales continuas. Aplicar el cambio de variables: $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$ **y probar que** $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2$

Solución:



$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right)\left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 1 \right)\left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot (-1) \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2$$

26.- Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **. Se pide:**

a) Dom f.
b) Estudiar la continuidad de f.
c) Calcular, si existen, las derivadas parciales de f en (0, 0).
d) Calcular, si existen, las derivadas parciales de f en ($\sqrt{\pi}$, -$\sqrt{\pi}$).

Solución:

a) El dominio de la función es todo $\mathbb{R}^2$

b) En todo (x,y)≠(0,0) la función es cociente de funciones continuas cuyo denominador es distinto de 0.
En (0,0) hemos de estudiar si el límite es 1.
Pasamos a polares

$$\#13:\quad \frac{\mathrm{SIN}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\frac{\mathrm{SIN}((r\cdot\mathrm{COS}(\alpha))^2+(r\cdot\mathrm{SIN}(\alpha))^2)}{(r\cdot\mathrm{COS}(\alpha))^2+(r\cdot\mathrm{SIN}(\alpha))^2}=\frac{\mathrm{SIN}(r^2)}{r^2}$$

$$\#14:\quad \lim_{r\to 0}\frac{\mathrm{SIN}(r^2)}{r^2}=1$$

Luego **f también es continua en (0,0)**

c) El cálculo de las derivadas parciales en (0,0) se realiza aplicando la definición

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(0,0)}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\mathrm{sen}(h^2+0^2)}{h^2+0^2}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0}0=\boxed{0}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(0,0)}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\mathrm{sen}(0^2+h^2)}{0^2+h^2}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0}0=\boxed{0}$$

d) Al ser la función diferenciable en (x,y)≠(0,0), por ser cociente de funciones diferenciables, aplicamos las reglas de derivación

$$\#17:\quad \frac{d}{dx}\frac{\mathrm{SIN}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\frac{2\cdot x\cdot((x^2+y^2)\cdot\mathrm{COS}(x^2+y^2)-\mathrm{SIN}(x^2+y^2))}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\#18:\quad \frac{d}{dy}\frac{\mathrm{SIN}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\frac{2\cdot y\cdot((x^2+y^2)\cdot\mathrm{COS}(x^2+y^2)-\mathrm{SIN}(x^2+y^2))}{(x^2+y^2)^2}$$

Sustituimos en $(\sqrt{\pi},-\sqrt{\pi})$

$$\frac{2\cdot\sqrt{\pi}\cdot((\sqrt{\pi}^2+(-\sqrt{\pi})^2)\cdot\mathrm{COS}(\sqrt{\pi}^2+(-\sqrt{\pi})^2)-\mathrm{SIN}(\sqrt{\pi}^2+(-\sqrt{\pi})^2))}{(\sqrt{\pi}^2+(-\sqrt{\pi})^2)^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

27.- Al hacer un levantamiento de una porción triangular de terreno se han medido dos lados a=150m y b=200m, así como el ángulo comprendido C=60º ¿Cuál es el error porcentual que tendrá el área de dicho terreno si la cota de error al medir a y b es de 2cm y la de C es de 2º.

Solución:

#1: $$\frac{a\cdot b\cdot \mathrm{SIN}(\alpha)}{2}$$

#2: $$\frac{\dfrac{b\cdot \mathrm{SIN}(\alpha)}{2}\cdot 0.02+\dfrac{a\cdot \mathrm{SIN}(\alpha)}{2}\cdot 0.02+\dfrac{a\cdot b\cdot \mathrm{COS}(\alpha)}{2}\cdot\dfrac{\pi}{90}}{\dfrac{a\cdot b\cdot \mathrm{SIN}(\alpha)}{2}}$$

$$\frac{\dfrac{200\cdot \mathrm{SIN}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}{2}\cdot 0.02+\dfrac{150\cdot \mathrm{SIN}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}{2}\cdot 0.02+\dfrac{150\cdot 200\cdot \mathrm{COS}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}{2}\cdot\dfrac{\pi}{90}}{\dfrac{150\cdot 200\cdot \mathrm{SIN}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}{2}}\cdot 100=$$

$= \boxed{2.03866596}$

28.- Sea la función $f(x,y)=\left(x^2+4y^2\right)e^{1-x^2-y^2}$ **, hallar:**

c) La derivada de *f* a lo largo de la curva $\begin{cases} x=\mathrm{sen}(2t) \\ y=\cos t^2 \end{cases}$

d) ¿Es f creciente o decreciente en t=π?

Solución:

a)

#4: $$(x^2+4\cdot y^2)\cdot e^{1-x^2-y^2}$$

#5: $$\left(\frac{d}{dx}\left((x^2+4\cdot y^2)\cdot e^{1-x^2-y^2}\right)\right)\cdot\frac{d}{dt}\,\mathrm{SIN}(2\cdot t)+\left(\frac{d}{dy}\left((x^2+4\cdot y^2)\cdot e^{1-x^2-y^2}\right)\right)\cdot\frac{d}{dt}\,\mathrm{COS}(t^2)$$

#6: $$4\cdot x\cdot e^{-x^2-y^2+1}\cdot\mathrm{COS}(2\cdot t)+e^{-x^2-y^2}\cdot(4\cdot e\cdot t\cdot y\cdot(x^2+4\cdot(y^2-1))\cdot\mathrm{SIN}(t^2)-4\cdot e\cdot x\cdot(x^2+4\cdot y^2)\cdot\mathrm{COS}(2\cdot t))$$

#7: $$4\cdot e^{-x^2-y^2+1}\cdot((t\cdot x^2\cdot y+4\cdot t\cdot y\cdot(y^2-1))\cdot\mathrm{SIN}(t^2)-(x^3+x\cdot(4\cdot y^2-1))\cdot\mathrm{COS}(2\cdot t))$$

b)

#8: $$4\cdot e^{-\mathrm{SIN}(2\cdot\pi)^2-\mathrm{COS}(\pi^2)^2+1}\cdot((\pi\cdot\mathrm{SIN}(2\cdot\pi)^2\cdot\mathrm{COS}(\pi^2)+4\cdot\pi\cdot\mathrm{COS}(\pi^2)\cdot(\mathrm{COS}(\pi^2)^2-1))\cdot\mathrm{SIN}(\pi^2)-(\mathrm{SIN}(2\cdot\pi)^3+\mathrm{SIN}(2\cdot\pi)\cdot(4\cdot\mathrm{COS}(\pi^2)^2-1))\cdot\mathrm{COS}(2\cdot\pi))$$

#9: $$-16\cdot\pi\cdot e^{\mathrm{SIN}(\pi^2)^2}\cdot\mathrm{SIN}(\pi^2)^3\cdot\mathrm{COS}(\pi^2)$$

#10: $$-4.350483943$$

f es decreciente en t=π

29.- La ecuación $x^3+y^3+z^3-xyz=0$ define de forma implícita a z como función de x e y, se pide:

a) La derivada direccional de z en el punto P(1,-1) en la dirección del vector (1,-2)

b) La dirección en P donde la z tiene el máximo decrecimiento y el valor del máximo decrecimiento.

c) El plano tangente y la recta normal en P.

Solución:

a)

#11: $x^3 + y^3 + z^3 - x\cdot y\cdot z = 0$

#12: $\frac{d}{dx}(x^3 + y^3 + z^3 - x\cdot y\cdot z) = 3\cdot x^2 - y\cdot z$

#13: $\frac{d}{dy}(x^3 + y^3 + z^3 - x\cdot y\cdot z) = 3\cdot y^2 - x\cdot z$

#14: $\frac{d}{dz}(x^3 + y^3 + z^3 - x\cdot y\cdot z) = 3\cdot z^2 - x\cdot y$

El gradiente de z es

#15: $\left[-\frac{3\cdot x^2 - y\cdot z}{3\cdot z^2 - x\cdot y}, -\frac{3\cdot y^2 - x\cdot z}{3\cdot z^2 - x\cdot y}\right]$

#16: $1^3 + (-1)^3 + z^3 - 1\cdot(-1)\cdot z = 0$

#17: $\text{SOLVE}(1^3 + (-1)^3 + z^3 - 1\cdot(-1)\cdot z = 0, z)$

#18: $z = -i \vee z = i \vee z = 0$

#19: $\left[-\frac{3\cdot 1^2 - (-1)\cdot 0}{3\cdot 0^2 - 1\cdot(-1)}, -\frac{3\cdot(-1)^2 - 1\cdot 0}{3\cdot 0^2 - 1\cdot(-1)}\right] = [-3, -3]$

#20: $[-3, -3]\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right] = \frac{3\cdot\sqrt{5}}{5}$

b) El máximo decrecimiento corresponde a un ángulo de 180º cuyo coseno vale -1, luego la dirección es la opuesta al vector (-3,-3)

$$\boxed{\vec{u} = (3,3)}$$

Y el valor del máximo decrecimiento

#21: $|-[-3, -3]| = \boxed{3\cdot\sqrt{2}}$

c)

La ecuación del plano tangente en el punto P (x=1, y=-1, z=0), es

#22: $z - 0 = -3\cdot(x - 1) - 3\cdot(y + 1)$

#23: $z = -3\cdot(x + y)$

Operando y pasando al primer miembro queda: $\boxed{3x+3y+z=0}$

Un vector ortogonal al plano es (0,1,-3) por lo que una ecuación de la recta normal en P es

#24: $\frac{x - 1}{0} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z - 0}{-3}$

30.- a) Sea una función diferenciable z=f(x,y) y sean r y α las coordenadas polares de cada punto (x,y), se pide hallar $\frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \alpha}$ en función de $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

c) Comprobar el resultado anterior considerando el cambio a polares de la función

$$z = \sqrt{25 - 5x^2 - 5y^2}$$

Solución:

#24: $z = \sqrt{25 - 5\cdot x^2 - 5\cdot y^2}$

#25: $\left(\frac{d}{dx}\sqrt{25 - 5\cdot x^2 - 5\cdot y^2}\right)\cdot\frac{d}{dr}(r\cdot COS(\alpha)) + \left(\frac{d}{dy}\sqrt{25 - 5\cdot x^2 - 5\cdot y^2}\right)\cdot\frac{d}{dr}(r\cdot SIN(\alpha)) = -\frac{\sqrt{5}\cdot x\cdot COS(\alpha)}{\sqrt{-x^2 - y^2 + 5}} - \frac{\sqrt{5}\cdot y\cdot SIN(\alpha)}{\sqrt{-x^2 - y^2 + 5}}$

#26: $-\frac{\sqrt{5}\cdot x\cdot COS(\alpha)}{\sqrt{-x^2 - y^2 + 5}} - \frac{\sqrt{5}\cdot y\cdot SIN(\alpha)}{\sqrt{-x^2 - y^2 + 5}} = -\frac{\sqrt{5}\cdot r}{\sqrt{5 - r^2}}$

#27: $\left(\frac{d}{dx}\sqrt{25 - 5\cdot x^2 - 5\cdot y^2}\right)\cdot\frac{d}{d\alpha}(r\cdot COS(\alpha)) + \left(\frac{d}{dy}\sqrt{25 - 5\cdot x^2 - 5\cdot y^2}\right)\cdot\frac{d}{d\alpha}(r\cdot SIN(\alpha)) = \frac{\sqrt{5}\cdot r\cdot x\cdot SIN(\alpha)}{\sqrt{-x^2 - y^2 + 5}} - \frac{\sqrt{5}\cdot r\cdot y\cdot COS(\alpha)}{\sqrt{-x^2 - y^2 + 5}}$

#28: $\frac{\sqrt{5}\cdot r\cdot x\cdot SIN(\alpha)}{\sqrt{-x^2 - y^2 + 5}} - \frac{\sqrt{5}\cdot r\cdot y\cdot COS(\alpha)}{\sqrt{-x^2 - y^2 + 5}} = 0$

#29: $\sqrt{25 - 5\cdot(r\cdot COS(\alpha))^2 - 5\cdot(r\cdot SIN(\alpha))^2}$

#30: $\sqrt{25 - 5\cdot(r\cdot COS(\alpha))^2 - 5\cdot(r\cdot SIN(\alpha))^2} = \sqrt{5}\cdot\sqrt{5 - r^2}$

#31: $\frac{d}{dr}(\sqrt{5}\cdot\sqrt{5 - r^2}) = -\frac{\sqrt{5}\cdot r}{\sqrt{5 - r^2}}$

#32: $\frac{d}{d\alpha}(\sqrt{5}\cdot\sqrt{5 - r^2}) = 0$

31.- La ecuación $z^3+2xz+yz-x=0$ define una función $z=f(x,y)$ diferenciable en un entorno del punto P(1, -2). Se pide:

a) El gradiente de z en el punto P y la derivada de segundo orden $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(P)$.

b) El plano tangente y la recta normal en P.

c) La derivada direccional en P en la dirección $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

Solución:

a) F(x, y, z) = $z^3+2xz+yz-x=0$ define implícitamente a la función z = f(x,y).

$z^3+2z-2z-1=0\Rightarrow z^3=1\Rightarrow z=1$

El vector gradiente de f en el punto P es $\vec{\nabla} f(P)=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}=-\frac{2z-1}{3z^2+2x+y}\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}(P)=-\frac{1}{3}\\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}=-\frac{z}{3z^2+2x+y}\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}(P)=-\frac{1}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{\vec{\nabla} f(P)=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2z-1}{3z^2+2x+y}\right)=-\frac{\left(3z^2+2x+y\right)\frac{\partial}{\partial x}(2z-1)-(2z-1)\frac{\partial}{\partial x}\left(3z^2+2x+y\right)}{\left(3z^2+2x+y\right)^2}=$$

$$=-\frac{\left(3z^2+2x+y\right)2\frac{\partial z}{\partial x}-(2z-1)\left(6z\frac{\partial z}{\partial x}+2\right)}{\left(3z^2+2x+y\right)^2}\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(P)=-\frac{3\left(-2\frac{1}{3}\right)-\left(-6\frac{1}{3}+2\right)}{9}=\boxed{\frac{-2}{9}}$$

b) Ecuación del plano tangente a la superficie z en el punto P:

$$z-z_0=\frac{\partial f}{\partial x}(P)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(P)(y-y_0)\Leftrightarrow z-1=-\frac{1}{3}\cdot(x-1)-\frac{1}{3}\cdot(y+2)\Leftrightarrow\boxed{x+y+3z-2=0}$$

Recta normal en P (pasa por P y es perpendicular al plano tangente en P):

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=-2+\lambda\\ z=1+3\lambda\end{array}\right.}$$

c) $\vec{u}=\left(\cos\frac{\pi}{3},\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{u}}(P)=\vec{\nabla} f(P)\cdot\vec{u}=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\boxed{-\frac{1+\sqrt{3}}{6}}$$

32.- La temperatura en un punto (x, y) de una lámina metálica es $T(x,y)=\dfrac{3x}{x^2+y^2}$**.**

a) Hallar la curva de nivel (isoterma) que pasa por el punto P(2, -1).
b) Hallar la dirección de máximo crecimiento de la temperatura en P.
c) Hallar el coeficiente de variación de la temperatura en P en la dirección de la bisectriz del primer cuadrante.
d) Hallar, usando la regla de la cadena, el coeficiente de variación de la temperatura a lo largo de la curva $\begin{cases} x = 2\,\mathrm{sen}\,t \\ y = \cos t \end{cases}$**.**
e) Si la cota de error en la medida de "x" es de $\pm 1\%$ **y en la de "y" es de** $\pm 2\%$**, hallar el máximo error propagado de T en P.**

Solución:

a) Para hallar la curva de nivel en P(2,-1) calculamos previamente el valor de T(P)

#1: $$\frac{3\cdot 2}{2^2+(-1)^2}=\frac{6}{5}$$

La curva de nivel en P tiene por ecuación

#2: $$\frac{6}{5}=\frac{3\cdot x}{x^2+y^2}$$

Operando obtenemos $x^2+y^2-5/2x=0$ que corresponde a una circunferencia de centro (5/4,0) y radio 5/4.

b) La dirección de máximo crecimiento sabemos, por teoría que es la del vector gradiente.

#3: $$\frac{d}{dx}\frac{3\cdot x}{x^2+y^2}=\frac{3\cdot(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

#4: $$\frac{d}{dy}\frac{3\cdot x}{x^2+y^2}=-\frac{6\cdot x\cdot y}{(x^2+y^2)^2}$$

El vector gradiente en un punto (x,y) es:

#5: $$\left[\frac{3\cdot(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},\ -\frac{6\cdot x\cdot y}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

Y en P es:

#6: $$\left[\frac{3\cdot((-1)^2-2^2)}{(2^2+(-1)^2)^2},\ -\frac{6\cdot 2\cdot(-1)}{(2^2+(-1)^2)^2}\right]=\left[-\frac{9}{25},\ \frac{12}{25}\right]$$

c) Se nos pide la derivada direccional de T en P y en la dirección $\alpha=\pi/4$

#7: $$\left[-\frac{9}{25}, \frac{12}{25}\right]\cdot\left[\text{COS}\left(\frac{\pi}{4}\right), \text{SIN}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \mathbf{\frac{3\cdot\sqrt{2}}{50}}$$

d) Aplicamos la regla de la cadena a T a lo largo de la curva x=sent, y=cost, y sustituimos x e y por las funciones de t que definen x e y

#8: $$\frac{3\cdot(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}\cdot(2\cdot\text{COS}(t)) + \left(-\frac{6\cdot x\cdot y}{(x^2 + y^2)^2}\right)\cdot(-\text{SIN}(t)) =$$

$$\frac{6\cdot(y^2 - x^2)\cdot\text{COS}(t)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{6\cdot x\cdot y\cdot\text{SIN}(t)}{(x^2 + y^2)^2}$$

#9: $$\mathbf{\frac{6\cdot\text{COS}(t)\cdot(1 - 3\cdot\text{SIN}(t)^2)}{(3\cdot\text{SIN}(t)^2 + 1)^2}}$$

e) El error propagado máximo (en la medición de T) se obtiene a partir de la fórmula de la diferencial total de T

#10: $$dT = \left(\frac{d}{dx}\frac{3\cdot x}{x^2 + y^2}\right)\cdot(dx) + \left(\frac{d}{dy}\frac{3\cdot x}{x^2 + y^2}\right)\cdot(dy)$$

#11: $$dT = \frac{3\cdot(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}\cdot(dx) + \left(-\frac{6\cdot x\cdot y}{(x^2 + y^2)^2}\right)\cdot(dy)$$

Ahora sustituimos x=2, y=-1,dx=±0.01, dy=±0.02 y se obtiene la cota de error que denominamos "error propagado máximo"

$$\text{error propagado máximo} = \frac{3\cdot((-1)^2 - 2^2)}{(2^2 + (-1)^2)^2}\cdot(\pm 0.01) + \left(-\frac{6\cdot 2\cdot(-1)}{(2^2 + (-1)^2)^2}\right)\cdot(\pm 0.02)$$

#13: $$\text{error propagado máximo} = (-0.36)\cdot(\pm 0.01) + 0.48\cdot(\pm 0.02)$$

$$\text{error propagado máximo} = \pm\left|0.36\cdot 0.01 + 0.48\cdot 0.02\right|$$

$$\text{error propagado máximo} = \boxed{\mathbf{\pm 0.0132}}$$

33.- Dada la superficie $ze^{x^2-y^2}-3=0$. Se pide:
a) Hallar la curva de nivel correspondiente a z = 1. ¿Qué tipo de curva es?
b) Hallar el plano tangente y la recta normal a la superficie en P(2, 2).
c) Estimar, mediante la diferencial, el incremento de la función, al pasar del punto P (2,2) al punto (2.01, 1.99).

Solución:

#1: $z\cdot e^{x^2-y^2}-3=0$

a)

#2: $1\cdot e^{x^2-y^2}-3=0$

#3: $e^{x^2-y^2}-3=0$

#4: $\mathrm{LN}\left(e^{x^2-y^2}\right)=\mathrm{LN}(3)$

#5: $x^2-y^2=\mathrm{LN}(3)$

#6: $\dfrac{x^2-y^2}{\mathrm{LN}(3)}=1$

Es una **hipérbola equilátera** de semiejes a = b = $\sqrt{\ln 3}$

b)

#7: $\dfrac{d}{dx}\left(z\cdot e^{x^2-y^2}-3\right)$

#8: $2\cdot x\cdot z\cdot e^{x^2-y^2}$

#9: $\dfrac{d}{dy}\left(z\cdot e^{x^2-y^2}-3\right)$

#10: $-2\cdot y\cdot z\cdot e^{x^2-y^2}$

#11: $\dfrac{d}{dz}\left(z\cdot e^{x^2-y^2}-3\right)$

#12: $e^{x^2-y^2}$

#13: $z\cdot e^{2^2-2^2}-3=0$

#14: $\mathrm{SOLVE}\left(z\cdot e^{2^2-2^2}-3=0,\ z,\ \mathrm{Real}\right)$

#15: $z=3$

Particularizamos las derivadas en el punto (2, 2, 3):

#16: $2\cdot 2\cdot 3\cdot e^{2^2-2^2}$

#17: 12

#18: $-2\cdot 2\cdot 3\cdot e^{2^2-2^2}$

#19: –12

#20: $e^{2^2-2^2}$

#21: 1

Y sustituimos en la ecuación del plano tangente:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P)(x-2)+\frac{\partial F}{\partial y}(P)(y-2)+\frac{\partial F}{\partial z}(P)(z-3)=0$$

#22: 12·(x – 2) – 12·(y – 2) + 1·(z – 3) = 0

#23: **12·x – 12·y + z – 3 = 0**

Recta normal en P:

#24: [x, y, z] = [2, 2, 3] + λ·[12, –12, 1]

#25: **x = 12·λ + 2 ∧ y = 2 – 12·λ ∧ z = λ + 3**

c)

$$\Delta f(P)\approx df(P)=f`_x(P)\Delta x+f`_y(P)\Delta y$$

$$\left.\begin{array}{l} z`_x(P)=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(P)}{\frac{\partial F}{\partial z}(P)}=-12 \\ z`_y(P)=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}(P)}{\frac{\partial F}{\partial z}(P)}=12 \end{array}\right\}\Rightarrow \Delta f(P)\approx -12\times 0.01+12\times(-0.01)\approx \boxed{-0.24}$$

34.- Sea la función $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$. **Se pide:**

a) Razonar si esta función es continua en el punto (0,0).

b) Hallar, si existen, las derivadas parciales $f_x'(0,0)$ **y** $f_y'(0,0)$**.**

Solución:

Límites radiales

a) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xmx+m^3x^3}{x^2+m^2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{m+m^3x}{1+m^2}=\dfrac{m}{1+m^2}$

Los límites radiales depende de m, luego, no existe el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Por tanto, ***f* no es continua en (0, 0)**.

b)

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=\lim_{h\to 0}0=\boxed{0}$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{k^3}{k^2}-0}{k}=\lim_{k\to 0}1=\boxed{1}$$

35.- a) Hallar la derivada direccional de $z=\dfrac{xy}{x^2-y^2}$ en el punto (1,0), según la dirección del vector $\vec{u}=$(-1, 1):
a_1) Aplicando la definición.
a_2) Mediante la diferencial.
b) ¿Cuál es la dirección de máximo crecimiento de z en el punto (1, 0)?

Solución:
a)

a_1) $\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,0)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f\left((1,0)+\lambda\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)-f(1,0)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\left[f\left(1-\frac{\lambda}{\sqrt{2}},\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)-0\right]=$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\left(1-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}{\left(1-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{\lambda^2}{2}}\right]=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\left(1-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{2}{\sqrt{2}}\lambda}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

a_2)

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,1)=\vec{\nabla}f(1,0)\cdot\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_x(x,y)=\dfrac{-y(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}\Rightarrow f'_x(1,0)=0 \\ f'_y(x,y)=\dfrac{x(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}\Rightarrow f'_y(1,0)=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,0)=(0,1)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

b) La dirección de máximo crecimiento de z en el punto (1,0) viene dada por:

$$\boxed{\vec{\nabla}f(1,0)=(0,\ 1)}$$

36.- Dada la superficie $x^2 + 2y^2 + z^2 = 10$, con $z \geq 0$, se pide:
a) Hallar la curva de nivel correspondiente a z = 1. ¿Qué tipo de curva es?
b) Hallar el plano tangente y la recta normal a la superficie en P (2, 1).
c) Estimar, mediante la diferencial, el incremento de la función, al pasar del punto (2,1) de su dominio, al (2.01, 0.99).

Solución:

$$F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 10 = 0; \quad z \geq 0$$

a)

$$z = 1 \Rightarrow x^2 + 2y^2 + 1 - 10 = 0 \quad \Rightarrow x^2 + 2y^2 = 9 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9/2} = 1}$$

$\boxed{\textbf{Es una elipse de semiejes a = 3, } b = \frac{3}{\sqrt{2}}}$

b)

$$F'_x(P_0)(x - x_0) + F'_y(P_0)(y - y_0) + F'_z(P_0)(z - z_0) = 0$$

$$F'_x = 2x \Rightarrow F'_x(2,1) = 4$$

$$F'_y = 4y \Rightarrow F'_y(2,1) = 4$$

$$F'_z = 2z; \quad 4 + 2 + z^2 = 10 \Rightarrow z^2 = 10 - 6 = 4 \quad \Rightarrow z = \pm 2; \quad como \quad z \geq 0, \quad z = 2$$

$$F'_z(2,1) = 2 \cdot 2 = 4$$

Plano tangente:

$$4(x-2)+4(y-1)+4(z-2)=0 \Leftrightarrow x-2+y-1+z-2=0 \Leftrightarrow \boxed{x+y+z-5=0}$$

Recta normal:

$$\boxed{\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}}$$

Pues $\vec{n} = (1,1,1)$ es perpendicular al plano tangente en (2,1)

c)

$$\Delta x = 0.01$$

$$\Delta y = -0.01$$

$$\Delta f(2,1) \approx df(2,1) = f'_x(2,1)\Delta x + f'_y(2,1)\Delta y$$

$$f'_x(2,1) = -\frac{F'_x(2,1)}{F'_z(2,1)} = -\frac{4}{4} = -1$$

$$f'_y(2,1) = -\frac{F'_y(2,1)}{F'_z(2,1)} = -\frac{4}{4} = -1$$

$$\Rightarrow \Delta f(2,1) \approx (-1)\cdot 0.01 + (-1)\cdot(-0.01) = \boxed{0}$$

37.- a) Deducir cuál es la dirección de máximo crecimiento de una función diferenciable z=f(x, y) en un punto P(x_0, y_0).

b) Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

b_1) Si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ = L, entonces obligatoriamente existe el límite a lo largo de cualquier camino que pasa por (x_0,y_0) y vale L.

b_2) Si f es diferenciable en (x_0, y_0), entonces f es continua en (x_0, y_0).

b_3) Si f tiene derivadas parciales en (x_0,y_0), entonces f es continua en (x_0, y_0).

Solución:

a)

$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = \vec{\nabla} f(P)\cdot\vec{u} = |\vec{\nabla} f(P)|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos(\alpha)$ es máxima cuando $\cos(\alpha)=1$ siendo:

$$\boxed{\alpha = \widehat{\vec{\nabla} f(P), \vec{u}} = 0^{\circ}}$$

Luego, la dirección y el sentido de $\vec{u}$ coincide con los de $\vec{\nabla} f(P)$.

b)

b_1) VERDADERO

b_2) VERDADERO

b_3) FALSO

38.- a) Hallar la derivada direccional de $z=\dfrac{xy}{x+y}$ en el punto P(1,0), según la dirección del vector $\vec{u}=(1,-1)$:

a$_1$) Aplicando la definición.

a$_2$) Mediante la diferencial.

b) Razonar si z es creciente o decreciente en P en la dirección de $\vec{u}$.

c) ¿Cuál es la dirección de máximo crecimiento de z en el punto (1, 0)?

Solución:

a)

a$_1$) $\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,0)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f\left(1+\frac{\lambda}{\sqrt{2}},0-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)-f(1,0)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\left[\frac{-1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)\right]=\boxed{\frac{-1}{\sqrt{2}}}$$

a$_2$)

$$z`_x=\frac{(x+y)y-xy}{(x+y)^2}\Rightarrow z`_x(1,0)=0$$

$$z`_y=\frac{(x+y)x-xy}{(x+y)^2}\Rightarrow z`_y(1,0)=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,0)=\vec{\nabla} f(1,0)\cdot\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=(0,\ 1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\boxed{\frac{-1}{\sqrt{2}}}$$

b) z es decreciente en P en la dirección de $\vec{u}$ por ser $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,0)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<0$.

c) La dirección de máximo crecimiento de z en el punto (1, 0) viene dada por:

$$\boxed{\vec{\nabla} f(1,0)=(0,1)}$$

39.- Dada F (x,y, z) = $x^2 + y^2 + z^2 + xy + 2z - 1 = 0$, se pide:
a) Encontrar las derivadas parciales de primer de la función z=f(x,y) en el punto (0,-1,0)
b) Hallar en (0,-1) el valor de dz cuando dx = dy = 0.02.
c) Hallar el plano tangente a la superficie F(x,y,z) en el punto (0,-1, 0)

Solución:

a) Para calcular las derivadas parciales de primer orden derivamos implícitamente la función F(x,y, z)= 0 :

Respecto a x:

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}+y+2\frac{\partial z}{\partial x}=0 \text{ en el punto (0,-1,0) es } 0+2\cdot 0\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-1+2\frac{\partial z}{\partial x}=0\Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}(0,-1,0)=\frac{1}{2}}$$

Respecto a y:

$$2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}+x+2\frac{\partial z}{\partial y}=0 \text{ en el punto (0,-1,0) es } -2+2\cdot 0\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+2\frac{\partial z}{\partial y}=0\Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y}(0,-1,0)=1}$$

b) Para calcular la diferencial:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx^2+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{1}{2}0.02+1\cdot 0.02=\boxed{\frac{3}{100}}$$

c) La ecuación del plano tangente en (0, -1, 0) es $z=\frac{1}{2}x+(y+1)\Rightarrow \boxed{x + 2y - 2z + 2 = 0}$

40.- Usa la regla de la cadena para hallar la derivada de z respecto de u siendo $z = x^2 - 2xy + y^2$, con $x = u + 2v$ e $y = u\cdot v$

Solución:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y = 2u - 2uv + 4v$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y = -2u + 2uv - 4v$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1 \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = v$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \boxed{2u - 4uv + 4v + 2uv^2 - 4v^2}$$

41.- Sea $f:R^2 \to R$ **la función:** $f(x,y)=\begin{cases}(2x^2+3y^2)\operatorname{sen}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

Estudiar si f es diferenciable en un punto (a,b).

Solución:

En cualquier punto (a,b) $\neq$ (0,0) es diferenciable por ser composición y producto de funciones diferenciables, con denominador no nulo.

Obtenemos las derivadas parciales:

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h^2\operatorname{sen}\frac{1}{|h|}-0}{h}=2\lim_{h\to 0} h\operatorname{sen}\frac{1}{|h|}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{3k^2\operatorname{sen}\frac{1}{|k|}-0}{k}=3\lim_{k\to 0} k\operatorname{sen}\frac{1}{|k|}=0$$

Para que f sea diferenciable en (0,0) se necesita que el límite sea cero:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left[f(h,k)-f(0,0)\right]-\left[hf'_x(0,0)+kf'_y(0,0)\right]}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{2h^2+3k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

Efectivamente en coordenadas polares queda:

Resulta f diferenciable en (0,0), y por lo tanto en todo punto (a,b).

Nota: a pesar de ser f diferenciable en el punto (0,0) las derivadas parciales no son continuas en dicho punto.

42.- Sea $f: R^2 \to R$ **la función:** $f(x,y)=\begin{cases}\left(x+y+\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right)\dfrac{|\operatorname{sen}x|+|\operatorname{sen}y|}{|x|+|y|} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

a) Hallar la derivada $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial \vec{u}}$ **respecto del vector** $\vec{u}=(\cos\alpha,\operatorname{sen}\alpha)$ **y en particular las derivadas parciales** $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}$ **y** $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}$.

b) Estudiar si f es diferenciable en un punto (0,0).

Solución:

a) Según la definición de derivada según un vector:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \vec{u}}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h\cos\alpha, h\operatorname{sen}\alpha)-f(0,0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h\left(\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha+\cos^2\alpha\operatorname{sen}\alpha\right)\left(|\operatorname{sen}(h\cos\alpha)|+|\operatorname{sen}(h\operatorname{sen}\alpha)|\right)}{h|h|\left(|\cos\alpha|+|\operatorname{sen}\alpha|\right)}=$$

$$=\left(\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha+\cos^2\alpha\operatorname{sen}\alpha\right)\lim_{h\to 0}\frac{|\operatorname{sen}(h\cos\alpha)|+|\operatorname{sen}(h\operatorname{sen}\alpha)|}{|h|\left(|\cos\alpha|+|\operatorname{sen}\alpha|\right)}=$$

$$=\left(\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha+\cos^2\alpha\operatorname{sen}\alpha\right)\lim_{h\to 0}\frac{|h\cos\alpha|+|h\operatorname{sen}\alpha|}{|h|\left(|\cos\alpha|+|\operatorname{sen}\alpha|\right)}=$$

$$\boxed{=\left(\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha+\cos^2\alpha\operatorname{sen}\alpha\right)}$$

Las derivadas parciales se obtienen para $\alpha=0$ y $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$

$$\boxed{\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\frac{\partial f(0,0)}{\partial \vec{i}}=1} \qquad \boxed{\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=\frac{\partial f(0,0)}{\partial \vec{j}}=1}$$

b) Una condición necesaria para que f sea diferenciable en (0,0) es:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \vec{u}}=\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}\operatorname{sen}\alpha$$

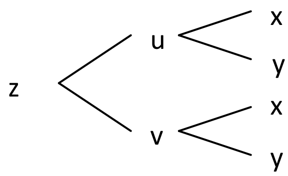
que en nuestro caso no se cumple puesto que:

$$\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha+\cos^2\alpha\operatorname{sen}\alpha\neq\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha$$

Luego **f no es diferenciable en (0,0)**

43.- Sea z = f(x,y) una función con derivadas parciales continuas. Aplicar el cambio de variables: $\begin{cases} u = xy \\ v = x^2 + y^2 \end{cases}$ **a la expresión:** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \dfrac{2}{x+y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$

Solución:



Derivando hasta el segundo orden y aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot y + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot x + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot 2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot y + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot 2x\right) = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot y + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\cdot 2x\right)y + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}\cdot y + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot 2x\right)2x + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot 2 =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot y^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\cdot 4xy + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot 4x^2 + 2\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot x + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot 2y\right) = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot x + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\cdot 2y\right)y + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}\cdot x + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot 2y\right)2x + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot 1 =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot xy + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\cdot 2(x^2 + y^2) + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot 4xy + \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot x + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot 2y\right) = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot x + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\cdot 2y\right)x + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}\cdot x + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot 2y\right)2y + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot 2 =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot x^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\cdot 4xy + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot 4y^2 + 2\frac{\partial z}{\partial v}$$

Sustituyendo en la expresión dada:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{2}{x+y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot y^2+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot 4xy+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot 4x^2+2\frac{\partial z}{\partial v}+$$

$$+2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot xy+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot 2(x^2+y^2)+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot 4xy+\frac{\partial z}{\partial u}\right)+$$

$$+\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot x^2+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot 4xy+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot 4y^2+2\frac{\partial z}{\partial v}-$$

$$-\frac{2}{x+y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot y+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot 2x+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot x+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot 2y\right)=$$

$$=(x^2+2xy+y^2)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+4\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=$$

$$\boxed{=(2u+v)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+4\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)}$$

44.- Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{2x^2-y^2-xy} & \text{si } (x,\ y)\neq(0,\ 0)\\ 0 & \text{si } (x,\ y)=(0,\ 0)\end{cases}$

a) Hallar el dominio de la función f(x, y).

b) Calcular el límite de f(x, y) en (0, 0) a lo largo del camino y = x – 2 x².

c) Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de f en el origen.

d) Calcular $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ **y** $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ **en los puntos (0,0) y (2, -1).**

e) Determinar en el punto P(2, -1) el valor de la derivada de f(x,y) en la dirección del vector $\vec{u}=\left(1,\sqrt{3}\right)$**.**

Solución

a) La función f(x,y) está definida en aquellos puntos que no anulan el denominador

$$2x^2-y^2-xy=0 \Leftrightarrow y^2+xy-2x^2=0 \Rightarrow y=\frac{-x\pm\sqrt{x^2+8x^2}}{2} \Rightarrow \begin{cases}y=x\\ y=-2x\end{cases}$$

$$\boxed{D=\left\{(x,y)\in R^2 \,/\, y\neq x;\, y\neq -2x\right\}}$$

b) $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x-2x^2}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2x^2-\left(x-2x^2\right)^2-x\left(x-2x^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{6x^3-2x^4}=\boxed{\frac{1}{6}}.$$

c) Al aproximarnos al punto (0,0) por rectas de la forma y = mx se obtiene un límite distinto al del apartado b), por tanto, podemos afirmar que no existe límite de la función en (0, 0).

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2x^2-m^2x^2-mx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2-m^2-m}=0\,.$$

Por **no ser continua en (0,0) tampoco es diferenciable**, ya que toda función diferenciable en un punto debe ser continua en dicho punto.

d) $$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\frac{\frac{h^3}{2h^2}-0}{h}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\frac{0-0}{k}=\boxed{0}$$

En el punto (2, -1) la función es continua y las derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x^2\left(2x^2-2xy-3y^2\right)}{\left(2x^2-xy-y^2\right)^2}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(2,-1)=\left(\frac{x^2\left(2x^2-2xy-3y^2\right)}{\left(2x^2-xy-y^2\right)^2}\right)_{(2,-1)}=\boxed{\frac{4}{9}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x^3\left(2y+x\right)}{\left(2x^2-xy-y^2\right)^2}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(2,-1)=\left(\frac{x^3\left(2y+x\right)}{\left(2x^2-xy-y^2\right)^2}\right)_{(2,-1)}=\boxed{0}$$

e) En (2, -1) la función es diferenciable, ya que se trata del cociente de dos funciones polinomicas con denominador distinto de cero.

$$\vec{\nabla}f(2,-1)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(2,-1),\frac{\partial f}{\partial y}(2,-1)\right)=\left(\frac{4}{9},0\right)$$

$$D_{\vec{u}}f(2,-1)=\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\nabla f(2,-1)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{4}{9},0\right)=\boxed{\frac{2}{9}}$$

45.- Consideremos $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x+2y-5}{2x-y} & \text{si } y \neq 2x \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } y=2x \end{cases}$ **. Se pide:**

a) ¿Existe el límite: $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)$ **?**

b) ¿Es continua la función en (1,2)?

c) ¿Es diferenciable la función en (1,2)?

Solución:

a) Límites reiterados:

$$\lim_{x\to 1}\left(\lim_{y\to 2} f(x,y)\right)=\lim_{x\to 1}\left(\lim_{y\to 2}\frac{x+2y-5}{2x-y}\right)\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{y\to 2}\left(\lim_{x\to 1} f(x,y)\right)=\lim_{y\to 2}\left(\lim_{x\to 1}\frac{x+2y-5}{2x-y}\right)\lim_{y\to 2}\frac{2y-4}{2-y}=\lim_{y\to 2}(-2)=-2$$

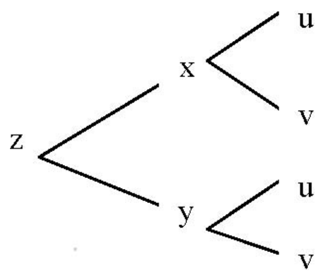
Luego no coinciden, **No existe**.

b) No puede ser continua, ya que no existe el límite.

c) No puede ser diferenciable, ya que no es continua.

46.- Sea la función $z = f(x,y)$ **con derivadas parciales continuas y sean** $\begin{cases} x = u - v \\ y = v - u \end{cases}$ **las ecuaciones de un cambio de variable, se pide demostrar que** $\dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial v} = 0$ **y comprobarlo para** $z = (x-y)\text{sen}(y-x)$

Solución:



$\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}$ pero $\begin{cases} x = u - v \\ y = v - u \end{cases}$, luego:

$\dfrac{\partial x}{\partial u} = 1,\ \dfrac{\partial y}{\partial u} = -1,\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = -1,\ \dfrac{\partial y}{\partial v} = 1$, por lo tanto, $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial v} = -\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0}$$

Para $z = (x-y)sen(y-x)$, tenemos que:

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = sen(y-x) - (x-y)\cos(y-x)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -sen(y-x) + (x-y)\cos(y-x)$, luego:

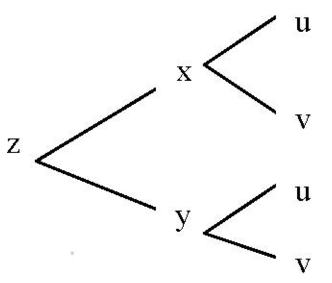
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 2sen(y-x) - 2(x-y)\cos(y-x)$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = -2sen(y-x) + 2(x-y)\cos(y-x)$$

En consecuencia, $\dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial v} = 0$.

47.- Sea la función z = sen (2x + 3y). Se efectúa el cambio de variables: $\begin{cases} x = 2u - v \\ y = v - 2u \end{cases}$

Hallar $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ **y** $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ **en** $\begin{cases} u = \dfrac{\pi}{2} \\ v = 0 \end{cases}$

Solución:



Aplicando la regla de la cadena, las derivadas parciales de z respecto de u y v son respectivamente:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \qquad \text{pero } \begin{cases} x = 2u - v \\ y = v - 2u \end{cases}, \text{ luego:}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 2, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -2, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -1, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 1, \text{ por lo tanto, } \frac{\partial z}{\partial u} = 2\frac{\partial z}{\partial x} - 2\frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$$

Por otro lado:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\cos(2x + 3y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3\cos(2x + 3y)$$

Particularizando

$$\begin{cases} u = \dfrac{\pi}{2} \\ v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi \\ y = -\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}(\pi, -\pi) = 2\cos(-\pi) = -2 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}(\pi, -\pi) = 3\cos(-\pi) = -3 \end{cases}$$

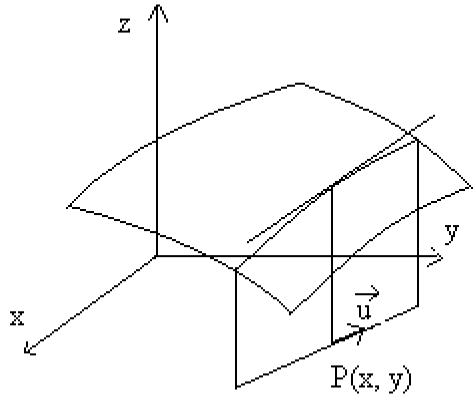
Sustituyendo arriba, se obtiene:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2\frac{\partial z}{\partial x} - 2\frac{\partial z}{\partial y} = 2\cdot(-2) - 2\cdot(-3) = \boxed{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = -(-2) + (-3) = \boxed{-1}$$

Derivadas parciales

Sea z=f(x,y) una función definida en un subconjunto $D\subset\mathbf{R}^2$ y sea $\mathbf{P}=(x,y)\in D$.



- Si $\vec{\mathbf{u}}=\mathbf{(1,0)}=\vec{\mathbf{i}}$, se denomina simplemente ***derivada parcial de f respecto de la variable*** **x**. Se designa $\mathbf{f_x(P)}$, o bien, $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{(P)}$. Es decir:

$$\mathbf{f_x(P)=\frac{\partial f}{\partial x}(P)=\lim_{h\to 0}\frac{f(P+h(1,0))-f(P)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}}\,.$$

- Análogamente si $\vec{\mathbf{u}}=\mathbf{(0,1)}=\vec{\mathbf{j}}$, se denomina ***derivada parcial de f respecto de la variable*** **y** Se designa $\mathbf{f_y(P)}$, o bien, $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}\mathbf{(P)}$. Es decir:

$$\mathbf{f_y(P)=\frac{\partial f}{\partial y}(P)=\lim_{h\to 0}\frac{f(P+h(0,1))\quad f(P)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)\quad f(x,y)}{h}}\,.$$

Derivadas parciales de orden superior

Sea la función z=f(x,y). Si existen las derivadas parciales en todo su dominio, o al menos en una parte de él, pueden definirse las funciones $\mathbf{f_x}$, $\mathbf{f_y}$, donde existan, como funciones de x e y. Se obtienen así ***cuatro derivadas parciales de segundo orden*** que designaremos:

- $(f_x)_x=f_{xx}$, o bien, $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.
- $(f_y)_x=f_{yx}$, o bien, $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.
- $(f_x)_y=f_{xy}$, o bien, $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.
- $(f_y)_y=f_{yy}$, o bien, $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Continuidad en un punto

Una función z=f(x,y) es ***continua en un punto (x_o,y_o)*** si y solo si verifica las tres condiciones siguientes:

1. Existe f(x_o,y_o), es decir (x_o,y_o) es un punto del dominio de la función.
2. Existe $\underset{(x,y)\to(x_o,y_o)}{\text{lím}} f(x,y) = L$, siendo L un número real finito.
3. L=f(x_o,y_o).

Definición

Se dice que la función z=f(x,y) es ***diferenciable en el punto*** $P_0(x_0,y_0)$ si y solo si su incremento total en dicho punto (al pasar del punto P_0 a P) se puede escribir en la forma:

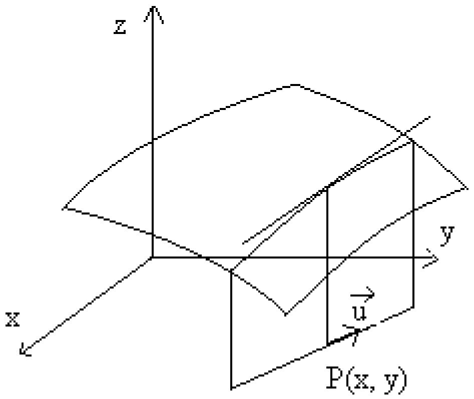
$$\boxed{\Delta z_0 = f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y-y_0) + O(\vec{v})} \quad \textbf{(⌘)}$$

$\Leftrightarrow \Delta z_0 = \overrightarrow{\nabla} f(P_0)\cdot(x-x_0, y-y_0) + O(\vec{v})$ siendo $\vec{v} = \overrightarrow{P_0P} = (x-x_0, y-y_0)$ y $O(\vec{v})$ un infinitésimo de orden mayor que $|\vec{v}|$, es decir:

$$\lim_{|\vec{v}|\to 0} \frac{O(\vec{v})}{|\vec{v}|} = \lim_{|\vec{v}|\to 0} \frac{f(P) - f(P_0) - \overrightarrow{\nabla} f(P_0)\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} = 0 .$$

Derivadas direccionales

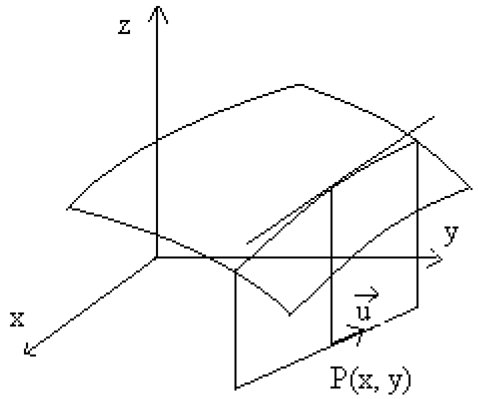
Sea z=f(x,y) una función definida en un subconjunto $D \subset \mathbf{R}^2$ y sea $\mathbf{P}=(x,y) \in D$.



- Sea $\vec{\mathbf{u}}$ un vector del plano vectorial euclídeo $\mathbf{R}^2$ con $|\vec{\mathbf{u}}|=1$, Cuando exista y sea finito el $\lim_{h \to 0} \frac{f(P+h\vec{u})-f(P)}{h}$, se denomina ***derivada direccional de f en* P *en la dirección del vector*** $\vec{\mathbf{u}}$. Se designa por **f'(P, $\vec{\mathbf{u}}$)**.

Derivada respecto de un vector

Sea z=f(x,y) una función definida en un subconjunto $D \subset \mathbf{R}^2$ y sea $\mathbf{P}=(x,y) \in D$.



- Sea $\vec{\mathbf{u}}$ un vector del plano vectorial euclídeo $\mathbf{R}^2$:

  Cuando exista y sea finito el $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(P + h\vec{u}) - f(P)}{h}$, se denomina ***derivada de f en el punto* P *respecto del vector*** $\vec{\mathbf{u}}$.

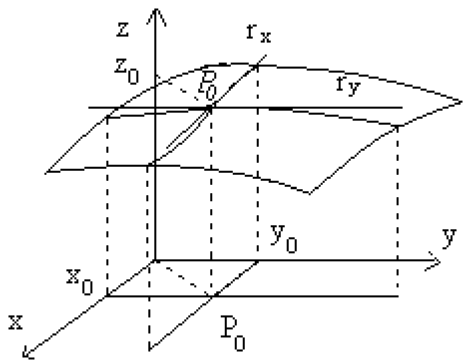
Gradiente de una función en un punto

Si están definidas las derivadas parciales de una función z=f(x,y) en un punto **P**=(x,y)$\in$D, se denomina **vector gradiente de f en el punto P**, o simplemente gradiente de f en P, y se designa $\vec{\nabla}\mathbf{f(P)}$, al vector

$$\vec{\nabla}\mathbf{f(P)} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{(P)}, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}\mathbf{(P)} \right) = \mathbf{f_x(P)}\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{f_y(P)}\vec{\mathbf{j}}\,.$$

Plano tangente a una superficie en un punto

Sea $z=f(x,y)$ la ecuación de una superficie S definida en un subconjunto $D\subset\mathbf{R}^2$ y $P_0(x_0,y_0)\in D$. Designamos por $z_0=f(x_0,y_0)$ y por P_0 (x_0,y_0,z_0) el punto correspondiente en la superficie S.



Cuando exista, el plano tangente π a la superficie S en el punto P_0, (x_o,y_o,z_o) es:

$$\pi \equiv z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y - y_0)$$

O bien,

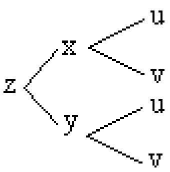
$$\pi \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{P_0}(x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{P_0}(y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{P_0}(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} F(P_0)\cdot \overrightarrow{P_0X} = 0$$

Las reglas de la cadena

1. Sea una función z=f(x,y) que tiene derivadas parciales continuas f_x, f_y, en (x,y) y sean dos funciones $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ diferenciables en t. Entonces la función compuesta $z = f\big(x(t), y(t)\big)$ es diferenciable en t y se verifica que:

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \vec{\nabla} f\big(x(t), y(t)\big)\cdot\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)}$$

2. Supongamos ahora una función z=f(x,y) que tiene derivadas parciales continuas f_x, f_y, en **(x,y)** y sean dos funciones $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$. La función compuesta $z = f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$ es una función de u y v en los puntos donde está definida, verificándose además que si x e y tienen derivadas parciales continuas respecto de u y v, entonces existen las derivadas parciales de f respecto de u y v que vienen dadas por las expresiones:



$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} \end{cases}}$$

De manera análoga se podrían definir las reglas de la cadena para funciones de tres o más variables.

Dominio de definición o campo de existencia.

Conjunto de valores para los cuales se pueden efectuar los cálculos que indica la expresión analítica de la función.

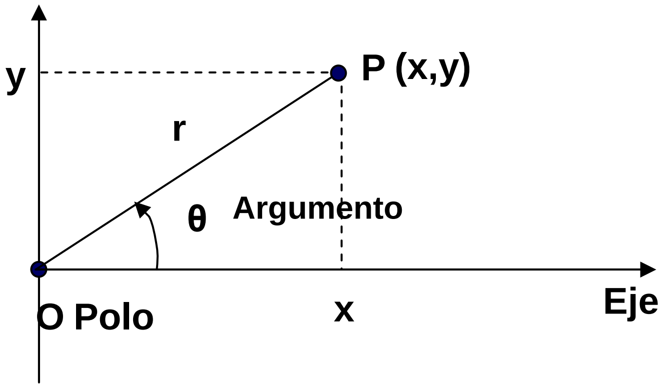
$$D = \left\{ \vec{x} \in R^n \text{ tales que, existe } \vec{y} = f\left(\vec{x}\right) \right\}$$

Curva de nivel

Dada la función $z=f(x,y)$ y una constante c. Una curva de nivel es el lugar geométrico de los puntos del plano para los cuales $f(x,y)=c$.

Coordenadas polares

Sea O un punto fijo del plano, denominado “**polo**” y sea la semirrecta de origen O, denominada “**eje polar**”. Entonces cualquier punto del plano P, queda determinado por el par (r, θ) siendo r la distancia euclídea del punto P al polo (r > 0) y θ el **argumento**, el ángulo formado por el eje polar y el segmento OP en el sentido positivo (contrario a las agujas del reloj). $\begin{cases} \mathbf{x = r\cos\theta} \\ \mathbf{y = rsen\theta} \end{cases}$



Crecimiento

Una función es **estrictamente creciente** en un intervalo cuando para dos puntos cualesquiera situados en él “x” y “x+h” se verifica: $x < x + h \Rightarrow f\left(x\right) < f\left(x + h\right)$

Si f ’(a)>0, la función f es creciente en a

Concepto de límite

Sean z=f(x,y) una función real de dos variables reales cuyo dominio es un subconjunto $D\subset\mathbf{R}^2$, L un número real y (x_o,y_o) un punto de acumulación del dominio D.

Diremos que el ***límite de la función z=f(x,y) cuando (x,y) tiende a (x_o,y_o) es el número L*** y escribiremos $\lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)=L$ si y solo si:

Para cualquier número **ε>0**, existe un número **δ>0** tal que ***para todos los puntos*** **(x,y)∈D**, siendo $(x,y)\neq(x_o,y_o)$, ***que verifiquen que*** **$d((x,y),(x_o,y_o))<\delta$** ***entonces sus imágenes verifican que*** **$d(f(x,y),L)<\varepsilon$.** Es decir:

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \text{tal que, todo } (x,y)\neq(x_o,y_o) \text{ con}$$

$$\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}<\delta \Rightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon.$$