MATEMÁTICAS II   Cónicas en coordenadas polares   Curso 10-11

1.- La Luna es el satélite natural de la Tierra y tiene una órbita elíptica con el centro de la Tierra en uno de sus focos. Esta órbita tiene los siguientes datos: a= 384400 km, e=0.05. Tomando como radio de la Tierra R= 6370 km y como radio de la Luna 1738 km,

a) Hallar una ecuación polar de la órbita de la Luna.

b) Hallar la distancia más lejana de la superficie de la Tierra a la superficie de la Luna y la distancia para $\alpha = \pi/2$.

2.- Los planetas describen órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos.

a) Hallar la ecuación polar de la órbita de Marte sabiendo que tiene por excentricidad

e = 0,0934 y que el semieje mayor es a = 227,94 x 106 km.

b) Hallar la distancia más lejana de Marte al Sol (afelio) y la distancia para $\alpha = \pi/6$.

c) Hallar una ecuación cartesiana de la órbita.

3.- Dada la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{169} - \frac{y^2}{100} = 1$ hallar la ecuación polar de su rama derecha suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está:

i) en el foco izquierdo de la hipérbola.
ii) en el centro de la hipérbola.
En el caso i), hallar la ecuación polar de sus directrices y asíntotas.

4) Dada la parábola de ecuación $y^2 = 6x$, hallar su ecuación polar suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está en el foco de la parábola.

5) Verificar que la ecuación $r = \dfrac{21}{5 - 2\cos\alpha}$ determina una elipse y hallar los semiejes y las ecuaciones polares de sus directrices.

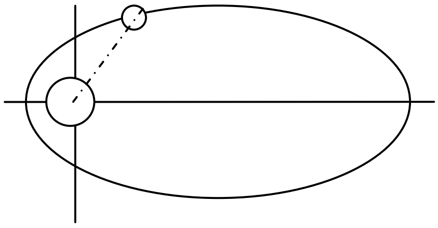
6) Verificar que la ecuación $r = \dfrac{16}{3 - 5\cos\alpha}$ determina la rama derecha de una hipérbola y hallar las ecuaciones polares de sus directrices y asíntotas.

7) Una elipse de excentricidad $e = \dfrac{1}{4}$ tiene un foco en el origen y su directriz correspondiente tiene de ecuación polar $r\cos\alpha = 8$. Sabiendo que el eje polar es OX^+, se pide:

a) Hallar las coordenadas del otro foco.
b) La ecuación polar de la elipse
c) Dibujar la elipse.

Ejercicios propuestos

1.- Los planetas describen órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos, como muestra la figura



a) Hallar la ecuación polar de Venus siendo $a = 6.693\cdot x\ 10^7$ millas; $e = 0{,}0068$.

b) Hallar la distancia al Sol para el afelio y para $\alpha = 10\pi/9$.

c) Hallar (usando DERIVE) las áreas barridas por un rayo trazado desde el Sol hasta el planeta mientras α crece desde 0 hasta $\pi/9$ y desde $\alpha = \pi$ hasta $\pi+\pi/9$.

d) Aplicar la segunda Ley de Kepler para estimar, respectivamente, el tiempo que Venus tarda en recorrer los dos arcos anteriores (período de traslación ≈ 225 días)

Solución:

a)
$$r = \frac{1.673172628\cdot 10^{11}}{2500 - 17\cdot \cos(\alpha)}$$

b) $6.738512396\cdot 10^{7}$, $6.650196357\cdot 10^{7}$

c) Áreas barridas (en millas^2): $7.922922816\cdot 10^{14}$, $7.714554982\cdot 10^{14}$

d) 12.66737018, 12.33422639

2.- El cometa Halley describe una órbita elíptica de excentricidad e ≈ 0.97. La longitud del eje mayor de la órbita es, aproximadamente, 36.18 unidades astronómicas (una u.a., distancia media entre la Tierra y el Sol, es ≈ 93 millones de millas). Hallar una ecuación en polares para la órbita ¿Cuánto se acerca el cometa Halley al Sol?

Solución:

$$\mathrm{r} = \frac{1.0691}{1 - 0.97\cos\alpha}; \quad r \approx 0.5427 \text{ u.a.}$$

3.- Determinar las cónicas que se dan en coordenadas polares mediante las ecuaciones siguientes:

a) $\rho = \dfrac{5}{1 - \frac{1}{2}\cos\alpha}$ **b)** $\rho = \dfrac{6}{1 - \cos\alpha}$ **c)** $\rho = \dfrac{10}{1 - \frac{3}{2}\cos\alpha}$

d) $\rho = \dfrac{12}{2 - \cos\alpha}$ **e)** $\rho = \dfrac{5}{3 - 4\cos\alpha}$ **f)** $\rho = \dfrac{1}{3 - 3\cos\alpha}$

Solución:
a) Elipse **b)** Parábola **c)** Una rama de una hipérbola **d)** Elipse **e)** Una rama de una hipérbola **f)** Parábola.

4.- Dada la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$, hallar la ecuación polar de su rama izquierda, suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está:

a) en el foco izquierdo de la hipérbola;
b) en el foco derecho.

Solución:
a) $\rho = \frac{144}{5 + 13\cos\alpha}$ **b)** $\rho = -\frac{144}{5 + 13\cos\alpha}$

5.- Hallar en la elipse $\rho = \frac{12}{3 - \sqrt{2}\cos\alpha}$ los puntos cuyos radios polares son iguales a 6.

Solución:
$\left(6, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(6, -\frac{\pi}{4}\right)$

6.- Hallar en la hipérbola $\rho = \frac{15}{3 - 4\cos\alpha}$ los puntos cuyos radios polares son iguales a 3.

Solución:
$\left(3, 2\frac{\pi}{3}\right)$, $\left(6, -2\frac{\pi}{3}\right)$.

7.- Hallar en la parábola $\rho = \frac{p}{1 - \cos\alpha}$ los puntos:

a) cuyos radios polares sean mínimos.
b) cuyos radios polares sean iguales al parámetro de la parábola.

Solución:
a) $\left(\frac{p}{2}, \pi\right)$, **b)** $\left(\frac{\pi}{2}, p\right)$, $\left(p, -\frac{\pi}{2}\right)$