

MATEMÁTICAS II **Curso 07-08**
Funciones de varias variables. Límites y continuidad



1. Se construye un depósito de propano adosando dos hemisferios a los extremos de un cilindro circular recto. Expresar el volumen V de ese depósito en función del radio r del cilindro y de su altura h .
2. Determinar si las siguientes funciones son acotadas:
a) $z = \operatorname{sen}^2(x+y)\cos(x-e^y)$ b) $z = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x^2} + y^2 \operatorname{sen} \frac{1}{y^2}$ c) $z = \frac{x+y}{e^{x+y}}$
3. Hallar, y representar gráficamente, el dominio de las funciones siguientes. Calcula también el conjunto imagen o recorrido:
a) $f(x,y) = \ln(xy-6)$; b) $g(x,y) = \sqrt{4-x^2-4y^2}$; c) $h(x,y) = \operatorname{arc\,cos} \frac{y}{x}$;
d) $p(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$; e) $r(x,y) = x^2 e^{\left(\frac{-xy}{2}\right)}$.
4. Describir las curvas de nivel de las funciones siguientes y dibujar las curvas de nivel correspondientes a los valores de c que se especifican:
a) $z = xy$ $c = \pm 1, \pm 2, \pm 4$.
b) $z = \frac{x}{x^2+y^2}$ $c = 0, \pm 1/2, \pm 1; \pm 2$.
c) $z = e^{\left(\frac{xy}{2}\right)}$ $c = 2, 4, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$.
d) $z = 6 - 2x - 3y$ $c = 0, 2, 4, 6, 8$.
5. La temperatura T (en grados Celsius) en cualquier punto (x,y) de una placa circular de 10m de radio es:
$$T = 600 - 0,75x^2 - 0,75y^2$$
Donde x e y se miden en metros. Calcular y dibujar algunas curvas isotermas.
6. Consideremos $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{xy}$. Se pide:
a) Determinar, si es posible, el límite a lo largo de cualquier recta $y = mx$.
b) Determinar, si es posible, el límite a lo largo de la parábola $y = x^2$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Funciones de varias variables. Límites y continuidad

d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x - y^4}{x^3 - y^4}$ f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy - x + y}{x + y}$

8. Estudiar la continuidad en (0, 0), y en el resto del dominio, de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

b) $g(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^2 - y^2)xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

9. Dada la función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\text{sen}^2 x \text{sen} y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ k & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Se pide:

- a. Límites reiterados en el punto (0,0).
- b. A la vista del resultado anterior ¿qué puedes decir acerca del límite de f en (0,0)? ¿Es continua la función en (0,0)?
- c. Definir f(0,0) para que f sea continua en dicho punto.

10. Para las siguientes funciones, probar que el valor de $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ depende del

camino elegido para acercarse a (0,0):

a) $f(x, y) = \frac{x^2 y^4}{x^2 y^4 + (x - y^2)^2}$ b) $f(x, y) = \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$

¿Existen dichos límites?

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Hallar el dominio y el recorrido de las funciones:

$f(x, y) = \ln(2x + y)$ $g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ $h(x, y) = \text{arc sen}(x+y)$.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



4.- Dada la función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(y^2 - x^2)}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ k & \text{si } (x, y) = (0,0) \end{cases}$. Se pide:

- a) Hallar, si existe, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.
 b) ¿Existe algún valor de k para el cual la función f sea continua en (0,0)?

5.- Sea la función $f(x,y) = (x + y) \operatorname{sen} \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{y}$.

- a) Hallar, si existen, los límites reiterados en (0,0).
 b) Hallar los límites radiales en (0,0).
 c) Aplicar el criterio de la mayorante para averiguar si existe el $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.
 d) ¿Es continua f en (0,0)? Si no fuera así ¿cómo debería definirse f(0,0) para serlo?

6.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^6} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0,0) \end{cases}$ b) $g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0,0) \end{cases}$

7.- Dada la función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ k & \text{si } (x, y) = (0,0) \end{cases}$. Se pide:

- a. Hallar, si existe, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.
 b. Estudiar la continuidad de f en todo \mathbb{R}^2 , según los valores de k.

Soluciones a los ejercicios propuestos

1.- $\text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > -2x\}$, $\text{Im}f = \mathbb{R}$

$\text{Dom } \sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$, $\text{Im}\sigma =]1, \infty)$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



Funciones de varias variables. Límites y continuidad

Elipses, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}$

3.- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$

4.- a) No existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$

b) f es discontinua en (0, 0) para todo valor de k.

5.- a) No existen los límites reiterados en (0, 0).

b) Valen 0

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$

d) f no es continua en (0, 0). Habría que definir $f(0, 0) = 0$.

6.- a) f es continua en todo \mathbb{R}^2 excepto en el (0,0).

b) g es continua en todo \mathbb{R}^2 excepto en el (0,0).

7.- a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$

b) Si $k = 0$, f es continua en todo \mathbb{R}^2 .

En caso contrario, f es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70