Ejercicio para entregar
a) El 28 de noviembre de 1963, EE.UU. lanzó el Explorer 18. Sus puntos más alto y más bajo sobre la superficie de la Tierra fueron 119 millas y 122000 millas. El centro de la Tierra es el foco de la órbita. Hallar la ecuación en polares de la órbita $r = f(\alpha)$ y la distancia entre la superficie de la Tierra y el satélite cuando $\alpha = 60^\circ$. (Suponer que el radio de la Tierra es 4000 millas y que el foco mencionado es el izquierdo).
b) Hallar la ecuación en polares de la circunferencia de radio "a" y centro en el punto C de coordenadas polares C = (b, θ), suponiendo "b" positivo.
¿ Cómo queda la ecuación si la circunferencia pasa por el origen?
¿Y si además el centro está sobre el eje de abscisas? ¿y sobre el de ordenadas?

1) El cometa Halley describe una orbita elíptica de excentricidad e ≈ 0.97. la longitud del eje mayor de la órbita es, aproximadamente, 36.18 unidades astronómicas (una u.a., distancia media entre la Tierra y el Sol, es ≈ 93 millones de millas). Hallar una ecuación en polares para la órbita ¿Cuánto se acerca el cometa Halley al Sol?

2) Dada la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, hallar la ecuación polar de su rama derecha suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está:

a) en el foco derecho de la hipérbola.

b) en el foco izquierdo de la hipérbola.

En el caso a), hallar la ecuación polar de sus directrices y asíntotas.

3) Dada la parábola de ecuación $y^2 = 6x$, hallar su ecuación polar suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está en el foco de la parábola.

4) Verificar que la ecuación $r = \frac{21}{5 - 2\cos\alpha}$ determina una elipse y hallar los semiejes y las ecuaciones polares de sus directrices.

5) Verificar que la ecuación $r = \frac{16}{3 - 5\cos\alpha}$ determina la rama derecha de una hipérbola y hallar las ecuaciones polares de sus directrices y asíntotas.

6) Una elipse de excentricidad $e = \frac{1}{4}$ tiene un foco en el origen y su directriz correspondiente tiene de ecuación polar $r\cos\alpha = 8$. Sabiendo que el eje polar es OX^+, se pide:

a) Hallar las coordenadas del otro foco.

b) La ecuación polar de la elipse

c) Dibujar la elipse

Ejercicios propuestos

1) Determinar las cónicas que se dan en coordenadas polares mediante las ecuaciones siguientes:

a) $\rho = \dfrac{5}{1 - \frac{1}{2}\cos\alpha}$ **b)** $\rho = \dfrac{6}{1 - \cos\alpha}$ **c)** $\rho = \dfrac{10}{1 - \frac{3}{2}\cos\alpha}$

d) $\rho = \dfrac{12}{2 - \cos\alpha}$ **e)** $\rho = \dfrac{5}{3 - 4\cos\alpha}$ **f)** $\rho = \dfrac{1}{3 - 3\cos\alpha}$

Solución:

a) Elipse **b)** Parábola **c)** Una rama de una hipérbola **d)** Elipse **e)** Una rama de una hipérbola **f)** Parábola.

2) Dada la ecuación de la hipérbola $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{144} = 1$, hallar la ecuación polar de su rama izquierda, suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está:

a) en el foco izquierdo de la hipérbola;

b) en el foco derecho.

Solución:

a) $\rho = \dfrac{144}{5 + 13\cos\alpha}$ **b)** $\rho = -\dfrac{144}{5 + 13\cos\alpha}$

3) Hallar en la elipse $\rho = \dfrac{12}{3 - \sqrt{2}\cos\alpha}$ los puntos cuyos radios polares son iguales a 6.

Solución:

$\left(6,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$, $\left(6,\ -\dfrac{\pi}{4}\right)$

4) Hallar en la hipérbola $\rho = \dfrac{15}{3 - 4\cos\alpha}$ los puntos cuyos radios polares son iguales a 3.

Solución:

$\left(3,\ 2\dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left(6,\ -2\dfrac{\pi}{3}\right)$.

5) Hallar en la parábola $\rho = \dfrac{p}{1 - \cos\alpha}$ los puntos :

a) cuyos radios polares sean mínimos.

b) cuyos radios polares sean iguales al parámetro de la parábola.

Solución:

a) $\left(\dfrac{p}{2}, \pi\right)$, **b)** $\left(\dfrac{\pi}{2}, p\right)$, $\left(p, -\dfrac{\pi}{2}\right)$