

INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL.

CÁLCULO INFINITESIMAL.

HOJA 5: FUNCIONES DE VARIABLE VECTORIAL. DERIVADA.

EJERCICIOS

0. Obtener y representar gráficamente las líneas o superficies de nivel de las siguientes funciones:

0.1. $f(x, y) = x^2 + y^2$

0.2. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

0.3. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

0.4. $f(x, y, z) = (x - a)^2 + (y - b)^2$

1. Mediante el límite correspondiente, encontrar las derivadas direccionales de las siguientes funciones en el punto P según la dirección definida por v:

1.1. $f(x, y) = x + 2xy - 3y^2$, P (1,2), $\mathbf{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

1.2. $f(x, y, z) = xyz$, P (1,0,1), $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

1.3. $f(x, y) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq \mathbf{0} \\ 0 & \text{si } (x, y) = \mathbf{0} \end{cases}$ P (0,0), $\mathbf{v} = (1,1)$

1.4. $f(x, y) = x^2 y e^{xy}$, P (0,0), $\mathbf{v} = (1,1)$

2. Mediante el límite correspondiente, estudiar todas las derivadas direccionales de la siguiente función en el origen. *Nota:* utilizar un vector genérico $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$:

$$f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$$

3. Mediante cálculo del límite, demostrar que la siguiente función no es continua en el origen y sin embargo existen todas las derivadas direccionales en dicho punto:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq \mathbf{0} \\ 0 & \text{si } (x, y) = \mathbf{0} \end{cases}$$

4. Aplicando el límite en su caso, calcular las derivadas parciales primeras de las funciones siguientes:

4.1. $f(x, y) = x^2 + y^2 \operatorname{sen}(xy)$

4.2. $f(x, y) = L(x^2 + y^2)$

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a background of a light blue and white geometric shape that resembles a stylized 'C' or a banner.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$5.2. f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 - y^2} \text{ en } (1,0) \text{ y en } (1,1)$$

$$5.3. f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \text{ en } (1,1) \text{ y en } \mathbf{0}$$

$$5.4. f(x,y) = e^{x^2 + y^2} - 1 \text{ en } (a,b)$$

$$5.5. f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \text{ en } (2,-1) \text{ y en } (0,0)$$

$$5.6. f(x,y,z) = x^2 + xyz + y^2 z \text{ en } (1,0,-1)$$

$$5.7. f(x,y,z) = y \cos x - ze^{xy} + L(xyz) \text{ en } (1,1,1)$$

6. Para cada una de las funciones siguientes y mediante el gradiente, calcular el valor de la derivada direccional en los puntos que se indican y según las direcciones correspondientes:

$$6.1. f(x,y) = x + 2xy - 3y^2, \quad P(1,2), \quad \mathbf{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

$$6.2. f(x,y,z) = xyz, \quad P(1,0,1), \quad \mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$6.3. f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq \mathbf{0} \\ 0 & \text{si } (x,y) = \mathbf{0} \end{cases} \quad P(2,-1), \quad \mathbf{v} = (2,1)$$

$$6.4. f(x,y) = x^2 y e^{xy}, \quad P(0,0), \quad \mathbf{v} = (1,1)$$

7. Hallar la derivada de la función $z = 3x^4 - xy + y^3$ en el punto M (1, 2) según la dirección que forma con el eje OX un ángulo de 60° .

8. Hallar la derivada de la función $z = 5x^2 - 3x - y - 1$ en el punto M (2, 1) según la dirección de la recta que une este punto con el punto N (5, 5).

9. Para cada una de las funciones siguientes, calcular el valor de la derivada direccional máxima en los puntos que se indican, así como la dirección en que ésta tiene lugar:

$$9.1. f(x,y) = \frac{x}{x+y} \text{ en } (1,1)$$

$$9.2. f(x,y) = \frac{x^2 e^x}{x+y} \text{ en } (1,2)$$

$$9.3. f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \text{ en } (1,1,1)$$

$$9.4. f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \text{ en } (2, 4)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$$10.2. f(x, y) = \frac{\cos x}{y} - e^{xy} + \operatorname{sen}(x + y) \quad \text{en } (-1, 1)$$

11. Calcular las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal a cada una de las curvas siguientes en los puntos que se indican:

$$11.1. \mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k} \quad \text{en } (3, 9, 27)$$

$$11.2. \mathbf{r}(t) = e^{-t} \mathbf{i} + 2t \mathbf{j} + Lt \mathbf{k} \quad \text{en } t = 1$$

$$11.3. \mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t \mathbf{j} + 5t \mathbf{k} \quad \text{en } (2, 0, 0)$$

$$11.4. \mathbf{r}(t) \equiv \begin{cases} z = x^2 - y \\ y = x \end{cases} \quad \text{en } (0, 0, 0)$$

12. Calcular las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a cada una de las superficies siguientes en los puntos que se indican:

$$12.1. z(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{en } (3, 4, 25)$$

$$12.2. z(x, y) = \operatorname{sen}(xy) \quad \text{en } (1, \pi, 0)$$

$$12.3. z(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{en } \left(3, -4, \frac{3}{5} \right)$$

$$12.4. \mathbf{r}(x, y) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + (2x^2 + 4y^2) \mathbf{k} \quad \text{en } (2, 1, 12)$$

13. Encontrar el plano tangente a la superficie $z = x^2 + 2y^2$ que es paralelo al plano $x + 2y - z = 10$.

14. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva expresada por intersección de dos superficies en cada uno de los casos y los puntos siguientes:

$$14.1. C \equiv \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \quad \text{en } (1, 0, 1)$$

$$14.2. C \equiv \begin{cases} xy + xz + yz = 3 \\ x^2 - y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad \text{en } (1, 1, 1)$$

$$14.3. C \equiv \begin{cases} z = x^2 - y^2 \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{en } (2, 1, 3)$$

SOLUCIONES

- 0.** 0.1 Círculos concéntricos de radio K . 0.2. Esferas concéntricas de radio K .
 0.3. $K = 0$ cono de sección circular; $K > 0$ hiperboloides de una hoja; $K < 0$ hiperboloides de dos hojas.
 0.4. Cilindros rectos circulares de centro (a, b) y radio K .

- 1.** 1.1. -5, 1.2. 0, 1.3. No existe, 1.4. 0

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

- - -

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**



$$4.2. \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{2x}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq \mathbf{0} \\ \text{No existe} & \text{si } (x, y) = \mathbf{0} \end{cases} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \frac{2y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq \mathbf{0} \\ \text{No existe} & \text{si } (x, y) = \mathbf{0} \end{cases}$$

$$4.3. \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{y^6 - x^2 y^2}{(x^2 + y^4)^2} & \text{si } (x, y) \neq \mathbf{0} \\ 0 & \text{si } (x, y) = \mathbf{0} \end{cases} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \frac{2x^3 y - 2xy^5}{(x^2 + y^4)^2} & \text{si } (x, y) \neq \mathbf{0} \\ 0 & \text{si } (x, y) = \mathbf{0} \end{cases}$$

5. 5.1. $\text{grad } f_{(1,2)} = (0, -1)$ 5.2. $\text{grad } f_{(1,0)} = (0, 1)$; $\text{grad } f_{(1,1)}$ no existe (no existe f en este punto).

5.3. $\text{grad } f_{(1,1)} = \left(2 \sin \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \mathbf{i} + \left(2 \sin \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \mathbf{j}$; $\text{grad } f_{(0,0)} = \mathbf{0}$

5.4. $\text{grad } f_{(a,b)} = 2a e^{a^2+b^2} \mathbf{i} + 2b e^{a^2+b^2} \mathbf{j} \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$

5.5. $\text{grad } f_{(2,-1)} = (3/25, 6/25)$; $\text{grad } f_{(0,0)} = (0, 0)$ 5.6. $\text{grad } f_{(1,0,-1)} = 2 \mathbf{i} - \mathbf{j}$

5.7. $\text{grad } f_{(1,1,1)} = (-\sin 1 - e + 1, \cos 1 - e + 1, -e + 1)$

6. 6.1. -5, 6.2. 0, 6.3. $\frac{12}{25\sqrt{5}}$, 6.4. 0 7. $5 + 11\sqrt{3}/2$ 8. 9.4

9. 9.1. $\sqrt{2}/4$, $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ 9.2. $e\sqrt{65}/9$, $(\frac{8e}{9}, -\frac{e}{9})$ 9.3. $2\sqrt{3}$, (1,1,1)

9.4. Todas las derivadas son nulas en este punto. 9.5. $\sqrt{5}$, (-1,2,0)

10. 10.1. $f_x = 11$, $f_y = -60$, $f_{xx} = 14$, $f_{yy} = -94$, $f_{xy} = f_{yx} = 8$

10.2. $f_x = 1 - 1/e - \sin(-1)$, $f_y = 1 + 1/e - \cos(-1)$,

$f_{xx} = -1/e - \cos(-1)$, $f_{yy} = -1/e + 2 \cos(-1)$, $f_{xy} = f_{yx} = \sin(-1)$

11. 11.1. $x - 3 = \frac{y - 9}{6} = \frac{z - 27}{27}$, $x + 6y + 27z = 786$

11.2. $\frac{x - e^{-1}}{-e^{-1}} = \frac{y - 2}{2} = z$, $-e^{-1}(x - e^{-1}) + 2(y - 2) + z = 0$

11.3. $\frac{x - 2}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z}{5}$, $2y + 5z = 0$

11.4. $x = y = -z$, $x + y - z = 0$

12. 12.1. $6x + 8y - z - 25 = 0$, $\frac{x - 3}{6} = \frac{y - 4}{8} = 25 - z$

12.2. $\pi x + y + z - 2\pi = 0$, $\frac{x - 1}{\pi} = y - \pi = z$

12.3. $16x + 12y - 125z + 75 = 0$, $\frac{x - 3}{16} = \frac{y + 4}{12} = \frac{z - 3/5}{-125}$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70