INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL.

CÁLCULO INFINITESIMAL.

HOJA 5: FUNCIONES DE VARIABLE VECTORIAL. DERIVADA.

EJERCICIOS

0. Obtener y representar gráficamente las líneas o superficies de nivel de las siguientes funciones:

0.1. $f(x,y) = x^2 + y^2$

0.2. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

0.3. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$

0.4. $f(x,y,z) = (x-a)^2 + (y-b)^2$

1. Mediante el límite correspondiente, encontrar las derivadas direccionales de las siguientes funciones en el punto P según la dirección definida por **v**:

1.1. $f(x,y) = x + 2xy - 3y^2$, P (1,2), $\mathbf{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

1.2. $f(x,y,z) = xyz$, P (1,0,1), $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

1.3. $f(x,y) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq \mathbf{0} \\ 0 & si \quad (x,y) = \mathbf{0} \end{cases}$ P (0,0), $\mathbf{v} = (1,1)$

1.4. $f(x,y) = x^2 y e^{xy}$, P (0,0), $\mathbf{v} = (1,1)$

2. Mediante el límite correspondiente, estudiar todas las derivadas direccionales de la siguiente función en el origen. *Nota:* utilizar un vector genérico **v** = (v_1, v_2):

$$f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$$

3. Mediante cálculo del límite, demostrar que la siguiente función no es continua en el origen y sin embargo existen todas las derivadas direccionales en dicho punto:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & si \quad (x,y) \neq \mathbf{0} \\ 0 & si \quad (x,y) = \mathbf{0} \end{cases}$$

4. Aplicando el límite en su caso, calcular las derivadas parciales primeras de las funciones siguientes:

4.1. $f(x,y) = x^2 + y^2 \operatorname{sen}(xy)$

4.2. $f(x,y) = \mathrm{L}\left(x^2 + y^2\right)$

4.3. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & si \quad (x,y) \neq \mathbf{0} \\ 0 & si \quad (x,y) = \mathbf{0} \end{cases}$

5. Calcular el gradiente de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

5.1. $f(x,y) = x^2 y - 2xy$ en (1,2)

5.2. $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2-y^2}$ en $(1,0)$ y en $(1,1)$

5.3. $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\operatorname{sen}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si \quad (x.y)=(0,0)\end{cases}$ en $(1,1)$ y en $\mathbf{0}$

5.4. $f(x,y)=e^{x^2+y^2}-1$ en (a,b)

5.5. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si \quad (x.y)=(0,0)\end{cases}$ en $(2,-1)$ y en $(0,0)$

5.6. $f(x,y,z)=x^2+xyz+y^2z$ en $(1,0,-1)$

5.7. $f(x,y,z)=y\cos x-ze^{xy}+\mathrm{L}(xyz)$ en $(1,1,1)$

6. Para cada una de las funciones siguientes y mediante el gradiente, calcular el valor de la derivada direccional en los puntos que se indican y según las direcciones correspondientes:

6.1. $f(x,y)=x+2xy-3y^2$, P $(1,2)$, $\mathbf{v}=\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$

6.2. $f(x,y,z)=xyz$, P $(1,0,1)$, $\mathbf{v}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},0,\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

6.3. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq\mathbf{0}\\ 0 & si \quad (x,y)=\mathbf{0}\end{cases}$ P $(2,-1)$, $\mathbf{v}=(2,1)$

6.4. $f(x,y)=x^2ye^{xy}$, P $(0,0)$, $\mathbf{v}=(1,1)$

7. Hallar la derivada de la función $z = 3x^4 - xy + y^3$ en el punto M (1, 2) según la dirección que forma con el eje OX un ángulo de 60º.

8. Hallar la derivada de la función $z = 5x^2 - 3x - y - 1$ en el punto M (2, 1) según la dirección de la recta que une este punto con el punto N (5, 5).

9. Para cada una de las funciones siguientes, calcular el valor de la derivada direccional máxima en los puntos que se indican, así como la dirección en que ésta tiene lugar:

9.1. $f(x,y)=\dfrac{x}{x+y}$ en $(1,1)$

9.2. $f(x,y)=\dfrac{x^2e^x}{x+y}$ en $(1,2)$

9.3. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ en $(1,1,1)$

9.4. $f(x,y)=x^3+3x^2+4xy+y^2$ en $\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{4}{3}\right)$

9.5. $f(x,y,z)=\dfrac{z}{xy}+x^2z-xy^2$ en $(1,-1,0)$

10. Calcular todas las derivadas parciales segundas de las funciones siguientes en los puntos que se indican. Comprobar qué ocurre con las segundas derivadas cruzadas:

10.1. $f(x,y)=x^3+x^2y^2-2y^4$ en $(1,2)$

10.2. $f(x,y)=\dfrac{\cos x}{y}-e^{xy}+\operatorname{sen}(x+y)$ en $(-1,1)$

11. Calcular las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal a cada una de las curvas siguientes en los puntos que se indican:

11.1. $\mathbf{r}(t)=t\,\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$ en $(3,9,27)$

11.2. $\mathbf{r}(t)=e^{-t}\,\mathbf{i}+2t\,\mathbf{j}+\mathrm{L}\,t\,\mathbf{k}$ en $t=1$

11.3. $\mathbf{r}(t)=2\cos t\,\mathbf{i}+2\operatorname{sen}t\,\mathbf{j}+5t\,\mathbf{k}$ en $(2,0,0)$

11.4. $\mathbf{r}(t)\equiv\begin{cases} z=x^2-y \\ y=x \end{cases}$ en $(0,0,0)$

12. Calcular las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a cada una de las superficies siguientes en los puntos que se indican:

12.1. $z(x,y)=x^2+y^2$ en $(3,4,25)$

12.2. $z(x,y)=\operatorname{sen}(xy)$ en $(1,\pi,0)$

12.3. $z(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ en $\left(3,-4,\dfrac{3}{5}\right)$

12.4. $\mathbf{r}(x,y)=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+(2x^2+4y^2)\,\mathbf{k}$ en $(2,1,12)$

13. Encontrar el plano tangente a la superficie $z = x^2 + 2y^2$ que es paralelo al plano $x + 2y - z = 10$.

14. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva expresada por intersección de dos superficies en cada uno de los casos y los puntos siguientes:

14.1. $C\equiv\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$ en $(1,0,1)$

14.2. $C\equiv\begin{cases} xy+xz+yz=3 \\ x^2-y^2+z^2=1 \end{cases}$ en $(1,1,1)$

14.3. $C\equiv\begin{cases} z=x^2-y^2 \\ z=3 \end{cases}$ en $(2,1,3)$

SOLUCIONES

0. 0.1 Círculos concéntricos de radio K. 0.2. Esferas concéntricas de radio K.
0.3. $K=0$ cono de sección circular; $K>0$ hiperboloides de una hoja; $K<0$ hiperboloides de dos hojas.
0.4. Cilindros rectos circulares de centro (a, b) y radio K.

1. 1.1. -5, 1.2. 0, 1.3. No existe, 1.4. 0

2. Sólo existen en las direcciones de los ejes, y ambas tienen por valor 0.

3. Tomando un vector genérico (v_1, v_2), las direccionales tienen por valor $\begin{cases} \dfrac{v_2^2}{v_1} & si \quad v_1\neq 0 \\ 0 & si \quad v_1=0 \end{cases}$

4. 4.1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x+y^3\cos(xy)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2y\operatorname{sen}(xy)+y^2x\cos(xy)$ $\forall(x,y)$

4.2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}\dfrac{2x}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq \mathbf{0}\\ \text{No existe} & si \quad (x,y)=\mathbf{0}\end{cases}$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}=\begin{cases}\dfrac{2y}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq \mathbf{0}\\ \text{No existe} & si \quad (x,y)=\mathbf{0}\end{cases}$

4.3. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}\dfrac{y^6-x^2y^2}{(x^2+y^4)^2} & si \quad (x,y)\neq \mathbf{0}\\ 0 & si \quad (x,y)=\mathbf{0}\end{cases}$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}=\begin{cases}\dfrac{2x^3y-2xy^5}{(x^2+y^4)^2} & si \quad (x,y)\neq \mathbf{0}\\ 0 & si \quad (x,y)=\mathbf{0}\end{cases}$

5. 5.1. **grad** $f_{(1,2)}$ = (0, –1) 5.2. **grad** $f_{(1,0)}$ = (0, 1); **grad** $f_{(1,1)}$ no existe (no existe f en este punto).

5.3. $\mathbf{grad}f_{(1,1)}=\left(2\operatorname{sen}\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{i}+\left(2\operatorname{sen}\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{j}$; $\mathbf{grad}f_{(0,0)}=\mathbf{0}$

5.4. $\mathbf{grad}f_{(a,b)}=2a\,e^{a^2+b^2}\,\mathbf{i}+2b\,e^{a^2+b^2}\,\mathbf{j} \quad \forall (a,b)\in R^2$

5.5. **grad** $f_{(2,-1)}$ = (3/25, 6/25); **grad** $f_{(0,0)}$ = (0, 0) 5.6. **grad** $f_{(1,0,-1)}$ = 2 **i** – **j**

5.7. **grad** f(1,1,1) = (– sen 1 – e + 1, cos 1 – e + 1, – e + 1)

6. 6.1. -5, 6.2. 0, 6.3. $\dfrac{12}{25\sqrt{5}}$, 6.4. 0 **7.** $5+{}^{11\sqrt{3}}\!/_{2}$ **8.** 9.4

9. 9.1. ${}^{\sqrt{2}}\!/_{4}$, $\left(\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{4}\right)$ 9.2. ${}^{e\sqrt{65}}\!/_{9}$, $\left(\dfrac{8e}{9},-\dfrac{e}{9}\right)$ 9.3. $2\sqrt{3}$, $(1,1,1)$

9.4. Todas las derivadas son nulas en este punto. 9.5. $\sqrt{5}$, $(-1,2,0)$

10. 10.1. $f_x = 11$, $f_y = -60$, $f_{xx} = 14$, $f_{yy} = -94$, $f_{xy} = f_{yx} = 8$

10.2. f_x = 1 – 1/e – sen(–1), f_y = 1 + 1/e – cos(–1),

f_{xx} = –1/e – cos(–1), f_{yy} = –1/e + 2 cos (–1), $f_{xy} = f_{yx}$ = sen (–1)

11. 11.1. $x-3=\dfrac{y-9}{6}=\dfrac{z-27}{27}$, $x+6y+27z=786$

11.2. $\dfrac{x-e^{-1}}{-e^{-1}}=\dfrac{y-2}{2}=z$, $-e^{-1}(x-e^{-1})+2(y-2)+z=0$

11.3. $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{5}$, $2y+5z=0$

11.4. $x=y=-z$, $x+y-z=0$

12. 12.1. $6x+8y-z-25=0$, $\dfrac{x-3}{6}=\dfrac{y-4}{8}=25-z$

12.2. $\pi x+y+z-2\pi=0$, $\dfrac{x-1}{\pi}=y-\pi=z$

12.3. $16x+12y-125z+75=0$, $\dfrac{x-3}{16}=\dfrac{y+4}{12}=\dfrac{z-3/5}{-125}$

12.4. $8x+8y-z-12=0$, $\dfrac{x-2}{8}=\dfrac{y-1}{8}=\dfrac{z-12}{-1}$

13. $x+2y-z=\dfrac{3}{4}$

14. 14.1. $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{0}$, 14.2. $x-1=\dfrac{y-1}{0}=1-z$, 14.3. $x-2=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{0}$
