Ecuaciones Diferenciales

1.- Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$(2x + y - 4)\,dx + (5y - 1)\,dy = 0$$

Solución

2.- Obtener la solución general de la ecuación diferencial $(x-1)^2 y\,dx + x^2 (y+1)\,dy = 0$. Hallar la solución particular que pasa por el punto (1,1).

Solución

3.-a. Hallar la solución general de la ecuación diferencial:

$$(3x + y - 5)dx + (6x + 2y - l)dy = 0$$

b. Hallar la solución particular que pasa por el punto (1, 2).

Solución

4.- Dada la ecuación diferencial $y^3dx - x^2\,(2y + x)dy = O$. Se pide:
a) Clasificarla.
b) Resolverla utilizando la función de DERIVE adecuada.
c) Hallar la solución particular que pasa por el punto (1,3)

Solución

5.- a) Clasificar y resolver la siguiente ecuación diferencial con la función de Derive específica para este tipo de ecuaciones: $(x^4+ 2x^2+ 2xy + l)dx - (1 + x^2)dy = 0$.
b) Hallar la solución particular que pasa por el pimío (2,3).

Solución

6.- Indicar de qué tipo es la siguiente ecuación diferencial y resolverla utilizando la función de Derive específica para este tipo de ecuaciones:

$$x\,dx - y\cos\left(\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$$

Solución

7.-. Hallar la solución general de la ecuación diferencial:

$$(3x - y - l)dx + (5x - y - 3)dy = 0$$

Solución

8.- Resolver la ecuación diferencial $2xy\ln y\,dx + \left(x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}\right)dy = 0$

Solución

9.- Resolver la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = y\cos x + \mathrm{sen}(2x)$

Solución

10.- Resolver la ecuación diferencial $(x^3+y^4)dx+8xy^3dy=0.$

Solución

11.- Esta nevando con regularidad a las 12 sale una máquina quitanieves que recorre en la 1ªhora 2 km y en la segunda 1 km. ¿A qué hora empezó a nevar?
(Se admitirá como hipótesis que la cantidad de nieve quitada por la máquina en la unidad de tiempo es uniforme, de modo que su velocidad de avance resulta inversamente proporcional a la altura de la nieve encontrada)

Solución

12.- a) Clasificar y resolver la siguiente ecuación diferencial con la función de DERIVE específica para este tipo de ecuaciones:

$$y' = \frac{x - y^2}{2xy + y}$$

b) Hallar la solución particular que pasa por el punto (0, 1).

Solución

13.-Para las siguientes ecuaciones diferenciales, clasificarlas y resolverlas, con la función específica de DERIVE para cada tipo. Calcular también la solución particular que pasa por el punto indicado:

a) $(2xy - 4x)\,dx + dy = 0$. Punto (2, 2).

b) $(2x^3 + 3y)\,dx + (3x + y - 1)\,dy = 0$. Punto (1, 0).

c) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$. Punto (1,1).

d) $(3y - 5)\,dx + \frac{1}{x}\,dy = 0$. Punto (2, 2).

Solución

1.- Resolver la siguiente ecuación diferencial:
(2x + y -4) dx + (5y -1) dy=0

Solución:

#2: DSOLVE1(2·x + y − 4, 5·y − 1, x, y, c)

#3: inapplicable

#4: SOLVE([2·x + y − 4 = 0, 5·y − 1 = 0], [x, y])

#5: $\left[x = \frac{19}{10} \wedge y = \frac{1}{5}\right]$

Efectuamos el cambio de variable: u=x−19/10, v=y−1/5

#6: $2\cdot\left(u + \frac{19}{10}\right) + \left(v + \frac{1}{5}\right) - 4$

#7: $2\cdot u + v$

#8: $5\cdot\left(v + \frac{1}{5}\right) - 1$

#9: $5\cdot v$

La nueva ecuación a resolver es:

#11: $(2\cdot u + v)\cdot d\cdot u + (5\cdot v)\cdot d\cdot v = 0$

que es homogénea:

#13: $\mathrm{HOMOGENEOUS\_GEN}\left(-\frac{2\cdot u + v}{5\cdot v}, u, v, c\right)$

#14: $$\frac{\sqrt{39}\cdot \mathrm{ATAN}\left(\frac{\sqrt{39}\cdot(u + 10\cdot v)}{39\cdot u}\right)}{39} + \frac{\mathrm{LN}\left(\frac{u^2}{2\cdot u^2 + u\cdot v + 5\cdot v^2}\right)}{2} = \mathrm{LN}(u) + c$$

Deshacemos el cambio de variable y queda:

#15: $$\frac{\sqrt{39}\cdot \mathrm{ATAN}\left(\frac{\sqrt{39}\cdot\left(\left(x - \frac{19}{10}\right) + 10\cdot\left(y - \frac{1}{5}\right)\right)}{39\cdot\left(x - \frac{19}{10}\right)}\right)}{39} + \frac{\mathrm{LN}\left(\frac{\left(x - \frac{19}{10}\right)^2}{2\cdot\left(x - \frac{19}{10}\right)^2 + \left(x - \frac{19}{10}\right)\cdot\left(y - \frac{1}{5}\right) + 5\cdot\left(y - \frac{1}{5}\right)^2}\right)}{2} =$$

$$\mathbf{LN\left(x - \frac{19}{10}\right) + c}$$

2.- Obtener la solución general de la ecuación diferencial $(x-1)^2 y\,dx + x^2 (y+1)\,dy = 0$. Hallar la solución particular que pasa por el punto (1,1).

Solución:

#1: $$\text{SEPARABLE\_GEN}\left(\frac{(x-1)^2}{x^2}, -\frac{y}{y+1}, x, y, c\right)$$

#2: $$\text{LN}(y) + y = 2\cdot\text{LN}(x) - \frac{x^2 + c\cdot x - 1}{x}$$

#3: $$\text{SEPARABLE}\left(\frac{(x-1)^2}{x^2}, -\frac{y}{y+1}, x, y, 1, 1\right)$$

#4: $$\mathbf{LN(y) + y = 2\cdot LN(x) - \frac{x^2 - x - 1}{x}}$$

3.-a. Hallar la solución general de la ecuación diferencial:

(3x + y - 5)dx + (6x + 2y - l)dy = 0

b. Hallar la solución particular que pasa por el punto (1, 2).

Solución:

a) Solución general de la ecuación diferencial (3x+y-5)dx+(6x+2y-l)dy=0

#1: DSOLVE1_GEN(3·x + y − 5, 6·x + 2·y − 1, x, y, c)

#2: inapplicable

Hay que efectuar un cambio de variable antes de resolverla con DERIVE:
u = 3 x + y, y = u – 3 x, dy = du – 3 dx

(u-5)dx+(2u-l)(du-3dx)=0, (-5u-2)dx+(2u-l)du=0, u'=(5u-2)/(2u-l)
que ya es de variables separadas.

#3: $\text{SEPARABLE\_GEN}\left(1, \frac{5\cdot u - 2}{2\cdot u - 1}, x, u, c\right)$

#4: $\frac{\text{LN}(5\cdot u - 2)}{25} - \frac{2\cdot u}{5} = -x - c$

#5: $\frac{\text{LN}(15\cdot x + 5\cdot y - 2)}{25} - \frac{2\cdot(3\cdot x + y)}{5} = -x - c$

b) Solución particular que pasa por el punto (1,2) Si x=l, y=2, entonces, u=3x+y=5

#6: $\text{SEPARABLE}\left(1, \frac{5\cdot u - 2}{2\cdot u - 1}, x, u, 1, 5\right)$

#7: $\frac{\text{LN}(5\cdot u - 2)}{25} - \frac{2\cdot u}{5} = \frac{\text{LN}(23)}{25} - x - 1$

#8: $\frac{\text{LN}(15\cdot x + 5\cdot y - 2)}{25} - \frac{2\cdot(3\cdot x + y)}{5} = \frac{\text{LN}(23)}{25} - x - 1$

4.- Dada la ecuación diferencial $y^3dx - x^2 (2y + x)dy = O$. Se pide:
a) Clasificarla.
b) Resolverla utilizando la función de DERIVE adecuada.
c) Hallar la solución particular que pasa por el punto (1,3)

Solución:

a) Es una ecuación diferencial ordinaria de **primer orden homogénea**.

b)

#1: $\text{HOMOGENEOUS\_GEN}\left(\dfrac{y^3}{x^2\cdot(2\cdot y + x)}, x, y, c\right)$

#2: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4} - \dfrac{1}{2}\right)\cdot \text{LN}\left(\dfrac{x\cdot(\sqrt{2} - 1) + y}{x}\right) - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4} + \dfrac{1}{2}\right)\cdot \text{LN}\left(\dfrac{y - x\cdot(\sqrt{2} + 1)}{x}\right) + \text{LN}\left(\dfrac{y}{x}\right) = - \text{LN}(x) - c$

b)

#3: $\text{HOMOGENEOUS}\left(\dfrac{y^3}{x^2\cdot(2\cdot y + x)}, x, y, 1, 3\right)$

#4: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4} - \dfrac{1}{2}\right)\cdot \text{LN}\left(\dfrac{x\cdot(\sqrt{2} - 1) + y}{x}\right) - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4} + \dfrac{1}{2}\right)\cdot \text{LN}\left(\dfrac{y - x\cdot(\sqrt{2} + 1)}{x}\right) + \text{LN}\left(\dfrac{y}{x}\right) = - \text{LN}\left(\dfrac{x}{3}\right) - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4} + \dfrac{1}{2}\right)\cdot \text{LN}(\sqrt{2} - 1) + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4} - \dfrac{1}{2}\right)\cdot \text{LN}(\sqrt{2} + 1) - \dfrac{\text{LN}(2)}{2}$

5.- a) Clasificar y resolver la siguiente ecuación diferencial con la función de Derive específica para este tipo de ecuaciones: $(x^4 + 2x^2 + 2xy + l)dx - (1 + x^2)dy = 0$.
b) Hallar la solución particular que pasa por el pimío (2,3)

Solución:

a)

La ecuación puede escribirse en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+x^2)^2 + 2xy}{1+x^2} \Rightarrow y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$$

Que es una **ecuación lineal**

#1: $\text{LINEAR1\_GEN}\left(-\frac{2\cdot x}{1+x^2},\ 1+x^2,\ x,\ y,\ c\right)$

#2: $y = (x + c)\cdot(x^2 + 1)$

b)

#3: $\text{LINEAR1}\left(-\frac{2\cdot x}{1+x^2},\ 1+x^2,\ x,\ y,\ 2,\ 3\right)$

#4: $y = \frac{(x^2 + 1)\cdot(5\cdot x - 7)}{5}$

6.- Indicar de qué tipo es la siguiente ecuación diferencial y resolverla utilizando la función de Derive específica para este tipo de ecuaciones:

$$x dx - y\cos\left(\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$$

Solución:

Vemos que no puede tratarse de una ecuación diferencial de variables separables pues es imposible separar x e y.

Para ver si es homogénea despejamos y'.

$$x dx - y\cos\left(\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y\cos\left(\frac{y}{x}\right) - x}{x\cos\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{y}{x} - \frac{1}{\cos\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Sustituyendo x por xt e y por yt, obtenemos

$$y' = \frac{ty}{tx} - \frac{1}{\cos\left(\frac{ty}{tx}\right)} = \frac{y}{x} - \frac{1}{\cos\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Se trata de una **ecuación homogénea**

#1: $\text{HOMOGENEOUS\_GEN}\left(\dfrac{y\cdot\text{COS}\left(\dfrac{y}{x}\right) - x}{x\cdot\text{COS}\left(\dfrac{y}{x}\right)}, x, y, c\right)$

#2: $\text{SIN}\left(\dfrac{y}{x}\right) = -\text{LN}(x) - c$

7.-. Hallar la solución general de la ecuación diferencial:
(3x - y - l)dx + (5x - y- 3)dy = 0

Solución:

#1: DSOLVE1_GEN(3·x − y − 1, 5·x − y − 3, x, y, c)

#2: inapplicable

#3: SOLVE([3·x − y − 1, 5·x − y − 3], [x, y])

#4: [x = 1 ∧ y = 2]

Realizamos el cambio:

u=x-1 con du=dx
v=y-2 con dv=dy

$$(3x-y-1)dx+(5x-y-3)dy=0\Rightarrow(3(u+1)-(v+2)-1)du\ +(5(u+1)-(v+2)-3)dv=0$$

$$(3u-v)du\ +(5u-v)dv=0\Rightarrow v'=-\frac{3u-v}{5u-v}$$

#5: $\mathrm{HOMOGENEOUS\_GEN}\left(-\frac{3\cdot u-v}{5\cdot u-v},\ u,\ v,\ c\right)$

#6: $\left(\frac{3\cdot\sqrt{7}}{14}+\frac{1}{2}\right)\cdot \mathrm{LN}\left(\frac{u\cdot(\sqrt{7}-2)+v}{u}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{3\cdot\sqrt{7}}{14}\right)\cdot \mathrm{LN}\left(\frac{v-u\cdot(\sqrt{7}+2)}{u}\right)=-\mathrm{LN}(u)-c$

#7: $\left(\frac{3\cdot\sqrt{7}}{14}+\frac{1}{2}\right)\cdot \mathrm{LN}\left(\frac{x\cdot(\sqrt{7}-2)+y-\sqrt{7}}{x-1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{3\cdot\sqrt{7}}{14}\right)\cdot \mathrm{LN}\left(\frac{x\cdot(\sqrt{7}+2)-y-\sqrt{7}}{1-x}\right)=-\mathrm{LN}(x-1)-c$

8.- Resolver la ecuación diferencial $2xy\ln y dx+\left(x^2+y^2\sqrt{y^2+1}\right)dy=0$

Solución:

La ecuación **M(x,y)dx+N(x,y)dy=0** se llama ecuación diferencial exacta o ecuación en diferenciales totales si M(x,y) y N(x,y) son funciones continuas y derivables que verifican:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{y}}=\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{x}} \text{ siendo } \frac{\partial M}{\partial y},\frac{\partial N}{\partial x} \text{ continuas en un cierto dominio.}$$

- En nuestro caso, $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{y}}=2x(\ln y+1)\neq 2x=\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{x}}$ no es diferencial exacta, sin embargo mediante un factor integrante μ se transforma en**:** μMdx+μNdy=0 diferencial exacta.

Para

$$\mu(y)=\frac{1}{y}\Rightarrow 2x\ln y dx+\frac{x^2+y^2\sqrt{y^2+1}}{y}dy=0$$

Aplicando la solución general $\boxed{\int \mu M dx+\int\left[\mu N-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int \mu M dx\right)\right]dy=C}$

Obtenemos $\int \mu M dx=\int 2x\ln y dx = x^2\ln y$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int \mu M dx\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2\ln y\right)=\frac{x^2}{y}$$

$$\int\left[\mu N-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int \mu M dx\right)\right]dy=\int\left(\frac{x^2+y^2\sqrt{y^2+1}}{y}-\frac{x^2}{y}\right)dy=\int y\sqrt{y^2+1}dy=\frac{1}{3}\left(y^2+1\right)^{3/2}$$

Resulta

$$\boxed{x^2\ln y+\frac{1}{3}\left(y^2+1\right)^{3/2}=C}$$

9.- Resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y\cos x + \text{sen}(2x)$

Solución:

Se trata de una ecuación lineal no homogénea $\mathbf{\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)}$ siendo p(x) = -cosx; q(x)=sen(2x)

Haciendo y=u(x)v(x) en la ecuación dada:

$y' = u'v + uv' = uv\cos x + \text{sen}(2x) \Rightarrow u'v + u\left(v' - v\cos x\right) = \text{sen}2x$

Resolvemos $\left(v' - v\cos x\right) = 0 \Rightarrow \frac{v'}{v} = \cos x \Rightarrow v = e^{\text{sen}x}$ y sustituyendo en la anterior

$u'e^{\text{sen}x} = \text{sen}2x \Rightarrow u = \int \text{sen}(2x)e^{-\text{sen}x}dx + C = -e^{-\text{sen}x}(2\text{sen}x + 2) + C$ que junto con v se obtiene

$$y = uv = -(2\text{sen}x + 2) + Ce^{\text{sen}x}$$

10.- Resolver la ecuación diferencial $(x^3+y^4)dx+8xy^3dy=0.$

Solución:

Consideramos

$$P(x,y)=x^3+y^4 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=4y^3$$

$$Q(x,y)=8xy^3 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=8y^3$$

Utilizamos un factor integrante

$$\frac{\partial \mu}{\partial x}/\mu=\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\frac{4y^3-8y^3}{8xy^3}=-\frac{1}{2x}\Rightarrow \ln\mu=-\frac{1}{2}\ln x \Rightarrow \mu=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Obtenemos la ecuación diferencial exacta

$$\frac{x^3+y^4}{\sqrt{x}}dx+\frac{8xy^3}{\sqrt{x}}dy=0$$

Resolvemos $F(x,y)=\int\frac{8xy^3}{\sqrt{x}}dy+h(y)=\frac{2xy^4}{\sqrt{x}}+h(y)=2\sqrt{x}y^4+h(y)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2y^4\frac{1}{2\sqrt{x}}+h'(x)=\frac{x^3+y^4}{\sqrt{x}}\Rightarrow h'(x)=x^{5/2}\Rightarrow h(x)=\frac{2}{7}x^{7/2}$$

Por último, $F(x,y)=2\sqrt{x}y^4+h(y)=\boxed{2\sqrt{x}y^4+\frac{2}{7}x^{7/2}=C}$

11.- Esta nevando con regularidad a las 12 sale una máquina quitanieves que recorre en la 1ªhora 2 km y en la segunda 1 km. ¿A qué hora empezó a nevar?
(Se admitirá como hipótesis que la cantidad de nieve quitada por la máquina en la unidad de tiempo es uniforme, de modo que su velocidad de avance resulta inversamente proporcional a la altura de la nieve encontrada)

Solución:

Consideramos que la $v=K_1/h$, siendo h la altura de la nieve y $v=\frac{ds}{dt}$ la velocidad. Si llamamos t_0 el instante en que empezó a nevar la altura de la nieves quedará $h=k_2(t-t_0)$, luego

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{k_1}{h}=\frac{k_1}{k_2\left(t-t_0\right)}=\frac{k}{t-t_0}\Rightarrow ds=\frac{k}{t-t_0}dt\Rightarrow \boxed{s=k\ln\left|t-t_0\right|+C}$$

Teniendo en cuenta las soluciones particulares del enunciado.

$$\left.\begin{array}{l} t=12; s=0\Rightarrow k\ln\left|12-t_0\right|+C=0 \\ t=12+1; s=2\Rightarrow k\ln\left|13-t_0\right|+C=2 \\ t=12+2; s=2+1\Rightarrow k\ln\left|14-t_0\right|+C=3 \end{array}\right\}$$

Haciendo el cambio $T=12-t_0$

$$\left.\begin{array}{l} k\ln|T|+C=0 \\ k\ln|T+1|+C=2 \\ k\ln|T+2|+C=3 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} k\left(\ln|T+1|-\ln|T|\right)=2 \\ k\left(\ln|T+2|-\ln|T|\right)=3 \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{\ln\left|\frac{T+1}{T}\right|}{\ln\left|\frac{T+2}{T}\right|}=\frac{2}{3}\Rightarrow\left(\frac{T+1}{T}\right)^3=\left(\frac{T+2}{T}\right)^2\Rightarrow$$

Y simplificando

$$\left(T+1\right)^3=T\left(T+2\right)^2\Rightarrow T^3+3T^2+3T+1=T^3+4T^2+2T\Rightarrow T^2-T-1=0\Rightarrow T=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Deshaciendo el cambio nos quedamos con

$$t_0=12-T=12-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 12-0.6180339887\approx 11.38196601$$

Empezó a nevar a las **11h 22m 55s**

12.- a) Clasificar y resolver la siguiente ecuación diferencial con la función de DERIVE específica para este tipo de ecuaciones: $y' = \dfrac{x - y^2}{2xy + y}$

b) Hallar la solución particular que pasa por el punto (0, 1).

Solución

a) La ecuación puede escribirse en la forma:

$$\left(x - y^2\right)dx - \left(2xy + y\right)dy = 0$$

Es una **ecuación diferencial exacta** pues:

$$\frac{\partial\left(x - y^2\right)}{\partial y} = -2y = \frac{\partial\left[-\left(2xy + y\right)\right]}{\partial x}$$

#1: EXACT_GEN(x − y , − 2·x·y − y, x, y, c)

#2: $$\frac{x^2}{2} - x\cdot y^2 - \frac{y^2}{2} = c$$

b) Solución particular que pasa por (0, 1)

#3: $\mathrm{EXACT}(x - y^2, - 2\cdot x\cdot y - y, x, y, 0, 1)$

#4: $$\frac{x^2}{2} - x\cdot y^2 - \frac{y^2 - 1}{2} = 0$$

13.-Para las siguientes ecuaciones diferenciales, clasificarlas y resolverlas, con la función específica de DERIVE para cada tipo. Calcular también la solución particular que pasa por el punto indicado:

a) $(2xy - 4x)\,dx + dy = 0$. Punto (2, 2).

b) $(2x^3 + 3y)\,dx + (3x + y - 1)\,dy = 0$. Punto (1, 0).

c) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$. Punto (1,1).

d) $(3y - 5)\,dx + \frac{1}{x}\,dy = 0$. Punto (2, 2).

Solución

a) Es una ecuación **diferencial lineal** pues puede escribirse en la forma:

$$y' + 2\,x\,y = 4\,x$$

```
#1:  LINEAR1_GEN(2·x, 4·x, x, y, c)
```

#2: $y = c\cdot e^{-x^2} + 2$

Solución particular:

```
#3:  LINEAR1(2·x, 4·x, x, y, 2, 2)
```

#4: $y = 2$

b) Es una **ecuación diferencial exacta** pues:

$$\frac{\partial\left(2x^3 + 3y\right)}{\partial y} = 3 = \frac{\partial\left(3x + y - 1\right)}{\partial x}$$

#4: $\text{EXACT\_GEN}(2\cdot x^3 + 3\cdot y,\ 3\cdot x + y - 1,\ x,\ y,\ c)$

#5: $\frac{x^4}{2} + 3\cdot x\cdot y + \frac{y^2}{2} - y = c$

#6: $\text{EXACT}(2\cdot x^3 + 3\cdot y,\ 3\cdot x + y - 1,\ x,\ y,\ 1,\ 0)$

#7: $\frac{x^4}{2} + 3\cdot x\cdot y + \frac{y^2}{2} - y = \frac{1}{2}$

c) Es una **ecuación diferencial homogénea** pues está escrita en la forma y' = r(x, y), siendo r(x, y) una función homogénea de grado 0. También porque puede escribirse como $\left(x^2 + y^2\right)dx - xydy = 0$, siendo los coeficientes de dx y de dy polinomios homogéneos del mismo grado.

#1: $\text{HOMOGENEOUS\_GEN}\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}, x, y, c\right)$

#2: $$\frac{y^2}{x^2} = 2\cdot \text{LN}(x) + 2\cdot c$$

#3: $\text{HOMOGENEOUS\_GEN}\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}, x, y, 1, 1\right)$

#4: $$\frac{y^2}{x^2} = 2\cdot \text{LN}(x) + 2$$

d) Es una **ecuación diferencial lineal** pues puede escribirse en la forma y'+ p(x) y = q(x), concretamente, y'+ 3xy = 5x

#5: LINEAR1_GEN(3·x, 5·x, x, y, c)

#6: $$y = c\cdot e^{-3\cdot x^2/2} + \frac{5}{3}$$

#7: LINEAR1(3·x, 5·x, x, y, 2, 3)

#8: $$y = \frac{4\cdot e^{6 - 3\cdot x^2/2}}{3} + \frac{5}{3}$$

Ecuación diferencial

Es toda ecuación que incluya una función, que es la incógnita, y alguna de sus derivadas o diferenciales.

♦Las ecuaciones diferenciales se clasifican según su:

- tipo: ***Ordinarias*** si la función incógnita es de una sola variable independiente.

  En derivadas parciales si la función incógnita depende de dos o más
- orden: ***El de la derivada de mayor orden*** que aparece en la ecuación.

Ecuación diferencial ordinaria de primer orden

Es una ecuación de la forma **F(x,y,y')=0**.

A veces la ecuación anterior se puede expresar en la forma **y'=G(x,y)**, diremos que la ecuación diferencial viene expresada en forma ***normal.***

Ecuación de Bernouilli

Es toda ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$ donde $n \neq 0,1$, ya que en dichos casos sería lineal

Ecuación lineal

Se llama **ecuación lineal** a una ecuación de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b,$$

donde los coeficientes $a_1, a_2, ..., a_n$, así como el término independiente b, son escalares de un cuerpo conmutativo K, y $x_1, x_2, ..., x_n$ son las incógnitas.

Ecuaciones diferenciales exactas

La ecuación **M(x,y)dx+N(x,y)dy=0** se llama **ecuación diferencial exacta** o ecuación en diferenciales totales si M(x,y) y N(x,y) son funciones continuas y derivables que verifican:

$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{x}}$ siendo $\frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x}$ continuas en un cierto dominio.

Ecuaciones lineales de primer orden

Se llama **ecuación diferencial lineal de primer orden** a la que es lineal respecto de la función incógnita y su derivada. Es de la forma: $\mathbf{\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)}$

1. Si q(x)=0 la ecuación se denomina ***lineal homogénea*** y es de variables separables; entonces: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$

2. Si q(x)≠0 la ecuación se denomina ***lineal no homogénea***.

Ecuaciones con variables separadas y ecuaciones reducibles a ellas

- Toda ecuación de la forma **f(y)dy=g(x)dx** se llama ecuación de ***variables separadas***. La solución general es de la forma $\boxed{\int f(y)dy - \int g(x)dx = C}$
- Las ecuaciones de la forma **f(y)h(x)dy=g(x)m(y)dx** donde los coeficientes de las diferenciales se descomponen en factores que dependen solo de x , o solo de y, se llaman ecuaciones con ***variables separables***.

Dividiendo por h(x)m(y) la anterior ecuación, se obtiene una de variables separadas: $\frac{f(y)}{m(y)}dy = \frac{g(x)}{h(x)}dx \Rightarrow \boxed{\int \frac{f(y)}{m(y)}dy = \int \frac{g(x)}{h(x)}dx}$

Observación. La división por h(x)m(y) puede dar lugar a que se pierdan las soluciones particulares que anulan el producto h(x) m(y).

Ecuaciones homogéneas

Toda ecuación diferencial que pueda escribirse de la forma $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \mathbf{F}\left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}\right)$ se dice que es ***homogénea***. También puede venir dada en la forma **P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0** siendo P(x,y), Q(x,y) funciones homogéneas del mismo grado.