EXAMEN FMT2 - 26.01.01. SOLUCIONES

PROBLEMA 1.

	SI	NO	
1	X		Sea X un conjunto y d_d la distancia discreta. Entonces (X, d_d) es un espacio métrico completo.
2		X	La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n+2}$ es convergente.
3		X	Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son diferenciables, entonces $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
4	X		Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in A, \lvert f(x) \rvert < 1$. Entonces, $\sum_{n=0}^{\infty} (f(x))^n = \frac{1}{1-f(x)}$.
5		X	En $(\mathbb{R}, d_u)$ la unión finita de conjuntos conexos es un conexo.
6		X	Sean $(X, d), (X', d')$ espacios métricos y $f : X \to X'$ continua. Entonces, si $A \subset X'$ es abierto, entonces $f(f^{-1}(A))$ es cerrado.
7	X		Si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, entonces f es continua en a.
8	X		$(1)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{2k\pi}{n} i\right), k = 0, \ldots, n-1$.
9	X		Entre $(-1, 1)$ y $\mathbb{R}$ existe una biyección.
10	X		Si $y_n = (-1)^n n, n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n} = e$.
11	X		El conjunto de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x-1)^n$ es $C = \{1\}$.
12		X	Si $\lim_{n \to \infty} f(n) = a$, entonces $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$.
13		X	La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $(0, 1)$.
14	X		Sean $A \subset \mathbb{R}^2$, A abierto y no vacio, y $f : A \to \mathbb{R}$. Si $f \in C^2(A)$, entonces $\forall a \in A$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$.
15	X		Sea $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^{-1}$. Entonces, f es continua en su dominio.
16	X		Sea $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, y $s = \sup A$. Entonces, $\forall \delta > 0, \exists a \in A \mid s - \delta < a \leq s$.
17		X	La ecuación $ax = b$, donde $a, b, x \in \mathbb{Z}$, tiene solución única.
18	X		Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$. Entonces, existe $f'(0)$.
19		X	Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ diferenciable en A. Si $\forall x \in A\ f'(x) = 0$, entonces $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in A\ f(x) = k$.
20	X		Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y el sistema de ecuaciones $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ no tiene solución, entonces f no tiene extremos.

PROBLEMA 2

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$.

a) (4 puntos) Encontrar los valores máximos y mínimos de f en el conjunto $A = \{(x,y) \mid |x| \le 1, |y| \le 1\}$.

b) (3 puntos) Siendo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

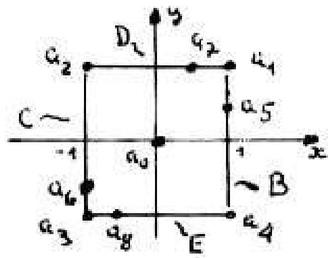
$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x,y) + xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

estudiar la continuidad y la existencia de derivadas parciales de g en $\mathbb{R}^2$.

c) (1 punto) Comprobar que $x\dfrac{\partial g}{\partial x} + y\dfrac{\partial g}{\partial y} = +g$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$.

d) (2 puntos) Calcular grad $(g^2 - f)$ para $(x,y) \neq (0,0)$ y la derivada direccional de $g^2 - f$ en $(1,1)$ en la dirección de $h = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

a) PUESTO QUE A ES UN COMPACTO Y f ES CONTINUA EN A, LA FUNCIÓN ALCANZA VALORES MÁXIMO Y MÍNIMO EN A, QUE PUEDEN ALCANZARSE EN PUNTOS INTERIORES DE A O EN PUNTOS DE FRONTERA DE A. COMO $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, EN EL INTERIOR DE A (QUE ES ABIERTO) ESTO PUEDE OCURRIR SÓLO EN PUNTOS ESTACIONARIOS DE f. SIENDO $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y$ Y $\frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y$, ESTÁ CLARO QUE EN EL INTERIOR DE A HAY UN ÚNICO PUNTO ESTACIONARIO $a_0 = (0,0)$ DE f. LA FRONTERA DE A CONSTA DE LOS PUNTOS $a_1 = (1,1)$, $a_2 = (-1,1)$, $a_3 = (-1,-1)$, $a_4 = (1,-1)$ Y DE LOS CONJUNTOS $B = \{x = 1, -1 < y < 1\}$, $C = \{x = -1, -1 < y < 1\}$, $D = \{y = 1, -1 < x < 1\}$ Y $E = \{y = -1, -1 < x < 1\}$. EN B LA FUNCIÓN f SE REDUCE A $f(1,y) = 1 - y + y^2 = \varphi(y)$, $-1 < y < 1$; COMO φ ES DIFERENCIABLE, $-1 < y < 1$ ES ABIERTO EN $\mathbb{R}$ Y $\varphi'(y) = -1 + 2y$, φ PUEDE ALCANZAR EXTREMO, ÚNICAMENTE EN EL PUNTO $y = \frac{1}{2}$ Y $f|_B$ EN $a_5 = (1, \frac{1}{2})$. TENIENDO EN CUENTA QUE $f(-x,-y) = f(x,y)$ Y $f(y,x) = f(x,y)$, ES FÁCIL VER QUE $f|_C$ ALCANZA EXTREMO EN $a_6 = (-1, -\frac{1}{2})$, QUE $f|_D$ ALCANZA EXTREMO EN $a_7 = (\frac{1}{2}, 1)$ Y QUE $f|_E$ ALCANZA EXTREMO EN $a_8 = (-\frac{1}{2}, -1)$. LUEGO, LOS VALORES MÁXIMO Y MÍNIMO DE $f|_A$ PUEDEN ESTAR SÓLO EN UNO DE LOS 9 PUNTOS $a_0, \dots, a_8$ Y, COMO $f(a_0) = 0$, $f(a_1) = f(a_3) = 1$, $f(a_2) = f(a_4) = 3$, $f(a_5) = f(a_7) = f(a_6) = f(a_8) = \frac{3}{4}$, ESTÁ CLARO QUE EN A LA FUNCIÓN f ALCANZA MÍNIMO ABSOLUTO IGUAL A 0 EN EL PUNTO $a_0 = (0,0)$ Y MÁXIMO ABSOLUTO IGUAL A 3 EN LOS PUNTOS $a_2 = (-1,1)$ Y $a_4 = (1,-1)$.



b) ES FÁCIL VER QUE $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ PARA TODO $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, DE DONDE RESULTA QUE g ES CONTINUA EN $\mathbb{R}$ Y QUE SUS DERIVADAS PARCIALES EXISTEN SÓLO EN $\mathbb{R}^2 - \{0\}$

c) SI $(x,y) \neq (0,0)$, SE TIENE $x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} = x\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + y\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} = g(x,y)$

d) COMO $g^2(x,y) - f(x,y) = xy$, SE TIENE $\text{grad}(g^2-f)(x,y) = (y,x)$ Y, POR LO TANTO,

$$D_h(g^2-f)(1,1) = \text{grad}(g^2-f)(1,1) \cdot h = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

PROBLEMA 3

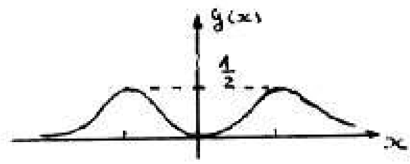
Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \dfrac{x^2}{1+x^4}$.

a) (4 puntos) Comprobar que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $g(a) < 1$ y $g(x) \le g(a)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) (3 puntos) Estudiar la covergencia puntual y uniforme de la sucesión funcional (f_n), siendo $f_n = (g(x))^n$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

c) (3 puntos) Estudiar la compacidad, conexión y completitud del conjunto $g(A)$, donde $A = (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$.

a) $g'(x) = \dfrac{2x(1-x^4)}{(1+x^4)^2}$. COMO $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ Y $\mathbb{R}$ ES ABIERTO, g PUEDE TENER EXTREMOS ÚNICAMENTE EN LOS PUNTOS ESTACIONARIOS, O SEA, EN LOS PUNTOS $x=-1$, $x=0$ Y $x=1$, SIENDO $g(-1)=g(1)=\frac{1}{2}$ Y $g(0)=0$.



PUESTO QUE $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) \ge 0$ Y $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, ESTÁ CLARO QUE g ALCANZA MÁXIMO ABSOLUTO IGUAL A $\frac{1}{2}$ EN $x=-1$ Y $x=1$.

POR LO TANTO, EXISTE, POR EJEMPLO, $a=1$ TAL QUE $g(a)=\frac{1}{2}<1$ Y $g(x) \le g(a)$ PARA TODO $x \in \mathbb{R}$.

b) PUESTO QUE $0 \le \dfrac{x^2}{1+x^4} < 1$ PARA TODO $x \in \mathbb{R}$, ESTÁ CLARO QUE LA SUCESIÓN FUNCIONAL (f_n) TAL QUE $f_n(x) = \left(\dfrac{x^2}{1+x^4}\right)^n$ CONVERGE PUNTUALMENTE A LA FUNCIÓN $f(x)=0$. ADEMÁS, ES EVIDENTE QUE $M_n = \sup\limits_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, DE MODO QUE $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$; CONSECUENTEMENTE, LA SUCESIÓN (f_n) CONVERGE UNIFORMEMENTE EN $\mathbb{R}$ A LA FUNCIÓN NULA f.

c) DE LO VISTO EN a) SE DEDUCE QUE $g(A) = (0,\frac{1}{2}]$. LUEGO, $g(A)$ NO ES COMPACTO (PORQUE NO ES CERRADO), ES CONEXO (PORQUE ES UN INTERVALO) Y NO ES COMPLETO (PORQUE NO ES CERRADO).