FmT2 - SEP'0L - 1/3

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS II

Problema 1

Apellidos .... *Nombre* ....

DNI .... *Grupo* .... *Tiempo 50 minutos*

MUY IMPORTANTE: Marque con una cruz la opción deseada. **Acierto +1 Error -1 Blanco 0**

	SI	NO	
1		X	Si $A \cup B$ y $A \cap B$ son conexos, entonces A y B también son conexos.
2	X		Dadas las sucesiones $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ y $z_n = x_n + y_n$, se verifica que $\underline{\lim}\, z_n = \underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n$.
3		X	Si $x, y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, entonces $x + y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
4		X	Si $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x < 2\}$, entonces $\sup A = 2$.
5		X	Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = y$ si $0 < x$ y $f(x,y) = -y$ si $x \leq 0$. Entonces, $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
6	X		$\lim \left(\frac{2n^2-3}{2n^2+1}\right)^{n^2} = e^{-2}$.
7	X		En un espacio normado E se verifica $B_r(x) = \{x\} + B_r(0)$, para cualesquiera $x \in E$ y $r \in \mathbb{R}^+$.
8		X	Si $\lim a_n = \lim b_n = 0$, entonces las series reales $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ tienen el mismo radio de convergencia.
9		X	Para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene $\cosh x = \pm\sqrt{\operatorname{senh}^2 x + 1}$.
10	X		El rectángulo de área máxima entre los rectángulos de un mismo perímetro es un cuadrado.
11	X		En un espacio métrico (X,d), para cualesquiera puntos distintos $x, y \in X$, existen entornos V_x, V_y tales que $V_x \cap V_y = \emptyset$.
12	X		La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n(n+1)}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$.
13		X	Sea $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ abierto y $a \in A$. Si existen todas las derivadas parciales de f en a, entonces f es continua en a.
14		X	Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y derivable en (a,b). Entonces, existe un único $c \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.
15	X		La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2-3}{2n^2+1}\right)^{n^2}$ es divergente.
16	X		Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y,z) = z^2 - \cos xy$. Entonces la derivada direccional de f en el punto $\left(\pi, 1, \frac{1}{2}\right)$ es máxima en la dirección $(0,0,1)$.
17	X		En $\mathbb{R}$, todo conjunto compacto formado exclusivamente por puntos aislados tiene que ser finito.
18	X		Si entre los términos de las sucesiones reales convergentes (a_n) y (b_n) hay infinitos términos coincidentes, entonces $\lim a_n = \lim b_n$.
19		X	Si $z \in \mathbb{C}$ y $Re\frac{1}{z} = 0$, entonces $z \in \mathbb{R}$.
20	X		El conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ es completo.

Problema 2

Se considera la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, donde $f_n(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$.

a) (3 puntos) Determínese su campo de convergencia C.

b) (2 puntos) Calcúlese su suma $S(x)$ y su resto n-ésimo $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ en C.

c) (1 punto) ¿Es cierto que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ converge uniformemente en } A \subset \mathbb{R}\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{n\to\infty} M_n = 0\right),$$

donde $M_n = \sup_{x\in A} R_n(x)$?

d) (4 puntos) Estúdiese la convergencia uniforme de la serie en los conjuntos C, $C - \{0\}$ y $C - [-a, a]$ con $a > 0$.

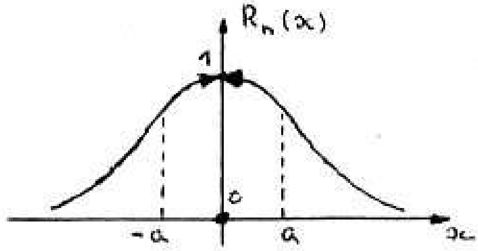
a) SI $x = 0$, LA SERIE CONVERGE (TODOS SUS TÉRMINOS SE ANULAN). SI $x \neq 0$, SE TRATA DE UNA SERIE GEOMÉTRICA DE PRIMER TÉRMINO $a_0 = x^2$ Y DE RAZON $q = \frac{1}{1+x^2}$; COMO $|q| = q < 1$, HAY CONVERGENCIA. LUEGO, EL CAMPO DE CONVERGENCIA ES $C = \mathbb{R}$.

b) SEGÚN LO ANTERIOR, PARA $x \in C$ SE TIENE

$$S(x) = \begin{cases} 0, & \text{SI } x = 0; \\ \dfrac{a_0}{1-q} = 1 + x^2, & \text{SI } x \neq 0. \end{cases}$$

SI $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, SE TIENE $R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^k}$. SI $x = 0$, OBVIAMENTE $R_n(x) = 0$ Y, SI $x \neq 0$, SE TRATA DE UNA SERIE GEOMÉTRICA DE PRIMER TÉRMINO $b_0 = \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}$ Y DE RAZON q TAL QUE $|q| < 1$. LUEGO,

$$R_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{SI } x \quad 0; \\ \dfrac{b_0}{1-q} = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}, & \text{SI } x \neq 0. \end{cases}$$



c) SI.

d) EN C Y EN $C - \{0\}$ SE TIENE $M_n = 1 \not\to 0$, CUANDO $n \to \infty$ Y, POR LO TANTO, NO HAY CONVERGENCIA UNIFORME EN C NI EN $C - \{0\}$. EN CAMBIO, EN $C - [-a, a]$ CON $0 < a$ SE TIENE $M_n = \frac{1}{(1+a^2)^n} \to 0$ SI $n \to \infty$, DE MODO QUE HAY CONVERGENCIA UNIFORME EN $C - [-a, a]$ CUALQUIERA QUE SEA $a > 0$.

Problema 3

Dado el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = x^2 + y^2$ si $(x,y) \in A$ y $f(x,y) = 1$ si $(x,y) \notin A$.

a) (3 puntos) Estúdiese la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.

b) (4 puntos) Calcúlense, si existen, las derivadas parciales de f en $\mathbb{R}^2$.

c) (2 puntos) Hállese el conjunto D de puntos en los que f es diferenciable.

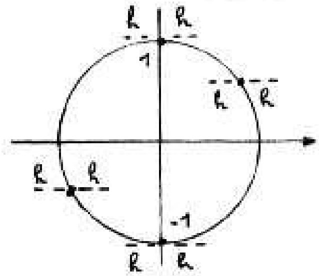
d) (1 punto) Si $(a,b) \in D$, calcúlese la diferencial de f en (a,b).

a) CLARAMENTE f ES CONTINUA EN A (SUMA DE FUNCIONES CONTINUAS) Y EN $\mathrm{Ext}\,A$ (FUNCIÓN CONSTANTE). TAMBIEN HAY CONTINUIDAD EN $\mathrm{Fr}\,A$, PUESTO QUE SI $(a,b) \in \mathrm{Fr}\,A$ Y $\mathring{U}$ ES UN ENTORNO PERFORADO DE (a,b), ENTONCES $f(a,b) = 1$ Y $\displaystyle\lim_{\mathring{U} \ni (x,y) \to (a,b)} f(x,y) = 1 = f(a,b)$. LUEGO, f ES CONTINUA EN TODO $\mathbb{R}^2$.

b) SI $(x,y) \in A$, ENTONCES $f(x,y) = x^2 + y^2$, DE MODO QUE $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$ Y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$. SI $(x,y) \in \mathrm{Ext}\,A$, ENTONCES $f(x,y) = 1$ Y $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

SI $(x,y) \in \mathrm{Fr}\,A$, DEBE APLICARSE LA DEFINICIÓN. COMO $f(x,y) = 1$, SE TIENE

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - 1}{h}.$$



SI $x = 0$, ENTONCES $(x,y) \in \mathrm{Fr}\,A \Longrightarrow y = \pm 1$; $f(x+h,y) = f(h,\pm 1) = 1$ Y $\frac{\partial f}{\partial x}(0,\pm 1) = \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{h} = 0$. SI $x \neq 0$, ENTONCES, TOMANDO h DE MODO QUE $(x+h,y) \in \mathrm{Ext}\,A$, SE TIENE $f(x+h,y) = 1$ Y $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - 1}{h} = 0$, PERO ESCOGIENDO h DE MODO QUE $(x+h,y) \in A$, SE TIENE $f(x+h,y) = (x+h)^2 + y^2 = (x^2+y^2) + 2xh + h^2 = 1 + 2xh + h^2$ (YA QUE AHORA $(x,y) \in \mathrm{Fr}\,A \Longrightarrow x^2 + y^2 = 1$) Y, POR ESO, $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-1}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x \neq 0$, O SEA, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ NO EXISTE CUANDO $(x,y) \in \mathrm{Fr}\,A$ Y $x \neq 0$. RESUMIENDO Y APLICANDO RAZONAMIENTOS SEMEJANTES, RESULTA

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x, & \text{SI } (x,y) \in A, \\ 0, & \text{SI } (x,y) \in \mathrm{Ext}\,A, \\ 0, & \text{SI } (x,y) = (0,\pm 1) \in \mathrm{Fr}\,A, \\ \nexists, & \text{SI } (x,y) \in \mathrm{Fr}\,A \text{ Y } (x,y) \neq (0,\pm 1); \end{cases} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y, & \text{SI } (x,y) \in A, \\ 0, & \text{SI } (x,y) \in \mathrm{Ext}\,A, \\ 0, & \text{SI } (x,y) = (\pm 1, 0) \in \mathrm{Fr}\,A, \\ \nexists, & \text{SI } (x,y) \in \mathrm{Fr}\,A \text{ Y } (x,y) \neq (\pm 1, 0). \end{cases}$$

c) SEGÚN LO ANTERIOR, f TIENE DERIVADAS PARCIALES CONTINUAS EN $\mathbb{R}^2 - \mathrm{Fr}\,A$, MIENTRAS QUE EN LOS PUNTOS DE $\mathrm{Fr}\,A$ NO EXISTE AL MENOS UNA DE LAS DERIVADAS PARCIALES. LUEGO, EL CONJUNTO DE LOS PUNTOS EN LOS QUE f ES DIFERENCIABLE ES $D = \mathbb{R}^2 - \mathrm{Fr}\,A = A \cup \mathrm{Ext}\,A$.

d) SI $(a,b) \in D$, ENTONCES O BIEN $(a,b) \in A$, EN CUYO CASO

$$df(a,b) = (2a \;\; 2b),$$

O BIEN $(a,b) \in \mathrm{Ext}\,A$, EN CUYO CASO

$$df(a,b) = (0 \;\; 0).$$