

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS II

Problema 1

Apellidos Nombre

DNI Grupo Tiempo 50 minutos

MUY IMPORTANTE: Marque con una cruz la opción deseada. Acierto +1 Error -1 Blanco 0

SI NO

- 1 Si $A \cup B$ y $A \cap B$ son conexos, entonces A y B también son conexos.
- 2 Dadas las sucesiones $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$ y $z_n = x_n + y_n$, se verifica que $\lim z_n = \lim x_n + \lim y_n$.
- 3 Si $x, y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, entonces $x + y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
- 4 Si $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x < 2\}$, entonces $\sup A = 2$.
- 5 Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = y$ si $0 < x$ y $f(x, y) = -y$ si $x \leq 0$. Entonces, $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$; para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- 6 $\lim \left(\frac{2n^2 - 3}{2n^2 + 1} \right)^{n^2} = e^{-2}$.
- 7 En un espacio normado E se verifica $B_r(x) = \{x\} + B_r(0)$, para cualesquiera $x \in E$ y $r \in \mathbb{R}^+$.
- 8 Si $\lim a_n = \lim b_n = 0$, entonces las series reales $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ tienen el mismo radio de convergencia.
- 9 Para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene $\cosh x = \pm \sqrt{\sinh^2 x + 1}$.
- 10 El rectángulo de área máxima entre los rectángulos de un mismo perímetro es un cuadrado.
- 11 En un espacio métrico (X, d) , para cualesquiera puntos distintos $x, y \in X$, existen entornos V_x, V_y tales que $V_x \cap V_y = \emptyset$.
- 12 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{senn} x}{n(n+1)}$ converge uniformemente en \mathbb{R} .
- 13 Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) abierto y $a \in A$. Si existen todas las derivadas parciales de f en a , entonces f es continua en a .
- 14 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y derivable en (a, b) . Entonces, existe un único $c \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.
- 15 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 - 3}{2n^2 + 1} \right)^{n^2}$ es divergente.
- 16 Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z) = z^2 - \cos xy$. Entonces la derivada direccional de f en el punto $(\pi, 1, \frac{1}{2})$ es máxima en la dirección $(0, 0, 1)$.
- 17 En \mathbb{R} , todo conjunto compacto formado exclusivamente por puntos aislados tiene que ser finito.
- 18 Si entre los términos de las sucesiones reales convergentes (a_n) y (b_n) hay infinitos términos coincidentes...



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Se considera la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, donde $f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$.

- a) (3 puntos) Determinese su campo de convergencia C .
- b) (2 puntos) Calcúlese su suma $S(x)$ y su resto n -ésimo $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ en C .
- c) (1 punto) ¿Es cierto que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ converge uniformemente en } A \subset \mathbb{R} \right) \Leftrightarrow \left(\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0 \right),$$

donde $M_n = \sup_{x \in A} R_n(x)$?

- d) (4 puntos) Estúdiase la convergencia uniforme de la serie en los conjuntos C , $C - \{0\}$ y $C - [-a, a]$ con $a > 0$.

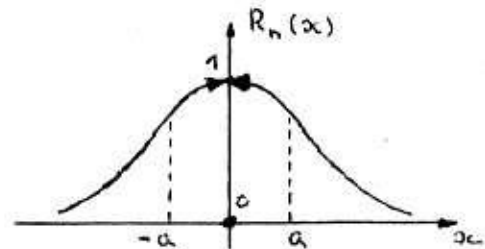
a) SI $x=0$, LA SERIE CONVERGE (TODOS SUS TÉRMINOS SE ANULAN). SI $x \neq 0$, SE TRATA DE UNA SERIE GEOMÉTRICA DE PRIMER TÉRMINO $a_0 = x^2$ Y DE RAZON $q = \frac{1}{1+x^2}$; COMO $|q| = q < 1$, HAY CONVERGENCIA, LUEGO, EL CAMPO DE CONVERGENCIA ES $C = \mathbb{R}$.

b) SEGÚN LO ANTERIOR, PARA $x \in C$ SE TIENE

$$S(x) = \begin{cases} 0, & \text{SI } x=0; \\ \frac{a_0}{1-q} = 1+x^2, & \text{SI } x \neq 0. \end{cases}$$

SI $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$, SE TIENE $R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^k}$. SI $x=0$, OBIAMENTE $R_n(x) = 0$ Y, SI $x \neq 0$, SE TRATA DE UNA SERIE GEOMÉTRICA DE PRIMER TÉRMINO $b_0 = \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}$ Y DE RAZON q TAL QUE $|q| < 1$. LUEGO,

$$R_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{SI } x=0; \\ \frac{b_0}{1-q} = \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}, & \text{SI } x \neq 0. \end{cases}$$



c) SI.

d) EN C Y EN $C - \{0\}$ SE TIENE $M_n = 1 \not\rightarrow 0$, CUANDO $n \rightarrow \infty$ Y, POR LO TANTO, NO HAY CONVERGENCIA UNIFORME EN C NI EN $C - \{0\}$. EN CAMBIO, EN $C - [-a, a]$ CON $0 < a$ SE TIENE $M_n = \frac{1}{(1+a^2)^{n+1}} \rightarrow 0$ SI $n \rightarrow \infty$, DE MODO QUE HAY CONVERGENCIA UNIFORME EN $C - [-a, a]$ CUALQUIERA QUE SEA $a > 0$.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

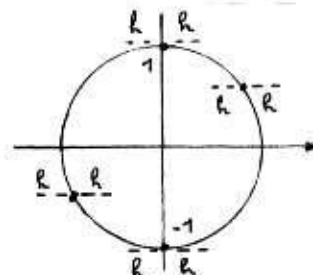
Dado el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = x^2 + y^2$ si $(x,y) \in A$ y $f(x,y) = 1$ si $(x,y) \notin A$.

- a) (3 puntos) Estúdiense la continuidad de f en \mathbb{R}^2 .
- b) (4 puntos) Calcúlense, si existen, las derivadas parciales de f en \mathbb{R}^2 .
- c) (2 puntos) Hállese el conjunto D de puntos en los que f es diferenciable.
- d) (1 punto) Si $(a,b) \in D$, calcúlese la diferencial de f en (a,b) .

a) CLARAMENTE f ES CONTINUA EN A (SUMA DE FUNCIONES CONTINUAS) Y EN $\text{Ext}A$ (FUNCIÓN CONSTANTE). TAMBIEN HAY CONTINUIDAD EN $\text{FR}A$, PUESTO QUE SI $(a,b) \in \text{FR}A$ Y \dot{U} ES UN ENTORNO PERFORADO DE (a,b) , ENTONCES $f(a,b) = 1$ Y $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = 1 = f(a,b)$. LUEGO, f ES CONTINUA EN TODO \mathbb{R}^2 .

b) SI $(x,y) \in A$, ENTONCES $f(x,y) = x^2 + y^2$, DE MODO QUE $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$ Y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$. SI $(x,y) \in \text{Ext}A$, ENTONCES $f(x,y) = 1$ Y $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$. SI $(x,y) \in \text{FR}A$, DEBE APLICARSE LA DEFINICIÓN. COMO $f(x,y) = 1$, SE TIENE

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h,y) - 1}{h}$$



SI $x=0$, ENTONCES $(x,y) \in \text{FR}A \implies y = \pm 1$; $f(x+h,y) = f(h, \pm 1) = 1$ Y $\frac{\partial f}{\partial x}(0, \pm 1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-1}{h} = 0$. SI $x \neq 0$, ENTONCES, TOMANDO h DE MODO QUE $(x+h,y) \in \text{Ext}A$, SE TIENE $f(x+h,y) = 1$ Y $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h,y) - 1}{h} = 0$, PERO

ESCOGIENDO h DE MODO QUE $(x+h,y) \in A$, SE TIENE $f(x+h,y) = (x+h)^2 + y^2 = (x^2 + y^2) + 2xh + h^2 = 1 + 2xh + h^2$ (YA QUE AHORA $(x,y) \in \text{FR}A \implies x^2 + y^2 = 1$) Y, POR ESO, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h,y) - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x \neq 0$, O SEA, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ NO EXISTE CUANDO

$(x,y) \in \text{FR}A$ Y $x \neq 0$. RESUMIENDO Y APLICANDO RAZONAMIENTO SEMEJANTES, RESULTA

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x, & \text{SI } (x,y) \in A, \\ 0, & \text{SI } (x,y) \in \text{Ext}A, \\ 0, & \text{SI } (x,y) = (0, \pm 1) \in \text{FR}A, \\ \nexists, & \text{SI } (x,y) \in \text{FR}A \text{ Y } (x,y) \neq (0, \pm 1); \end{cases} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y, & \text{SI } (x,y) \in A, \\ 0, & \text{SI } (x,y) \in \text{Ext}A, \\ 0, & \text{SI } (x,y) = (\pm 1, 0) \in \text{FR}A, \\ \nexists, & \text{SI } (x,y) \in \text{FR}A \text{ Y } (x,y) \neq (\pm 1, 0). \end{cases}$$

c) SEGÚN LO ANTERIOR, f TIENE DERIVADAS PARCIALES CONTINUAS EN $\mathbb{R}^2 - \text{FR}A$, MIENTRAS QUE EN LOS PUNTOS DE $\text{FR}A$ NO EXISTE ALMENOS UNA DE LAS DERIVADAS PARCIALES. LUEGO, EL CONJUNTO DE LOS PUNTOS EN LOS QUE f ES DI-

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99