SOLUCIONES Feb. 2003

PROBLEMA 1

	SI	NO	
1		X	Si $(x_n) \subset \mathbb{R}$, entonces $\overline{\lim} x_n \in \mathbb{R}$.
2		X	Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable y creciente, entonces $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
3		X	Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, también converge $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$.
4		X	Existe una biyección entre $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}$.
5	X		Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $f \in C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, entonces $D_{12}f(x,y) = D_{21}f(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
6		X	Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, existe $\xi \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.
7	X		La serie $\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-1)^n$ converge únicamente en $x = 1$.
8	X		El conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z \cdot \mathrm{Im}\, z = 0\}$ es conexo.
9	X		$\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x} e^{-1/x} = 0$.
10	X		Para cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in \mathbb{R}^2$ existen entornos $U(x), V(y) \subset \mathbb{R}^2$ tales que $U(x) \bigcap V(y) \neq \varnothing$.
11		X	Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es impar y $f \in C^\infty$, entonces $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
12		X	La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$ converge.
13	X		Si $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ es tal que $f(x) = x^2$ y $P = \{0; 1; 2\}$ es una partición de $[0,2]$, entonces la suma superior de Darboux $S(f;P)$ es igual a 5.
14		X	Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq 0$, existe un entorno $\mathring{U}(a)$ tal que $\forall x \in \mathring{U}(a)$, $f(x) \neq 0$.
15		X	En $\mathbb{R}^n$ el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lVert x \rVert = 1\}$ no es compacto.
16		X	Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es diferenciable en $a \in \mathbb{R}^2$, entonces la matriz de Jacobi $f'(a)$ es simétrica.
17		X	No existe $\lim (\cos 2n\pi)^{n^2+3n}$.
18		X	$\int \ln x dx = x \ln x + x + C$.
19		X	Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene extremo relativo en $a \in \mathbb{R}$, entonces $f'(a) = 0$ y $f''(a) \neq 0$.
20	X		$\sum_{n=1}^{40} i^n = 0$.

PROBLEMA 2

Sea $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 1$.

a) (2 puntos) Calcular la derivada y estudiar su continuidad.

b) (3 puntos) Encontrar los extremos relativos, así como los extremos absolutos o, en su caso, el ínfimo y el supremo.

c) (3 puntos) Siendo $g(x) = x^2 f(x)$, encontrar el area encerrada entre la gráfica de g y el intervalo $[-\pi, \pi]$ del eje de abscisas.

d) (2 puntos) Considerando g como una función definida en $\mathbb{R}$, estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g\left(\frac{1}{n}\right)$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g(n^2)$.

NOTA (apartado b): La ecuación $x \cos x = \operatorname{sen} x$ tiene $x = 0$ como única solución en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

ⓐ $f'(x) = \frac{1}{x^2}(x\cos x - \operatorname{sen} x)$ SI $x \neq 0$ Y $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h - h}{h^2} = 0.$

ESTÁ CLARO QUE f' ES CONTINUA SI $x \neq 0$ Y TAMBIÉN EN $x=0$, YA QUE $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}(x\cos x - \operatorname{sen} x) = 0 = f'(0)$. LUEGO, f' ES CONTINUA EN $(-\pi, \pi)$.

ⓑ COMO f ES DIFERENCIABLE, SUS EXTREMOS RELATIVOS (INTERIORES) EN $(-\pi,\pi)$ SON PUNTOS ESTACIONARIOS. ES OBVIO QUE $x=0$ ES UN PUNTO ESTACIONARIO. SI $x \neq 0$, ENTONCES $f'(x) = 0 \Longrightarrow \varphi(x) = x\cos x - \operatorname{sen} x = 0$; PERO, φ ES DECRECIENTE (YA QUE $\varphi'(x) = -x \operatorname{sen} x \leq 0$) Y SE ANULA EN $x=0$, DE MODO QUE $x \neq 0 \Rightarrow f'(x) \neq 0$. LUEGO, HAY UN ÚNICO PUNTO ESTACIONARIO $x=0$. ADEMÁS, ESTÁ CLARO QUE $f(-\pi^+) = f(\pi^-) = 0$ Y QUE $f(0) = 1$. POR LO TANTO, f TIENE EN $x=0$ UN MÁXIMO (RELATIVO Y ABSOLUTO) IGUAL A 1, NO ALCANZA MÍNIMO Y TIENE ÍNFIMO IGUAL A 0.

ⓒ OBVIAMENTE $g(x) = x \operatorname{sen} x$. PUESTO QUE g ES PAR EN $[-\pi,\pi]$ Y NO NEGATIVA EN $[0,\pi]$, EL AREA BUSCADA ES $S = 2\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x \, dx$. INTEGRANDO POR PARTES, SE TIENE $\int x \operatorname{sen} x \, dx = -x\cos x + \int \cos x \, dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$, DE DONDE RESULTA QUE $S = 2(-x\cos x + \operatorname{sen} x)\Big|_0^{\pi} = 2\pi$.

ⓓ SEA $g(x) = x \operatorname{sen} x$ CON $x \in \mathbb{R}$. ENTONCES LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} g(\frac{1}{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$ ES DE TÉRMINOS POSITIVOS Y CONVERGE, YA QUE $\frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^2}$ CUANDO $n \to \infty$ Y LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ CONVERGE. EN CAMBIO, LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} g(n^2) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{sen} n^2$ DIVERGE, YA QUE NO VERIFICA EL CRITERIO NECESARIO.

PROBLEMA 3

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ con $f_1(x, y) = e^{x-y}$ y $f_2(x, y) = x + \operatorname{sen} y$ y sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $g(u, v) = u - v$.

a) (2 puntos) Estudiar el carácter de abierto, cerrado, conexo y compacto de la preimagen $A = f_1^{-1}(\{1\}) \subset \mathbb{R}^2$.

b) (3 puntos) Estudiar los extremos de f_2 y calcular el valor de la expresión $\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}\right)$ en el punto $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

c) (3 puntos) Estudiar la diferenciabilidad de la composición $F = g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y calcular $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$.

c) (2 puntos) Calcular la diferencial de F en un punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ y la derivada direccional de F en (0,0) según el vector $v = (\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$.

(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid e^{x-y} = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$ ES UN CONJUNTO NO ABIERTO, CERRADO, CONEXO Y NO COMPACTO.

(b) $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 1$ Y $\frac{\partial f_2}{\partial y} = \cos y$ EXISTEN Y SON CONTINUAS EN $\mathbb{R}^2$; POR ESO, f_2 ES DIFERENCIABLE EN $\mathbb{R}^2$ Y, COMO $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\frac{\partial f_2}{\partial x} \neq 0$, NO TIENE EXTREMOS EN $\mathbb{R}^2$.

POR OTRO LADO, $\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}\right) = (-\operatorname{sen} y)(e^{x-y} - e^{x-y} + e^{x-y}) = -e^{x-y}\operatorname{sen} y$ VALE -1 EN $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(c) LAS DERIVADAS PARCIALES DE LAS COMPONENTES DE f Y LAS DERIVADAS PARCIALES DE g EXISTEN Y SON CONTINUAS EN $\mathbb{R}^2$, DE MODO QUE AMBAS FUNCIONES SON DIFERENCIABLES; ENTONCES $F = g \circ f$ ES DIFERENCIABLE EN $\mathbb{R}^2$ COMO COMPOSICIÓN DE FUNCIONES DIFERENCIABLES.

ADEMÁS, $F'(x,y) = g'(u,v) f'(x,y)$, ES DECIR, $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = (1, -1) \begin{pmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ 1 & \cos y \end{pmatrix}$,

DE DONDE $\frac{\partial F}{\partial x} = e^{x-y} - 1$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -e^{x-y} - \cos y$.

(d) COMO F ES DIFERENCIABLE EN $\mathbb{R}^2$, PARA $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ Y TODO $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ SE TIENE

$dF(a,b)\,h = \frac{\partial F}{\partial x}(a,b)\,h_1 + \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\,h_2 = (e^{a-b} - 1)\,h_1 + (-e^{a-b} - \cos b)\,h_2$ O BIEN $dF(a,b) = (e^{a-b} - 1)\,dx - (e^{a-b} + \cos b)\,dy$.

PARA LA DERIVADA DIRECCIONAL DE F EN EL PUNTO (a,b) SEGÚN EL VECTOR UNITARIO $v = (v_1, v_2)$ SE TIENE $\frac{\partial F}{\partial v}(a,b) = \frac{\partial F}{\partial x}(a,b)\,v_1 + \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\,v_2$ Y, POR LO TANTO, SI $(a,b) = (0,0)$ Y $v = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ RESULTA $\frac{\partial F}{\partial v}(0,0) = 0 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + (-2)\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}$.