SOLUCIONES

ESTAS SOLUCIONES HAN SIDO REMITIDAS A LA DELEGACIÓN DE ALUMNOS EL DIA 3 DE SEPTIEMBRE DE 2003

PROBLEMA 1

	SI	NO	
1	X		Si f es Riemann integrable e impar en $(-a,a)$, entonces, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.
2		X	Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que $\forall x \in (a,b), F'(x) = f(x)$. Entonces $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.
3	X		La derivada direccional de $f(x,y,z) = z^2 - xy$ en el punto $(0,0,\frac{1}{2})$ es máxima en la dirección de $(0,0,1)$.
4	X		$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+5^{n+1}}{2^n+5^n} = 5$.
5		X	Si $x, y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, entones $x + y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
6		X	Las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ convergen en el mismo conjunto de puntos.
7		X	Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe un único punto $\xi \in (a,b)$ tal que $f'(\xi) = 0$.
8		X	El lugar geométrico de los números complejos que verifican $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = 0$ es el eje OY.
9		X	Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en $x = x_0$, también converge en $x = -x_0$.
10	X		$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{n^2} = e$.
11		X	Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, entonces $\forall x \in X, \|x\| > 0$.
12	X		La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}} n}$ es divergente.
13	X		$\|z\| \leqslant \|\operatorname{Re} z\| + \|\operatorname{Im} z\|$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
14	X		Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es diferenciable, entonces es acotada en toda bola cerrada $\overline{B(a,r)} \subset \mathbb{R}^2$.
15	X		Un conjunto finito es un conjunto compacto.
16	X		$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^n x}{n^{\frac{5}{2}}}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$.
17		X	Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos acotados no vacíos tales que $A \subset B$ y $A \neq B$. Entonces $\sup A < \sup B$.
18		X	Toda función Riemann integrable admite al menos una primitiva.
19		X	Si $(x_n) \subset \mathbb{R}$ y $\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$, entonces (x_n) es convergente en $\mathbb{R}$.
20	X		Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y el sistema de ecuaciones $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ no tiene solución, entonces f no tiene extremos.

FMT2 - Sep 03 - 2/3

PROBLEMA 2

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = (x+y)^2\cos(x-y) + (x-y)^2\cos(x+y)$.

a) (4 puntos) Estudiar la diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2$ y calcular la diferencial de f en $(0,0)$.

b) (3 puntos) ¿Presenta la función f extremo en $(0,0)$?

c) (2 puntos) Estudiar la continuidad de la función

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 2 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

donde $f(x,y)$ es la función del enunciado.

d) (1 punto) Estudiar el carácter de abierto, cerrado, conexo y compacto del conjunto de puntos de discontinuidad de la función $g(x,y)$ del apartado anterior.

(a) LA FUNCIÓN ES DIFERENCIABLE EN $\mathbb{R}^2$ POR SER SUMA DE PRODUCTOS DE POLINOMIOS POR COMPOSICIONES DE FUNCIONES DIFERENCIABLES EN $\mathbb{R}^2$. PUESTO QUE

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x+y)\cos(x-y) - (x+y)^2 \operatorname{sen}(x-y) + 2(x-y)\cos(x+y) - (x-y)^2 \operatorname{sen}(x+y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(x+y)\cos(x-y) + (x+y)^2 \operatorname{sen}(x-y) - 2(x-y)\cos(x+y) - (x-y)^2 \operatorname{sen}(x+y),$$

SE TIENE $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ Y, POR LO TANTO, LA DIFERENCIAL $df(0,0)$ DE LA FUNCIÓN f EN $(0,0)$ ES LA FUNCIÓN LINEAL NULA: $\forall h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, $df(0,0)h = 0$.

(b) ESTÁ CLARO QUE $(0,0)$ ES UN PUNTO ESTACIONARIO DE f. CALCULANDO LAS SEGUNDAS DERIVADAS, ES FÁCIL VER QUE f TIENE MÍNIMO LOCAL EN $(0,0)$. MÁS SENCILLO ES OBSERVAR QUE $f(0,0) = 0$ Y $f(x,y) > 0$ PARA TODO PUNTO $(x,y) \neq (0,0)$ SUFICIENTEMENTE PRÓXIMO A $(0,0)$, DE MODO QUE SEA $\cos(x-y) > 0$ Y $\cos(x+y) > 0$.

(c) EVIDENTEMENTE g ES CONTINUA EN $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. TAMBIÉN ES CONTINUA EN $(0,0)$ YA QUE, USANDO COORDENADAS POLARES, SE TIENE

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{r\to 0} \left[(\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi)^2 \cos(r(\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi)) + (\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi)^2 \cos(r(\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi)) \right] =$$
$$= (\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi)^2 + (\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi)^2 = 2 = g(0,0).$$

(d) EL CONJUNTO DE PUNTOS DE DISCONTINUIDAD DE LA FUNCIÓN g ES EL VACÍO Y, POR LO TANTO, ES ABIERTO, CERRADO, CONEXO Y COMPACTO.

PROBLEMA 3

Sea la sucesión de funciones $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{e^{nx}}{3^n}$.

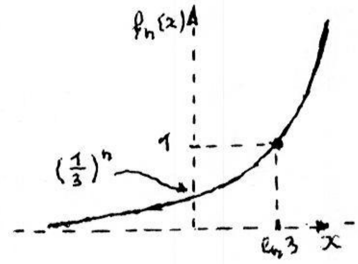
a) (4 puntos) Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión.

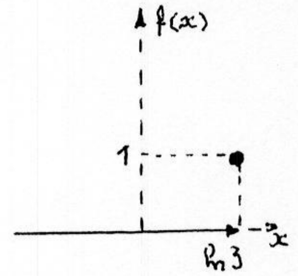
b) (3 puntos) Dada la serie funcional $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, determinar la función suma, indicando su campo de convergencia.

c) (3 puntos) Estudiar la convergencia uniforme de la serie funcional $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ en intervalos de la forma $(-\infty, \ln 3 - \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$.

(a) OBSERVANDO LA GRÁFICA DE $f_n(x) = \left(\frac{e^x}{3}\right)^n$, ES FÁCIL VER QUE LA SUCESIÓN $\{f_n(x)\}$ DIVERGE EN $(\ln 3, +\infty)$ Y CONVERGE PUNTUALMENTE EN $(-\infty, \ln 3]$ A LA FUNCIÓN

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ SI } x < \ln 3; \\ 1 \text{ SI } x = \ln 3. \end{cases}$$





EN $A = (-\infty, \ln 3]$ NO HAY CONVERGENCIA UNIFORME, YA QUE

$$M_n = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 1 \underset{n \to \infty}{\not\longrightarrow} 0.$$

EN CAMBIO, EN $B = (-\infty, a)$ CON $a < \ln 3$ HAY CONVERGENCIA UNIFORME, YA QUE

$$M_n = \sup_{x \in B} |f_n(x) - f(x)| = f_n(a) = \left(\frac{e^a}{3}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

PUESTO QUE $a < \ln 3 \Longrightarrow \frac{1}{3} e^a < 1$.

(b) PARA $x \in \mathbb{R}$ FIJO, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^x}{3}\right)^n$ ES UNA SERIE GEOMÉTRICA DE RAZÓN $q = \frac{e^x}{3} > 0$. SI $q = \frac{e^x}{3} \geq 1$, O SEA, SI $x \geq \ln 3$, LA SERIE DIVERGE. EN CAMBIO, PARA $x \in (-\infty, \ln 3)$ LA SERIE CONVERGE CON SUMA $S = \frac{1}{1-q} = \frac{3}{3 - e^x}$.

(c) SI $x \in (-\infty, \ln 3 - \varepsilon)$ CON $\varepsilon > 0$, SE TIENE $|f_n(x)| = \frac{1}{3^n} e^{nx} < \frac{1}{3^n}$ Y, PUESTO QUE LA SERIE NUMÉRICA $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ CONVERGE, RESULTA QUE LA SERIE FUNCIONAL $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ CONVERGE UNIFORMEMENTE EN CUALQUIER INTERVALO DE LA FORMA $(-\infty, \ln 3 - \varepsilon)$ CON $\varepsilon > 0$.