

## SOLUCIONES

EXAMEN 23.01.04

PROBLEMA 1

SI NO

- 1    $\lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{sen} \frac{1}{n} = 1.$
- 2   La matriz hessiana de la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = 2y^2 - x^3$  es simétrica.
- 3   Si la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  tiene radio de convergencia  $R > 0$ , entonces la serie converge para todo  $x \in [x_0 - R, x_0 + R]$ .
- 4    $\sqrt{3 - 4i} = \pm(2 - i).$
- 5   Si un subconjunto de  $\mathbb{R}$  está acotado, entonces el conjunto de sus cotas inferiores tiene máximo.
- 6   Para cualesquiera reales  $x, y$  se verifica  $|x| - |y| \leq |x + y|.$
- 7   Si  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A \neq \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en  $A$  y  $f'(x) = 0$  para todo  $x \in A$ , entonces  $f$  es constante en  $A$ .
- 8   Siendo  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$  y  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1 - x^2\}$ , el conjunto  $A \cap B$  es conexo.
- 9   Si  $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 2\}$ , entonces  $\inf A = \sqrt{2}.$
- 10   Sea  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = l$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l.$
- 11   La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$  converge uniformemente en  $\mathbb{R}.$
- 12   Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en un punto  $a \in \mathbb{R}$  y tiene máximo en  $a$ , entonces la matriz jacobiana de  $f$  en  $a$  es nula.
- 13   Para todo  $a \in \mathbb{R}$  existe una sucesión  $(a_n) \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$
- 14   El conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$  es compacto.
- 15   Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable y creciente en  $\mathbb{R}$ , entonces  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}.$
- 16   Para todo  $z \in \mathbb{C} - \{0\}$  los argumentos de las raíces  $n$ -ésimas de  $z$  forman una progresión aritmética.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

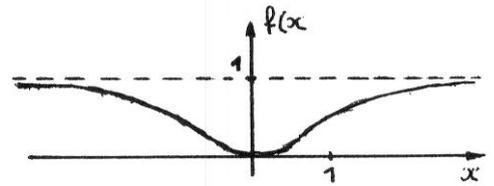
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## PROBLEMA 2

Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ .

- a) (2 puntos) Construir la gráfica de  $f(x)$ .
- b) (3 puntos) Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión  $(f_n)$ , donde  $f_n(x) = [f(x)]^n$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
- c) (2 puntos) Determinar el conjunto de convergencia y la suma de la serie funcional  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ .
- d) (3 puntos) Siendo  $x_n = \frac{2-\pi n}{2n+\pi} + \frac{2^{-n}n}{n+1}$  y  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $g(x) = (f(x), \text{sen } x)$ , calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)$ .

$$\textcircled{a} \left. \begin{array}{l} 0 \leq f(x) < 1; \quad f(x) = 0 \Rightarrow x = 0; \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1 \\ f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} \begin{cases} > 0 \text{ SI } x > 0 \text{ (ESTR. CR.)} \\ < 0 \text{ SI } x < 0 \text{ (ESTR. DECR.)} \end{cases} \end{array} \right\}$$



ⓑ PARA CUALQUIER  $x \in \mathbb{R}$  SE TIENE  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ . LUEGO, LA SUCESIÓN  $(f_n(x))$  CONVERGE PUNTUALMENTE EN  $\mathbb{R}$  A LA FUNCIÓN  $F(x) = 0$ .

LA CONVERGENCIA DE  $(f_n(x))$  A  $F(x)$  NO ES UNIFORME EN  $\mathbb{R}$ , YA QUE

$$M_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - F(x)| = 1 \not\rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty$$

ⓒ PARA CADA  $x \in \mathbb{R}$  LA SERIE FUNCIONAL  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^n$  ES UNA SERIE GEOMÉTRICA DE PRIMER TÉRMINO  $q = \frac{x^2}{1+x^2}$  Y DE RAZÓN  $q = \frac{x^2}{1+x^2}$  TAL QUE  $0 \leq q < 1$ . POR LO TANTO, EL CONJUNTO DE CONVERGENCIA DE  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  ES  $\mathbb{R}$  Y LA SUMA DE LA SERIE ES  $S(x) = \frac{q}{1-q} = x^2$ .

ⓓ PUESTO QUE  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\frac{\pi}{2}$  Y LA FUNCIÓN  $g(x)$  ES CONTINUA EN  $\mathbb{R}$ , SE TIENE

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(f\left(-\frac{\pi}{2}\right), \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{\pi^2}{4+\pi^2}, -1\right).$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## PROBLEMA 3

Sea la función  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cos \frac{x}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0, \\ 0 & \text{si } x+y = 0, \end{cases}$$

- a) (3 puntos) Estudiar la continuidad de  $f$ .  
 b) (3 puntos) Calcular las derivadas parciales de  $f$  en  $(0,0)$  y en  $(0,1)$   
 c) (3 puntos) Estudiar la diferenciabilidad de  $f$  en  $(0,0)$   
 d) (1 punto) Calcular la derivada de  $f$  en el punto  $(0,1)$  según la dirección del vector  $(-1,2)$ .

Ⓐ 1 ESTÁ CLARO QUE  $f$  ES CONTINUA EN TODO  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$  TAL QUE  $y \neq -x$ .

2 EN  $(x,-x) \neq (0,0)$  NO HAY CONTINUIDAD, YA QUE

$$f(x+h_1, -x+h_2) = \begin{cases} (x+h_1)(-x+h_2) \cos \frac{x+h_1}{h_1+h_2} & \text{SI } h_2 \neq -h_1, \\ 0 & \text{SI } h_2 = -h_1 \end{cases}$$

Y ESTÁ CLARO QUE NO EXISTE LÍMITE DE  $f(x+h_1, -x+h_2)$  CUANDO  $(h_1, h_2) \rightarrow 0$

3 EN  $(0,0)$  LA FUNCIÓN ES CONTINUA, YA QUE

$$f(h_1, h_2) = \begin{cases} h_1 h_2 \cos \frac{h_1}{h_1+h_2} & \text{SI } h_2 \neq -h_1, \\ 0 & \text{SI } h_2 = -h_1. \end{cases}$$

DE MODO QUE  $f(h_1, h_2) \rightarrow 0 = f(0,0)$  CUANDO  $(h_1, h_2) \rightarrow 0$ .

$$\textcircled{b} D_x f(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0, \quad D_y f(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0,$$

$$D_x f(0,1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,1) - f(0,1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cos \frac{h}{h+1} - 0}{h} = 1, \quad D_y f(0,1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,1+h) - f(0,1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0,$$

DE MODO QUE

$$D_x f(0,0) = 0, \quad D_y f(0,0) = 0 \quad \text{Y} \quad D_x f(0,1) = 1, \quad D_y f(0,1) = 0.$$

Ⓒ SI  $f$  FUESE DIFERENCIABLE EN  $(0,0)$ , DEBERÍA SER  $f(h_1, h_2) - f(0,0) = D_x f(0,0)h_1 + D_y f(0,0)h_2 + \alpha \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = \alpha \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$ , DONDE  $\alpha \rightarrow 0$  CUANDO  $(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)$ . EL CÁLCULO DIRECTO DA

$$f(h_1, h_2) - f(0,0) = \begin{cases} h_1 h_2 \cos \frac{h_1}{h_1+h_2}, & \text{SI } h_2 \neq -h_1 \Rightarrow \alpha = \frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \cos \frac{h_1}{h_1+h_2}, & \text{SI } h_2 \neq -h_1, \\ 0, & \text{SI } h_2 = -h_1 \Rightarrow \alpha = 0, & \text{SI } h_2 = -h_1, \end{cases}$$

DE DONDE SE DEDUCE QUE  $\alpha \rightarrow 0$  CUANDO  $(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)$  Y, POR LO TANTO, LA FUNCIÓN  $f$  ES DIFERENCIABLE EN  $(0,0)$

Ⓓ COMO  $f$  ES CLARAMENTE DIFERENCIABLE EN  $(0,1)$  Y PUESTO QUE  $D_x f(0,1) = 1$  Y  $D_y f(0,1) = 0$ , LA DERIVADA  $D_{(-1,2)} f(0,1)$  DE  $f$  EN  $(0,1)$  SEGÚN LA DIRECCIÓN DEL VECTOR  $(-1,2)$  ES  $-1$ , YA QUE

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99