SOLUCIONES

EXAMEN 23.01.04

PROBLEMA 1

	SI	NO	
1	☒	☐	$\lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen}\frac{1}{n} = 1$.
2	☒	☐	La matriz hessiana de la función $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 2y^2 - x^3$ es simétrica.
3	☐	☒	Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ tiene radio de convergencia $R>0$, entonces la serie converge para todo $x \in [x_0 - R, x_0 + R]$.
4	☒	☐	$\sqrt{3-4i} = \pm(2-i)$.
5	☒	☐	Si un subconjunto de $\mathbb{R}$ está acotado, entonces el conjunto de sus cotas inferiores tiene máximo.
6	☒	☐	Para cualesquiera reales x, y se verifica $\lvert x\rvert - \lvert y\rvert \leqslant \lvert x+y\rvert$.
7	☐	☒	Si $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \mathbb{R}$, $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en A y $f'(x) = 0$ para todo $x \in A$, entonces f es constante en A.
8	☐	☒	Siendo $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ y $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y = 1 - x^2\}$, el conjunto $A\cap B$ es conexo.
9	☐	☒	Si $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 2\}$, entonces $\inf A = \sqrt{2}$.
10	☐	☒	Sea $f:[1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $\lim_{n\to\infty} f(n) = l$, entonces $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.
11	☒	☐	La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$.
12	☒	☐	Si $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en un punto $a \in \mathbb{R}$ y tiene máximo en a, entonces la matriz jacobiana de f en a es nula.
13	☒	☐	Para todo $a \in \mathbb{R}$ existe una sucesión $(a_n) \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.
14	☐	☒	El conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ es compacto.
15	☐	☒	Si $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y creciente en $\mathbb{R}$, entonces $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
16	☒	☐	Para todo $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ los argumentos de las raíces n-ésimas de z forman una progresión aritmética.
17	☒	☐	Cualquier sucesión $f:\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{N}$.
18	☒	☐	$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
19	☐	☒	Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $\lim_{x\to 0} f(x,0) = l$, entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l$.
20	☒	☐	$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{1}{e}$.

PROBLEMA 2

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$.

a) (2 puntos) Construir la gráfica de $f(x)$.

b) (3 puntos) Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión (f_n), donde $f_n(x) = [f(x)]^n$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

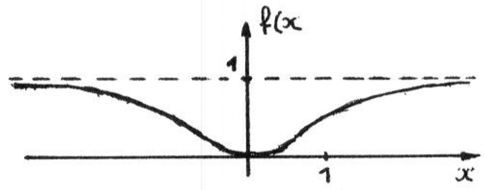
c) (2 puntos) Determinar el conjunto de convergencia y la suma de la serie funcional $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

d) (3 puntos) Siendo $x_n = \dfrac{2-\pi n}{2n+\pi} + \dfrac{2^{-n}n}{n+1}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $g(x) = (f(x), \operatorname{sen} x)$, calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} g(x_n)$.

ⓐ $0 \le f(x) < 1$; $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$;

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} \begin{cases} >0 \text{ SI } x>0 \text{ (ESTR. CR.)} \\ <0 \text{ SI } x<0 \text{ (ESTR. DECR.)} \end{cases}$$



ⓑ PARA CUALQUIER $x \in \mathbb{R}$ SE TIENE $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. LUEGO, LA SUCESIÓN $(f_n(x))$ CONVERGE PUNTUALMENTE EN $\mathbb{R}$ A LA FUNCIÓN $F(x) = 0$.

LA CONVERGENCIA DE $(f_n(x))$ A $F(x)$ NO ES UNIFORME EN $\mathbb{R}$, YA QUE

$$M_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - F(x)| = 1 \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0.$$

ⓒ PARA CADA $x \in \mathbb{R}$ LA SERIE FUNCIONAL $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^n$ ES UNA SERIE GEOMÉTRICA DE PRIMER TÉRMINO $a = \frac{x^2}{1+x^2}$ Y DE RAZÓN $q = \frac{x^2}{1+x^2}$ TAL QUE $0 \le q < 1$. POR LO TANTO, EL CONJUNTO DE CONVERGENCIA DE $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ES $\mathbb{R}$ Y LA SUMA DE LA SERIE ES $S(x) = \dfrac{a}{1-q} = x^2$.

ⓓ PUESTO QUE $\lim_{n\to\infty} x_n = -\frac{\pi}{2}$ Y LA FUNCIÓN $g(x)$ ES CONTINUA EN $\mathbb{R}$, SE TIENE

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(f\left(-\frac{\pi}{2}\right), \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{\pi^2}{4+\pi^2}, -1\right).$$

Problema 3

Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\cos\dfrac{x}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0, \\ 0 & \text{si } x+y = 0, \end{cases}$$

a) (3 puntos) Estudiar la continuidad de f.

b) (3 puntos) Calcular las derivadas parciales de f en $(0,0)$ y en $(0,1)$

c) (3 puntos) Estudiar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$

d) (1 punto) Calcular la derivada de f en el punto $(0,1)$ según la dirección del vector $(-1,2)$.

(a) $\boxed{1}$ ESTÁ CLARO QUE <u>f ES CONTINUA EN TODO $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ TAL QUE $y\neq -x$</u>.

$\boxed{2}$ <u>EN $(x,-x)\neq(0,0)$ NO HAY CONTINUIDAD</u>, YA QUE

$$f(x+h_1,-x+h_2) = \begin{cases} (x+h_1)(-x+h_2)\cos\dfrac{x+h_1}{h_1+h_2} & \text{SI } h_2\neq -h_1, \\ 0 & \text{SI } h_2 = -h_1 \end{cases}$$

Y ESTÁ CLARO QUE NO EXISTE LÍMITE DE $f(x+h_1,-x+h_2)$ CUANDO $(h_1,h_2)\longrightarrow 0$

$\boxed{3}$ <u>EN $(0,0)$ LA FUNCIÓN ES CONTINUA</u>, YA QUE

$$f(h_1,h_2) = \begin{cases} h_1h_2\cos\dfrac{h_1}{h_1+h_2} & \text{SI } h_2\neq -h_1, \\ 0 & \text{SI } h_2 = -h_1, \end{cases}$$

DE MODO QUE $f(h_1,h_2)\longrightarrow 0 = f(0,0)$ CUANDO $(h_1,h_2)\longrightarrow 0$.

(b) $D_xf(0,0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0-0}{h} = 0,\quad D_yf(0,0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0-0}{h} = 0,$

$D_xf(0,1) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,1)-f(0,1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h\cos\frac{h}{h+1}-0}{h} = 1,\quad D_yf(0,1) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0,1+h)-f(0,1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0-0}{h} = 0,$

DE MODO QUE

<u>$D_xf(0,0)=0,\ D_yf(0,0)=0$</u> Y <u>$D_xf(0,1)=1,\ D_yf(0,1)=0.$</u>

(c) SI f FUESE DIFERENCIABLE EN $(0,0)$, DEBERÍA SER $f(h_1,h_2)-f(0,0) = D_xf(0,0)h_1 + D_yf(0,0)h_2 + \alpha\sqrt{h_1^2+h_2^2} = \alpha\sqrt{h_1^2+h_2^2}$, DONDE $\alpha\longrightarrow 0$ CUANDO $(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)$. EL CÁLCULO DIRECTO DA

$$f(h_1,h_2)-f(0,0) = \begin{cases} h_1h_2\cos\dfrac{h_1}{h_1+h_2}, \text{ SI } h_2\neq -h_1 & \Longrightarrow \alpha = \dfrac{h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\cos\dfrac{h_1}{h_1+h_2}, \text{ SI } h_2\neq -h_1, \\ 0, \text{ SI } h_2 = -h_1 & \Longrightarrow \alpha = 0, \text{ SI } h_2 = -h_1, \end{cases}$$

DE DONDE SE DEDUCE QUE $\alpha\longrightarrow 0$ CUANDO $(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)$ Y, POR LO TANTO, <u>LA FUNCIÓN f ES DIFERENCIABLE EN $(0,0)$</u>

(d) COMO f ES CLARAMENTE DIFERENCIABLE EN $(0,1)$ Y PUESTO QUE $D_xf(0,1)=1$ Y $D_yf(0,1)=0$, <u>LA DERIVADA $D_{(-1,2)}f(0,1)$ DE f EN $(0,1)$ SEGÚN LA DIRECCIÓN DEL VECTOR $(-1,2)$ ES -1</u>, YA QUE

$$D_{(-1,2)}f(0,1) = D_xf(0,1)\cdot(-1) + D_yf(0,1)\cdot 2 = 1\cdot(-1) + 0\cdot 2 = -1.$$