Problema 3

Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} y\sqrt{\frac{|x^2-y^2|}{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) (3 puntos) Estudiar el carácter abierto, cerrado, compacto y conexo de $f^{-1}(\{0\})$.

b) (1 punto) Estudiar la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.

c) (3 puntos) Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

d) (3 puntos) Estudiar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

a) Es obvio que $A = f^{-1}(\{0\}) = \{(x,y) : y = 0\} \bigcup \{(x,y) : y = \pm x\}$. Geométricamente el conjunto A está formado por los puntos del eje de las ordenadas y por los puntos de las bisectrices de los cuadrantes. Luego, está claro que A no es abierto, es cerrado, no es compacto y es conexo.

b) Es obvio que f es continua en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. La continuidad de f en $(0,0)$ equivale a que $f(x,y)$ tiende a $f(0,0) = 0$ cuando (x,y) tiende a $(0,0)$. Pasando a coordenadas polares ($x = r\cos\varphi,\ y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi$) y sabiendo que el límite del producto de una infinitésima por una cantidad acotada es una infinitésima, se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\sqrt{\frac{|x^2-y^2|}{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} r\,\mathrm{sen}\,\varphi\sqrt{|\cos 2\varphi|} = 0 = f(0,0),$$

de modo que hay también continuidad en $(0,0)$.

Por lo tanto, $f(x,y)$ es continua en $\mathbb{R}^2$.

c) Por definición

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0\cdot\sqrt{1}-0}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\cdot\sqrt{1}-0}{h} = 1.$$

d) La diferenciabilidad de f en $(0,0)$ equivale a que

$$f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot h_2 + \alpha\sqrt{h_1^2+h_2^2} = h_2 + \alpha\sqrt{h_1^2+h_2^2},$$

donde α tiende a cero cuando (h_1,h_2) tiende a cero. El cálculo directo da

$$f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0) = h_2\sqrt{\frac{|h_1^2-h_2^2|}{h_1^2+h_2^2}},$$

de modo que

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\Big(-h_2 + h_2\sqrt{\frac{|h_1^2-h_2^2|}{h_1^2+h_2^2}}\Big).$$

Pasando a coordenadas polares ($h_1 = r\cos\varphi,\ h_2 = r\,\mathrm{sen}\,\varphi$), se tiene

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \alpha = \lim_{r\to 0}(-\cos\varphi + \mathrm{sen}\,\varphi\sqrt{|\cos 2\varphi|}) = -\cos\varphi + \mathrm{sen}\,\varphi\sqrt{|\cos 2\varphi|} \neq 0.$$

Luego, la función f no es diferenciable en $(0,0)$.