

1. El cometa Halley describe una órbita elíptica de excentricidad $e \approx 0.97$. la longitud del eje mayor de la órbita es, aproximadamente, 36,18 unidades astronómicas (una u.a., distancia media entre la Tierra y el Sol, es ≈ 93 millones de millas).
 - a) Hallar una ecuación en polares para la órbita con el polo en el Sol
 - b) Hallar la ecuación cartesiana (eje mayor el de abscisas y origen en el centro de la cónica)
 - c) ¿Cuál es la distancia más próxima al Sol (perihelio) ¿y la más lejana (afelio)?

Solución:

$$a) \quad e = 0,97 = \frac{c}{a}, \quad 2a = 36.18 \text{ u.a.} \Rightarrow a = 18,09 \text{ u.a.}$$

Tomamos una referencia polar de tipo 1, la ecuación correspondiente de la cónica sería:

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \alpha}, \text{ donde } p = \frac{b^2}{a} \text{ y } e = \frac{c}{a};$$

$$\text{como } c = a \cdot e = 17.5473 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 19,3403627 \Rightarrow p = \frac{19,3403627}{18,09} \approx 1,069119.$$

Luego, una ecuación en polares para la órbita es: $r = \frac{1.069119}{1 - 0.97 \cos \alpha}$

b) La ecuación en cartesianas es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, sustituyendo $\frac{x^2}{327,2481} + \frac{y^2}{19,3403627} = 1$

c) La distancia mínima (perihelio) entre el cometa Halley y el Sol es el valor de “r” mínimo, que se obtiene cuando el denominador $1 - 0.97 \cos \alpha$ es máximo, es decir, para $\cos \alpha = -1$:

$$r = \frac{1.06911899}{1 + 0.97} \approx 0.5427 \text{ u.a. También se obtiene con } a - c.$$

La distancia máxima (afelio) entre el cometa Halley y el Sol es el valor de “r” máximo, que se obtiene cuando el denominador $1 - 0.97 \cos \alpha$ es mínimo, es decir, para $\cos \alpha = 1$:

$$r = \frac{1.06911899}{1 - 0.97} \approx 35,63729996 \text{ u.a. También se obtiene con } a + c.$$

2. Dada la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, hallar la ecuación polar de su rama

derecha suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está:

- a) en el foco derecho de la hipérbola.
- b) en el foco izquierdo de la hipérbola.
- c) en el caso a), hallar la ecuación polar de sus directrices y asíntotas.

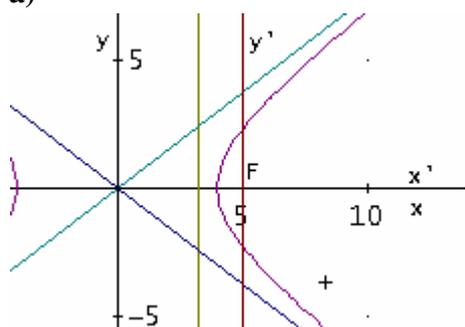
Solución:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

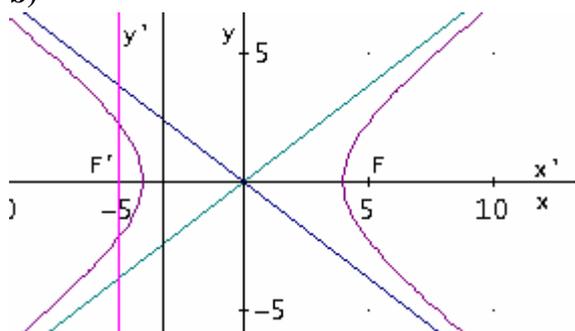
a)



La ecuación, en este caso, es:

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \alpha} = \frac{\frac{9}{4}}{1 - \frac{5}{4} \cos \alpha} = \frac{9}{4 - 5 \cos \alpha}$$

b)



La ecuación que se debe emplear ahora es:

$$r = \frac{-p}{1 - e \cos \alpha} = \frac{-\frac{9}{4}}{1 - \frac{5}{4} \cos \alpha} = \frac{-9}{4 - 5 \cos \alpha}$$

Directrices en el caso a):

La ecuación polar de la directriz asociada al foco que coincide con el origen de la referencia polar es:

$$dir1 \equiv x = -d = -(c - \frac{a^2}{c}) = -\frac{9}{5} \Rightarrow r \cos \alpha = -\frac{9}{5} \Rightarrow \boxed{r = -\frac{9}{5 \cos \alpha}}$$

La ecuación polar de la directriz asociada al foco que no coincide con el origen de la referencia polar es:

$$dir2 \equiv x = -(d + 2\frac{a^2}{c}) = -(c + \frac{a^2}{c}) = -\frac{41}{5} \Rightarrow r \cos \alpha = -\frac{41}{5} \Rightarrow \boxed{r = -\frac{41}{5 \cos \alpha}}$$

Asíntotas en el caso a):

Son las rectas que pasan por el centro de la hipérbola, P(-5, 0), y tienen de pendiente $\pm \frac{b}{a} = \pm \frac{3}{4}$, luego su ecuación en el sistema de referencia cartesiano asociado al polar dado es:

$$y - 0 = \pm \frac{3}{4}(x + 5).$$

Pasando a polares, se obtiene: $r \sin \alpha = \pm \frac{3}{4}(r \cos \alpha + 5) \Rightarrow$,

15/4

-15/4

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

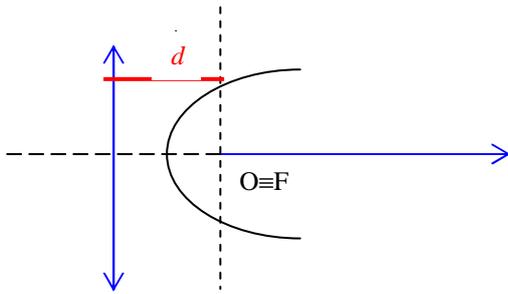


3. La sección de una gran antena parabólica admite como modelo la gráfica de

$$y = \frac{x^2}{200}, \quad -100 < x < 100.$$

- Hallar su ecuación polar suponiendo que la dirección del eje polar coincide con su eje de simetría y que el polo está en el foco de la parábola.
- Ecuación polar de su directriz y distancia del foco al vértice.
- El área de la antena.

Solución



a) La ecuación polar es de la forma: $r = \frac{p}{1 - e \cos \alpha}$.

De la ecuación cartesiana deducimos que $x^2 = 200y$, luego $2p = 200 \Rightarrow p = 100$, como además $e = 1$:

$$r = \frac{100}{1 - \cos \alpha}$$

b) La ecuación de la directriz en el sistema cartesiano asociado al polar es $x = -d$, luego pasando a polares: $r \cos \alpha = -100 \Rightarrow r = \frac{-100}{\cos \alpha}$

La distancia del foco al vértice es el parámetro $p = 100$.

c) El área de la antena, es el área de la superficie de revolución generada por el arco de la parábola cuando gira alrededor del eje OY para $0 \leq x \leq 100$.

Como el giro es alrededor del eje de ordenadas la variable de integración es $y \Rightarrow$ despejando la variable x : $x = \sqrt{200y}$, y el intervalo de integración para y es:

$$0 \leq y \leq \frac{100^2}{200} = 50 \Rightarrow \int_0^{50} 2\pi \sqrt{200y} \sqrt{1 + \left(\frac{200}{2\sqrt{200y}}\right)^2} dy = \frac{2\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1) 10^4 \approx 3,83 \cdot 10^4 u^2, \text{ es}$$

decir $S \approx 3,83 \cdot 10^4 u^2$

4. Verificar que la ecuación $r = \frac{21}{5 - 2 \cos \alpha}$ determina una elipse y hallar los semiejes y las ecuaciones polares de sus directrices.

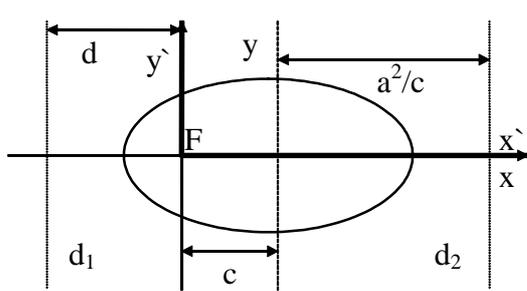
Solución:

21 21/ε 21 2

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70





$$p = de \Rightarrow d = \frac{p}{e} = \frac{21/5}{2/5} = \frac{21}{2} .$$

$$a = \frac{p}{1-e^2} = 5, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \sqrt{21} .$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 21 = 4 \Rightarrow c = 2 .$$

La directriz d_1 tiene de ecuación:

$$x = -d = -\frac{21}{2} \Rightarrow r \cos \alpha = -\frac{21}{2} \Rightarrow d_1 \equiv r = -\frac{21}{2 \cos \alpha}$$

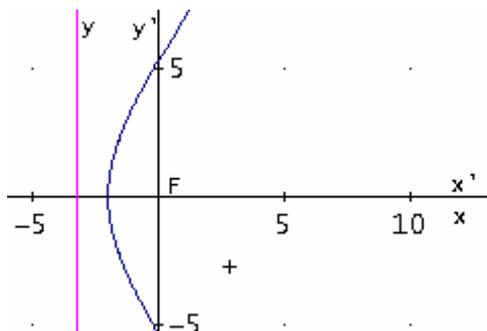
La otra directriz d_2 tiene de ecuación:

$$x = c + \frac{a^2}{c} = 2 + \frac{25}{2} = \frac{29}{2} \Rightarrow r \cos \alpha = \frac{29}{2} \Rightarrow d_2 \equiv r = \frac{29}{2 \cos \alpha}$$

5. Verificar que la ecuación $r = \frac{16}{3-5 \cos \alpha}$ determina la rama derecha de una hipérbola y hallar las ecuaciones polares de sus directrices y asíntotas.

Solución:

$$r = \frac{16}{3-5 \cos \alpha} = \frac{16/3}{1-5/3 \cos \alpha} \Rightarrow p = \frac{16}{3}, \quad e = \frac{5}{3} .$$



Por ser $e > 1$, se trata de una rama de una hipérbola.

A la vista de la ecuación, la cónica y el foco están del mismo lado respecto de la directriz y el eje polar no corta a dicha recta, luego, la situación es la que refleja la figura de la izquierda.

Así pues, se trata de la rama derecha de una hipérbola.

$$d = \frac{p}{e} = \frac{16}{5}, \quad a = \frac{p}{e^2 - 1} = 3, \quad b = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}} = 4 .$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 25 \Rightarrow c = 5 .$$

Las ecuaciones polares de las directrices se hallan de forma análoga a como se hizo en el problema anterior, obteniéndose:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

el foco de la rama de la hipérbola, y ejes el polar y la perpendicular al polar por el foco) son: .

$$y = \pm \frac{4}{3}(x + 5) .$$

Por consiguiente, las ecuaciones polares de estas rectas son:

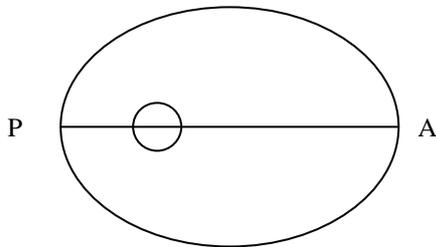
$$r \operatorname{sen} \alpha = \pm \frac{4}{3}(r \operatorname{cos} \alpha - 5) ; \text{ y operando para cada uno de los signos se obtiene:}$$

$$\boxed{r = \frac{20}{3 \operatorname{sen} \alpha - 4 \operatorname{cos} \alpha}} , \quad \boxed{r = \frac{-20}{4 \operatorname{cos} \alpha + 3 \operatorname{sen} \alpha}}$$

6. Hallar la ecuación polar de la órbita del planeta Tierra, de sus directrices y las distancias del afelio y perihelio sabiendo que:

$$a = 92,957 \times 10^6 \text{ millas} ; \quad e = 0,0167.$$

Solución:



Procediendo como en el ejercicio 1, y tomando como sistema de referencia polar la semirecta con origen en el foco izquierdo de la órbita, se tiene:

$$c = a \cdot e = 1,5523819 \cdot 10^6;$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 8,638593959 \cdot 10^{15};$$

y el parámetro p de la órbita elíptica es:

$$p = \frac{b^2}{a} = 9,2931075 \cdot 10^7 \text{ y la ecuación es:}$$

$$r = \frac{p}{1 - e \operatorname{cos} \alpha} = \frac{9,2931075 \cdot 10^7}{1 - 0,0167 \operatorname{cos} \alpha}$$

$$\text{Perihelio} = a - c = 9,14046181 \cdot 10^7 \text{ millas.}$$

$$\text{Afelio} = a + c = 9,45093819 \cdot 10^7 \text{ millas}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Determinar las cónicas que se dan en coordenadas polares mediante las ecuaciones siguientes:

$$\text{a) } r = \frac{5}{1 - \frac{1}{2} \cos \alpha}$$

$$\text{b) } r = \frac{6}{1 - \cos \alpha}$$

$$\text{c) } r = \frac{10}{1 - \frac{3}{2} \cos \alpha}$$

$$\text{d) } r = \frac{12}{2 - \cos \alpha}$$

$$\text{e) } r = \frac{5}{3 - 4 \cos \alpha}$$

$$\text{f) } r = \frac{1}{3 - 3 \cos \alpha}$$

Solución:

a) Elipse b) Parábola c) Una rama de una hipérbola d) Elipse e) Una rama de una hipérbola f) Parábola.

2) Dada la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$, hallar la ecuación polar de su rama izquierda, suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está:

a) en el foco izquierdo de la hipérbola;

b) en el foco derecho.

Solución:

$$\text{a) } r = \frac{144}{5 + 13 \cos \alpha}$$

$$\text{b) } r = -\frac{144}{5 + 13 \cos \alpha}$$

3) Hallar en la elipse $r = \frac{12}{3 - \sqrt{2} \cos \alpha}$ los puntos cuyos radios polares son iguales a 6.

Solución:

$$\left(6, \frac{\pi}{4}\right), \left(6, -\frac{\pi}{4}\right)$$

4) Hallar en la hipérbola $r = \frac{15}{3 - 4 \cos \alpha}$ los puntos cuyos radios polares son iguales a 3.

Solución:

$$\left(3, 2\frac{\pi}{3}\right), \left(3, -2\frac{\pi}{3}\right)$$

5) Hallar en la parábola $r = \frac{p}{1 - \cos \alpha}$ los puntos :

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99