– Álvaro Santos –

Prof José Luis López

Ej 12 $\text{vol}(R) = \frac{1}{3} h \text{ Área}(D)$ $\longrightarrow g(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$

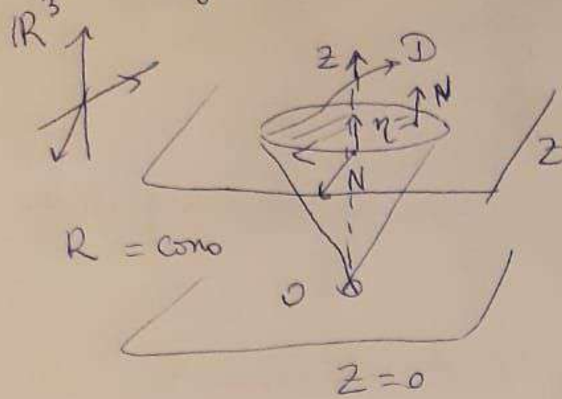


Fig. 1

$R \doteq x^2+y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq h$.

$\doteq g(x,y,z) = 0$

Vamos a aplicar el Teorema de Gauss (o de la Divergencia) para: R = cono

$N \doteq \partial R \longrightarrow \mathbb{R}^3$ < unitario, $N \perp \partial R$.

$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, campo

$(x,y,z) \mapsto (x,y,z)$

y los elementos de < volumen Ω, área w, donde

$$w(x)(v_2,\dots,v_m) = \Omega(x)(N(x),v_2,\dots,v_m) = \det(N(x),v_2,\dots,v_m)$$

Como R es compacto, por el Tma. de Gauss, se cumple que

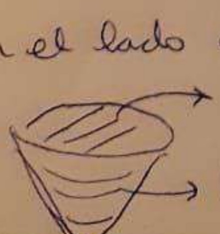
$$\left[\int_R \text{div} F \,\Omega = \int_{\partial R} \langle N, F\rangle\, w\right]$$

(con las orientaciones adaptadas pertinentes).

En nuestro caso, es fácil ver que el lado izquierdo de la anterior igualdad es: $\boxed{\int_R \text{div} F\, \Omega = 3\,\text{vol}(R)}$ (1)

ya que $\text{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 1+1+1 = 3$.

En el lado derecho, hacemos $\partial R = D \cup L$, donde



$\longrightarrow D$ = "tapa"

$\longrightarrow L$ = "cara lateral"

D y L se cortan en un conjunto de medida nula, por lo que

$$\int_{\partial R} \langle N, F\rangle \omega = \int_{\underset{\underset{D}{\shortparallel}}{\partial R_1}} \langle N, F\rangle \omega + \int_{\underset{\underset{L}{\shortparallel}}{\partial R_2}} \langle N, F\rangle \omega$$

Pero $N|_D = \vec{e}_3$, $N|_{L} = \dfrac{(x, y, -z)}{\|(x, y, -z)\|}$, así que las respectivas integrales quedarían así:

$$\boxed{\int_D \langle N, F\rangle \omega} = \int_D \langle \vec{e}_3, (x, y, z)\rangle \omega = \int_{\Phi_D([0,h]\times[0,2\pi])} z\, \omega$$

donde $\Phi_D : \begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \\ z = h \end{cases}$, $0 \le \rho \le h$, $0 \le \theta \le 2\pi$, parametización de D. Pero

$$\int_{\Phi_D([\ ]\times[\ ])} z\,\omega = \int_{[0,h]\times[0,2\pi]} \Phi^*(z\omega) \underset{z=h}{=} h \int_{\Phi(\quad)} \omega = h \int_D \omega = \boxed{h \cdot \text{Área}(D)}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_D \langle N, F\rangle \omega = h \cdot \text{Área}(D)} \quad (2)$$

(3) $\boxed{\int_L \langle N, F \rangle \omega = 0}$ ya que $\langle N, F \rangle |_L = \frac{1}{\underbrace{\|\cdot\|}_{\|(x,y,-z)\|}} \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle$

$$= \frac{1}{\|(x,y,-z)\|} \underbrace{(x^2+y^2-z^2)}_{\overset{\shortparallel}{0} \to (x,y,z) \in L} = 0.$$

A la vista de (1), (2) y (3), se obtiene el resultado deseado.

$\boxtimes$