

PROBLEMA 1.

SI NO

- 1 Sea X un conjunto y d_d la distancia discreta. Entonces (X, d_d) es un espacio métrico completo.
- 2 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n+2}$ es convergente.
- 3 Si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables, entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
- 4 Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in A, |f(x)| < 1$. Entonces, $\sum_{n=0}^{\infty} (f(x))^n = \frac{1}{1-f(x)}$.
- 5 En (\mathbb{R}, d_n) la unión finita de conjuntos conexos es un conexo.
- 6 Sean $(X, d), (X', d')$ espacios métricos y $f : X \rightarrow X'$ continua. Entonces, si $A \subset X'$ es abierto, entonces $f^{-1}(A)$ es cerrado.
- 7 Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, entonces f es continua en a .
- 8 $(1)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{2k\pi i}{n}\right)$, $k = 0, \dots, n-1$.
- 9 Entre $(-1, 1)$ y \mathbb{R} existe una biyección.
- 10 Si $y_n = (-1)^n n$, $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n} = e$.
- 11 El conjunto de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} n! (x-1)^n$ es $C = \{1\}$.
- 12 Si $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = a$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$.
- 13 La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $(0, 1)$.
- 14 Sean $A \subset \mathbb{R}^2$, A abierto y no vacío, y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Si $f \in C^2(A)$, entonces $\forall a \in A$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$.
- 15 Sea $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^{-1}$. Entonces, f es continua en su dominio.
- 16 Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, y $s = \sup A$. Entonces, $\forall \delta > 0$, $\exists a \in A \mid s - \delta < a \leq s$.
- 17 La ecuación $ax = b$, donde $a, b, x \in \mathbb{Z}$, tiene solución única.
- 18 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$. Entonces, existe $f'(0)$.
- 19 Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en A . Si $\forall x \in A f'(x) = 0$, entonces $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in A f(x) = k$.
- 20 Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y el sistema de ecuaciones $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ no tiene solución, entonces f no tiene extremos.

Ley de alumnos

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



E.T.S.I.

PROBLEMA 2

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$.

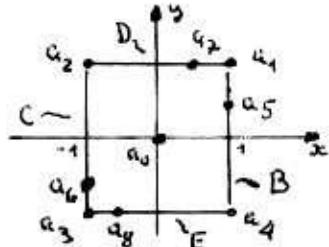
- a) (4 puntos) Encontrar los valores máximos y mínimos de f en el conjunto $A = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.
 b) (3 puntos) Siendo $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x, y) + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

estudiar la continuidad y la existencia de derivadas parciales de g en \mathbb{R}^2 .

- c) (1 punto) Comprobar que $x \frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial y} = g$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$.
 d) (2 puntos) Calcular $\text{grad}(g^2 - f)$ para $(x, y) \neq (0, 0)$ y la derivada direccional de $g^2 - f$ en $(1, 1)$ en la dirección de $h = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

a) PUESTO QUE A ES UN COMPACTO Y f ES CONTINUA EN A, LA FUNCIÓN ALCANZA VALORES MÁXIMO Y MÍNIMO EN A, QUE PUEDEN ALCANZARSE EN PUNTOS INTERIORES DE A O EN PUNTOS DE FRONTERA DE A. COMO f ∈ C⁰(IR), EN EL INTERIOR DE A (QUE ES ABIERTO) ESTO PUEDE OCURRIR SÓLO EN PUNTOS ESTACIONARIOS DE f. SIENDO $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y$ Y $\frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y$, ESTÁ CLARO QUE EN EL INTERIOR DE A HAY UN ÚNICO PUNTO ESTACIONARIO $a_0 = (0, 0)$ DE f. LA FRONTERA DE A CONSTA DE LOS PUNTOS $a_1 = (1, 1)$, $a_2 = (-1, 1)$, $a_3 = (-1, -1)$, $a_4 = (1, -1)$ Y DE LOS CONJUNTOS B = {x = 1, -1 < y < 1}, C = {x = -1, -1 < y < 1}, D = {y = 1, -1 < x < 1} Y E = {y = -1, -1 < x < 1}. EN B LA FUNCIÓN f SE REDUCE A $f(z, y) = 1 - y + y^2 = \varphi(y)$, -1 < y < 1; COMO φ ES DIFERENCIABLE, -1 < y < 1 ES ABIERTO EN IR Y φ'(y) = -1 + 2y, φ PUEDE ALCANZAR EXTREMO, UNICAMENTE EN EL PUNTO $y = \frac{1}{2}$ Y $f|_B$ EN $a_5 = (1, \frac{1}{2})$. TENIENDO EN CUENTA QUE $f(-x, -y) = f(x, y)$ Y $f(y, x) = f(x, y)$, ES FÁCIL VER QUE $f|_C$ ALCANZA EXTREMO EN $a_6 = (-1, -\frac{1}{2})$, QUE $f|_D$ ALCANZA EXTREMO EN $a_7 = (\frac{1}{2}, 1)$ Y QUE $f|_E$ ALCANZA EXTREMO EN $a_8 = (-\frac{1}{2}, -1)$. LUEGO, LOS VALORES MÁXIMO Y MÍNIMO DE f|_A PUEDEN ESTAR SOLO EN UNO DE LOS 9 PUNTOS a_0, \dots, a_8 Y, COMO $f(a_0) = 0$, $f(a_1) = f(a_3) = 1$, $f(a_2) = f(a_4) = 3$, $f(a_5) = f(a_7) = f(a_6) = f(a_8) = \frac{3}{4}$, ESTÁ CLARO QUE EN A LA FUNCIÓN



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

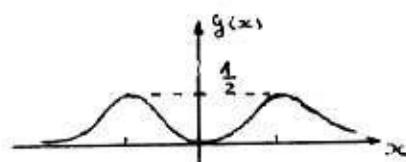
alguno y $x, y, z = x, y, z$, SE TIENE $\text{grad}(g^2 - f)(x, y) = (y, x)$ Y, POR LO TANTO,

PROBLEMA 3

Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$.

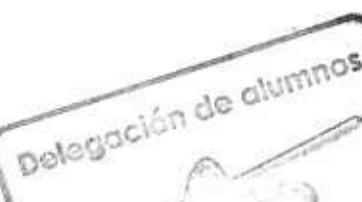
- a) (4 puntos) Comprobar que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $g(a) < 1$ y $g(x) \leq g(a)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- b) (3 puntos) Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión funcional (f_n) , siendo $f_n = (g(x))^n$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- c) (3 puntos) Estudiar la compactidad, conexión y completitud del conjunto $g(A)$, donde $A = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

a) $g'(x) = \frac{2x(1-x^4)}{(1+x^4)^2}$. Como $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ y \mathbb{R} es abierto, g puede tener extremos únicamente en los puntos estacionarios, o sea, en los puntos $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$, siendo $g(-1) = g(1) = \frac{1}{2}$ y $g(0) = 0$. Puesto que $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) \geq 0$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, está claro que g alcanza máximo absoluto igual a $\frac{1}{2}$ en $x = -1$ y $x = 1$. Por lo tanto, existe, por ejemplo, $a = 1$ tal que $g(a) = \frac{1}{2} < 1$ y $g(x) \leq g(a)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.



b) Puesto que $0 \leq \frac{x^2}{1+x^4} < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, está claro que la sucesión funcional (f_n) tal que $f_n(x) = (\frac{x^2}{1+x^4})^n$ converge puntualmente a la función $f(x) = 0$. Además, es evidente que $M_n = \sup_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = (\frac{1}{2})^n$. Demos que $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$; consecuentemente, la sucesión (f_n) converge uniformemente en \mathbb{R} a la función nula f .

c) De lo visto en a) se deduce que $g(A) = (0, \frac{1}{2}]$. Luego, $g(A)$ no es compacto (porque no es cerrado), es conexo (porque es un intervalo) y no es completo (porque no es cerrado).



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**