

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS II FEBRERO 2002

SOLUCIONES

PROBLEMA 1

SI NO

- 1 Sea (a_n) una sucesión real tal que $\lim a_{2n+1} = a$, $\lim a_{2n} = b$ y $a < b$. Entonces $\overline{\lim} a_n = b$.
- 2 Todo espacio métrico completo está acotado.
- 3 Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = 0$ para todo $x \in A$. Entonces f es constante en A .
- 4 Si $x, y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, entonces $xy \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
- 5 $f(x) = e^x + \cos x$ es uniformemente continua en $(0, 1)$.
- 6 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} = 0$.
- 7 Si $f(x, y) = \operatorname{sh} x + e^y$, la derivada direccional de f en el punto $(0, 0)$ es máxima en la dirección $(1, 1)$.
- 8 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-1)^n$ converge únicamente en $x = 1$.
- 9 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x^2 - y^2$ alcanza mínimo relativo en $(0, 0)$.
- 10 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ es convergente.
- 11 Sea $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $g(x) = (\cos x, e^x)$ y sea $a_n = \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n$. Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = (1, 1)$.
- 12 Cualquier $z \in \mathbb{C}$ tiene n raíces n -ésimas distintas.
- 13 Todo subconjunto de un espacio métrico discreto es acotado.
- 14 Si (x_n) es una sucesión real tal que $x_n \leq x_{n+1}$ y $-\pi < x_n < \pi$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces (x_n) converge.
- 15 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos 2n\pi)^{n^2+3n}$ no existe.
- 16 Si $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en A , entonces $f \in C^1(A)$.
- 17 Si (a_n) es una sucesión real, entonces $\overline{\lim} a_n \in \mathbb{R}$.
- 18 Si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que existen $D_1 f(0, 0)$ y $D_2 f(0, 0)$, entonces f es continua en $(0, 0)$.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

PROBLEMA 2

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

- a) (2 puntos) Estudiar la continuidad de f .
- b) (2 puntos) Estudiar la existencia de $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0, 0)$.
- c) (3 puntos) Estudiar la diferenciabilidad de f en $(0, 0)$.
- d) (1 punto) Estudiar si f tiene extremo en $(0, 0)$.
- e) (2 puntos) Analizar el carácter de abierto, cerrado, compacto, conexo y completo de $f^{-1}(\{0\})$ en (\mathbb{R}^2, d_u) .

a) OBIAMENTE f ES CONTINUA EN $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. TAMBIÉN LO ES EN $(0, 0)$, YA QUE $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} r \cdot \sin \varphi \cos 2\varphi = 0 = f(0, 0)$. LUEGO, f ES CONTINUA EN \mathbb{R}^2 .

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(h_1, 0) - f(0, 0)}{h_1} = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h_1} = 0;$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(0, h_2) - f(0, 0)}{h_2} = \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{-h_2 - 0}{h_2} = -1.$

c) SI f FUERE DIFERENCIABLE EN $(0, 0)$, DEBERÍA SER $f(h_1, h_2) - f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)h_2 + \varphi(h) \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = -h_2 + \varphi(h) \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$ CON $\varphi(h) \rightarrow 0$ CUANDO $h = (h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)$. COMO $f(h_1, h_2) - f(0, 0) = h_2 \frac{h_1^2 - h_2^2}{h_1^2 + h_2^2}$, RESULTARÍA QUE $\varphi(h) = \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} (h_2 + h_2 \frac{h_1^2 - h_2^2}{h_1^2 + h_2^2})$. PERO SI, POR EJEMPLO, $h_2 = h_1$, SE TENDRÍA $\varphi(h) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{h_1}{|h_1|}$, O SEA, $\varphi(h) \not\rightarrow 0$ CUANDO $h \rightarrow 0$. LUEGO, f NO ES DIFERENCIABLE EN $(0, 0)$.

d) f NO PUEDE TENER EXTREMO EN $(0, 0)$ YA QUE...

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



... DISTINTO DE \mathbb{R}^2 Y DEL \emptyset .

PROBLEMA 3

Se considera la sucesión funcional (f_n) donde $f_n(x) = \frac{\cos^2 nx}{2^{nx}}$.

- a) (4 puntos) Encontrar la función límite $f = \lim f_n$ en $[0, +\infty)$, y estudiar la convergencia uniforme de (f_n) en $[0, +\infty)$ y $[a, +\infty)$ con $a > 0$.
- b) (2 puntos) Estudiar la convergencia uniforme de la serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ en el conjunto $[1, +\infty)$.
- c) (2 puntos) Calcular una cota del error $R_n(1)$ que se comete si la serie se aproxima por la n -ésima suma parcial, o sea,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(1) \approx \frac{\cos^2 1}{2} + \frac{\cos^2 2}{2^2} + \dots + \frac{\cos^2 n}{2^n}.$$
- d) (2 puntos) Estudiar si tiene mínimo el conjunto $\{R_n(1), n \in \mathbb{N}\}$.

a) ESTÁ CLARO QUE $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{SI } x > 0, \\ 1 & \text{SI } x = 0. \end{cases}$ POR ESO $|f(x) - f_n(x)| =$

$$= \begin{cases} \frac{\cos^2 nx}{2^{nx}} & \text{SI } x > 0, \\ 0 & \text{SI } x = 0. \end{cases}$$
 LUEGO, EN $[0, +\infty)$ SE TIENE $M_n = \sup_{x \in [0, +\infty)} |f(x) - f_n(x)| = 1 \neq 0$

CUANDO $n \rightarrow \infty$ Y NO HAY CONVERGENCIA UNIFORME. EN CAMBIO, EN $[a, +\infty)$ CON $a > 0$ SE TIENE $M_n = \frac{\cos^2 na}{2^{na}} < \frac{1}{2^{na}} \rightarrow 0$ SI $n \rightarrow \infty$ Y HAY CONVERGENCIA UNIFORME.

b) SI $x \in [1, \infty)$, SE CUMPLE $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$ ($n \in \mathbb{N}$) Y, COMO $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ CONVERGE, LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ CONVERGE UNIFORMEMENTE EN $[1, \infty)$.

c) COMO $R_n(1) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(1) - \sum_{k=1}^n f_k(1) = \frac{\cos^2(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\cos^2(n+2)}{2^{n+2}} + \dots \leq \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) =$

$$= \frac{1}{2^n} \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$$
 PARA TODO $n \in \mathbb{N}$.

d) COMO $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(1) = 0$ (DEBIDO A LA CONVERGENCIA DE LA SERIE EN $x=1$) Y $R_n(1) \geq 0$ (POR SER TODOS LOS SUMANDOS ≥ 0), RESULTA QUE $(\exists \min \{R_n(1), n \in \mathbb{N}\}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N} \text{ TAL QUE } R_k(1) = \frac{\cos^2(k+1)}{2^{k+1}} + \frac{\cos^2(k+2)}{2^{k+2}} + \dots = 0) \Rightarrow (\cos(k+1) =$$

$$= \cos(k+2) = \dots = 0).$$
 PERO ESTO ES IMPOSIBLE, YA QUE $(m \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\cos m \neq 0).$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70