SOLUCIONES Feb. 2003

PROBLEMA 1

	SI	NO	
1	☐	☒	Si $(x_n) \subset \mathbb{R}$, entonces $\overline{\lim} x_n \in \mathbb{R}$.
2	☐	☒	Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable y creciente, entonces $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
3	☐	☒	Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, también converge $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$.
4	☐	☒	Existe una biyección entre $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}$.
5	☒	☐	Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $f \in C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, entonces $D_{12} f(x,y) = D_{21} f(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
6	☐	☒	Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, existe $\xi \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.
7	☒	☐	La serie $\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-1)^n$ converge únicamente en $x = 1$.
8	☒	☐	El conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z = 0\}$ es conexo.
9	☒	☐	$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} e^{-1/x} = 0$.
10	☒	☐	Para cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in \mathbb{R}^2$ existen entornos $U(x), V(y) \subset \mathbb{R}^2$ tales que $U(x) \bigcap V(y) \neq \varnothing$.
11	☐	☒	Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es impar y $f \in C^\infty$, entonces $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
12	☐	☒	La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$ converge.
13	☒	☐	Si $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ es tal que $f(x) = x^2$ y $P = \{0; 1; 2\}$ es una partición de $[0,2]$, entonces la suma superior de Darboux $S(f;P)$ es igual a 5.
14	☐	☒	Si $\lim_{x \to a} f(x) \neq 0$, existe un entorno $\overset{\circ}{U}(a)$ tal que $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$, $f(x) \neq 0$.
15	☐	☒	En $\mathbb{R}^n$ el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lVert x \rVert = 1\}$ no es compacto.
16	☐	☒	Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es diferenciable en $a \in \mathbb{R}^2$, entonces la matriz de Jacobi $f'(a)$ es simétrica.
17	☐	☒	No existe $\lim (\cos 2n\pi)^{n^2+3n}$.
18	☐	☒	$\int \ln x dx = x \ln x + x + C$.
19	☐	☒	Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene extremo relativo en $a \in \mathbb{R}$, entonces $f'(a) = 0$ y $f''(a) \neq 0$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

PROBLEMA 2

Sea $f:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ si $x\neq 0$ y $f(0)=1$.

a) (2 puntos) Calcular la derivada y estudiar su continuidad.

b) (3 puntos) Encontrar los extremos relativos, así como los extremos absolutos o, en su caso, el ínfimo y el supremo.

c) (3 puntos) Siendo $g(x)=x^2 f(x)$, encontrar el area encerrada entre la gráfica de g y el intervalo $[-\pi,\pi]$ del eje de abscisas.

d) (2 puntos) Considerando g como una función definida en $\mathbb{R}$, estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g\left(\frac{1}{n}\right)$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g\left(n^2\right)$.

NOTA (apartado b): La ecuación $x\cos x=\operatorname{sen} x$ tiene $x=0$ como única solución en el intervalo $[-\pi,\pi]$.

(a) $f'(x)=\frac{1}{x^2}(x\cos x-\operatorname{sen} x)$ SI $x\neq 0$ Y $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} h-h}{h^2}=0.$

ESTÁ CLARO QUE f' ES CONTINUA SI $x\neq 0$ Y TAMBIÉN EN $x=0$, YA QUE $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(x\cos x-\operatorname{sen} x)=0=f'(0)$. LUEGO, f' ES CONTINUA EN $(-\pi,\pi)$.

(b) COMO f ES DIFERENCIABLE, SUS EXTREMOS RELATIVOS (INTERIORES) EN $(-\pi,\pi)$ SON PUNTOS ESTACIONARIOS. ES OBVIO QUE $x=0$ ES UN PUNTO ESTACIONARIO. SI $x\neq 0$, ENTONCES $f'(x)=0 \Longrightarrow \varphi(x)=x\cos x-\operatorname{sen} x=0$; PERO, φ ES DECRECIENTE (YA QUE $\varphi'(x)=$ $=-x\operatorname{sen} x\leq 0$) Y SE ANULA EN $x=0$, DE MODO QUE $x\neq 0\Rightarrow f'(x)\neq 0$. LUEGO, HAY UN ÚNICO PUNTO ESTACIONARIO $x=0$. ADEMÁS, ESTÁ CLARO QUE $f(-\pi^+)=f(\pi^-)=0$ Y QUE $f(0)=1$. POR LO TANTO, f TIENE EN $x=0$ UN MÁXIMO (RELATIVO Y ABSOLUTO) IGUAL A 1, NO ALCANZA MÍNIMO Y TIENE ÍNFIMO IGUAL A 0.

(c) OBVIAMENTE $g(x)=x\operatorname{sen} x$. PUESTO QUE g ES PAR EN $[-\pi,\pi]$ Y NO NEGATIVA EN $[0,\pi]$, EL AREA BUSCADA ES $S=2\int_0^{\pi} x\operatorname{sen} x\,dx$. INTEGRANDO POR PARTES, SE TIENE $\int x\operatorname{sen} x\,dx=-x\cos x+\int\cos x\,dx=-x\cos x+\operatorname{sen} x+C$, DE DONDE RESULTA QUE $S=2(-x\cos x+\operatorname{sen} x)\Big|_0^{\pi}=2\pi$.

(d) SEA $g(x)=x\operatorname{sen} x$ CON $x\in\mathbb{R}$. ENTONCES LA SERIE $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g(\frac{1}{n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{1}{n}$ ES DE TÉRMINOS POSITIVOS Y CONVERGE, YA QUE $\frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n^2}$ CUANDO $n\to\infty$ Y LA SERIE $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ CONVERGE. EN CAMBIO, LA SERIE $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g(n^2)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\operatorname{sen} n^2$ DIVERGE, YA QUE NO VERIFICA EL CRITERIO NECESARIO.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

PROBLEMA 3

Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y)=(f_1(x,y),f_2(x,y))$ con $f_1(x,y)=e^{x-y}$ y $f_2(x,y)=x+\operatorname{sen} y$ y sea $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que $g(u,v)=u-v$.

a) (2 puntos) Estudiar el carácter de abierto, cerrado, conexo y compacto de la preimagen $A=f_1^{-1}(\{1\})\subseteq\mathbb{R}^2$.

b) (3 puntos) Estudiar los extremos de f_2 y calcular el valor de la expresión $\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}\right)$ en el punto $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

c) (3 puntos) Estudiar la diferenciabilidad de la composición $F=g\circ f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ y calcular $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$.

c) (2 puntos) Calcular la diferencial de F en un punto $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ y la derivada direccional de F en (0,0) según el vector $v=(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}})$.

(a) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid e^{x-y}=1\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x\}$ ES UN CONJUNTO NO ABIERTO, CERRADO, CONEXO Y NO COMPACTO.

(b) $\frac{\partial f_2}{\partial x}=1$ Y $\frac{\partial f_2}{\partial y}=\cos y$ EXISTEN Y SON CONTINUAS EN $\mathbb{R}^2$; POR ESO, f_2 ES DIFERENCIABLE EN $\mathbb{R}^2$ Y, COMO $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ $\frac{\partial f_2}{\partial x}\neq 0$, NO TIENE EXTREMOS EN $\mathbb{R}^2$.

POR OTRO LADO, $\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}\right)=(-\operatorname{sen} y)(e^{x-y}-e^{x-y}+e^{x-y})=-e^{x-y}\operatorname{sen} y$ VALE -1 EN $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

(c) LAS DERIVADAS PARCIALES DE LAS COMPONENTES DE f Y LAS DERIVADAS PARCIALES DE g EXISTEN Y SON CONTINUAS EN $\mathbb{R}^2$, DE MODO QUE AMBAS FUNCIONES SON DIFERENCIABLES; ENTONCES $F=g\circ f$ ES DIFERENCIABLE EN $\mathbb{R}^2$ COMO COMPOSICIÓN DE FUNCIONES DIFERENCIABLES.

ADEMÁS, $F'(x,y)=g'(u,v)f'(x,y)$, ES DECIR, $\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial g}{\partial u},\frac{\partial g}{\partial v}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y}\end{pmatrix}=(1,-1)\begin{pmatrix}e^{x-y} & -e^{x-y}\\ 1 & \cos y\end{pmatrix}$,

DE DONDE $\frac{\partial F}{\partial x}=e^{x-y}-1$, $\frac{\partial F}{\partial y}=-e^{x-y}-\cos y$.

(d) COMO F ES DIFERENCIABLE EN $\mathbb{R}^2$, PARA $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ Y TODO $h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$ SE TIENE $dF(a,b)h=\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)h_1+\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)h_2=(e^{a-b}-1)h_1+(-e^{a-b}-\cos b)h_2$ O BIEN $dF(a,b)=(e^{a-b}-1)dx-(e^{a-b}+\cos b)dy$.

PARA LA DERIVADA DIRECCIONAL DE F EN EL PUNTO (a,b) SEGÚN EL VECTOR UNITARIO $v=(v_1,v_2)$ SE TIENE $\frac{\partial F}{\partial v}(a,b)=\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)v_1+\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)v_2$ Y, POR LO TANTO, SI $(a,b)=(0,0)$ Y $v=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ RESULTA $\frac{\partial F}{\partial v}(0,0)=0\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}+(-2)\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.