

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The text is set against a light blue, arrow-shaped background that points to the right. Below the text, there is a horizontal orange bar with a slight gradient and a drop shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark blue font. The text is set against a light blue, arrow-shaped background pointing to the right. Below the text is a horizontal orange bar with a slight gradient and a drop shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Problema 3

Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$f(x, y) = \begin{cases} y\sqrt{\frac{|x^2 - y^2|}{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) (3 puntos) Estudiar el carácter abierto, cerrado, compacto y conexo de $f^{-1}(\{0\})$.
- b) (1 punto) Estudiar la continuidad de f en \mathbb{R}^2 .
- c) (3 puntos) Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
- d) (3 puntos) Estudiar la diferenciabilidad de f en $(0, 0)$.

a) Es obvio que $A = f^{-1}(\{0\}) = \{(x, y) : y = 0\} \cup \{(x, y) : y = \pm x\}$. Geométricamente el conjunto A está formado por los puntos del eje de las ordenadas y por los puntos de las bisectrices de los cuadrantes. Luego, está claro que A no es abierto, es cerrado, no es compacto y es conexo.

b) Es obvio que f es continua en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. La continuidad de f en $(0, 0)$ equivale a que $f(x, y)$ tiende a $f(0, 0) = 0$ cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$. Pasando a coordenadas polares ($x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$) y sabiendo que el límite del producto de una infinitésima por una cantidad acotada es una infinitésima, se tiene

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y\sqrt{\frac{|x^2 - y^2|}{x^2 + y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} r \sin \varphi \sqrt{|\cos 2\varphi|} = 0 = f(0, 0),$$

de modo que hay también continuidad en $(0, 0)$.

Por lo tanto, $f(x, y)$ es continua en \mathbb{R}^2 .

c) Por definición

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 \cdot \sqrt{1} - 0}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot \sqrt{1} - 0}{h} = 1.$$

d) La diferenciabilidad de f en $(0, 0)$ equivale a que

$$f(0 + h_1, 0 + h_2) - f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \cdot h_2 + \alpha \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = h_2 + \alpha \sqrt{h_1^2 + h_2^2},$$

donde α tiende a cero cuando (h_1, h_2) tiende a cero. El cálculo directo da

$$f(0 + h_1, 0 + h_2) - f(0, 0) = h_2 \sqrt{\frac{|h_1^2 - h_2^2|}{h_1^2 + h_2^2}},$$

de modo que

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{h_2 \sqrt{\frac{|h_1^2 - h_2^2|}{h_1^2 + h_2^2}}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99