

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS II - 2 de febrero de 2005 Problema 1

1. Todo subconjunto no vacío de \mathbb{Q} acotado inferiormente tiene:

- a) mínimo.
 b) supremo.
 c) ninguna de las anteriores.

2. Todo subconjunto no vacío de \mathbb{Z} acotado inferiormente tiene:

- a) mínimo.
 b) supremo.
 c) ninguna de las anteriores.

3. Los números complejos que verifican la ecuación $\bar{z} = -z$ forman

- a) el eje real.
 b) el eje imaginario.
 c) ninguna de las anteriores.

4. $\sum_{n=0}^{50} i^n =$

- a) 1.
 b) -1.
 c) i .

5. El conjunto $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} [0, \frac{1}{n}]$ es

- a) vacío.
 b) abierto.
 c) compacto.

6. Si $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$ el conjunto $\{x \in \mathbb{R} / f(x) = 0\}$ es

- a) cerrado.
 b) abierto.
 c) ni abierto ni cerrado.

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2+1} \right)^{n^2} =$

- a) 1.
 b) e^2 .
 c) e .

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

8. Dada la función $D(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ se verifica que $\lim_{x \rightarrow 1} D(x)$

- a) = 1.
 b) = 0.
 c) no existe.

9. La función real $f(x) = \frac{1}{x}$ definida en $\mathbb{R} - \{0\}$ es

- a) decreciente.
 b) acotada.
 c) continua.

10. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) , y $f(a) = f(b)$, entonces

- a) existe $\xi \in (a, b) / f(\xi) = 0$.
 b) existe un único $\xi \in (a, b) / f'(\xi) = 0$.
 c) ninguna de las anteriores.

11. La derivada de $f(x) = \arcsen x$ es

- a) $(1 + x^2)^{-1/2}$.
 b) $(1 - x)^{-1/2}$.
 c) $(1 - x^2)^{-1/2}$.

12. Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable con $f'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$. Entonces f es

- a) monótona creciente.
 b) inyectiva.
 c) sobreyectiva.

13. El gradiente de $f(x, y) = \sen x + e^{xy}$ en el punto $(0, 1)$ vale

- a) 0.
 b) $(2, 0)$.
 c) $(0, 2)$.

14. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie real. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, entonces

- a) la serie es convergente.
 b) la serie es divergente.
 c) ninguna de las anteriores.

15. Siendo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dos

- a) si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente
 b) si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ es convergente
 c) ninguna de las anteriores.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS II - 2 de febrero de 2005 Problema 2

2.1 (1 punto) Demuestre, mediante el uso de la definición de límite, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

2.2 Considere la función $f(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy^2 + y^3$:

2.2(a) (1.25 puntos) Estudie la existencia y, en su caso, el carácter (máximo o mínimo) de los extremos relativos y absolutos de f en \mathbb{R}^2 .

2.2(b) (1.25 puntos) Estudie la existencia y, en su caso, el carácter de los extremos absolutos de f en

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq x\}.$$

Solución:

2.1 Observemos que $|\frac{1}{n} - 0| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n}$. Por tanto, dado un $\epsilon > 0$ arbitrario, si $\epsilon \geq 1$ podemos tomar $N = 1$, mientras que si $\epsilon < 1$ podemos tomar $N = [\frac{1}{\epsilon}] + 1 > 1$, donde $[x]$ denota la parte entera de x . De esta forma, se tendrá que si $n > N$ entonces

$$|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \frac{1}{[\frac{1}{\epsilon}] + 1} \leq \frac{1}{\epsilon} = \epsilon,$$

ya que $[\frac{1}{\epsilon}] + 1 \geq \frac{1}{\epsilon}$.

2.2(a) Dado que \mathbb{R}^2 es un abierto, y f es diferenciable en todo \mathbb{R}^2 , un punto de extremo, relativo o absoluto, (a, b) habrá de ser un punto estacionario de f y, por tanto, deberá verificar la condición necesaria $D_x f(a, b) = D_y f(a, b) = 0$, es decir,

$$\begin{cases} a - b^2 = 0 \\ 3b^2 - 2ab = 0, \end{cases}$$

cuyas soluciones son,

$$p_1 \equiv \left(\frac{9}{4}, \frac{3}{2}\right) \text{ y } p_2 \equiv (0, 0).$$

a) Estudiemos $p_1 = (\frac{9}{4}, \frac{3}{2})$. Dado que para un incremento cualquiera (h_1, h_2) se tiene

$$(h_1^2 - 4yh_1h_2 + (6y - 2x)h_2^2)(p_1) = h_1^2 - 6h_1h_2 + \frac{9}{2}h_2^2 = (h_1 - 3h_2)^2 - \frac{9}{2}h_2^2,$$

tenemos una expresión que claramente no conserva el signo para $(h_1, h_2) \neq (0, 0)$ (tómese $h_1 = 3h_2$ y entonces es negativa, mientras que para $h_1 \neq 0$ y $h_2 = 0$ es positiva). Por tanto, f no alcanza extremo alguno en p_1 . La misma conclusión se desprende del criterio basado en los menores de la matriz Hessiana, que en p_1 es $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$ por lo que se tiene $\Delta_2 = \frac{9}{2} - 9 = -\frac{9}{2} < 0$.

b) Por otra parte, para $p_2 = (0, 0)$,

que es justamente el caso que

es lógico, tampoco discrimina

Observemos, sin embargo, que

de h_2 . Por tanto, tampoco ha

En conclusión, f no alcanza extremo alguno en \mathbb{R}^2 .

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

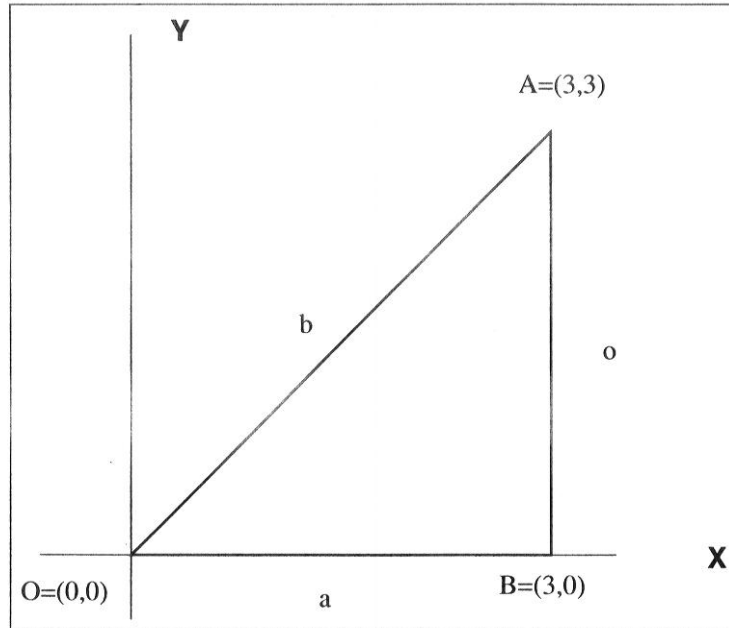


Figura 1: Dominio de la función f

2.2(b) Dado que el conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ es cerrado y acotado, se trata de un compacto y, al ser f continua en A , por ser suma de funciones elementales, f necesariamente alcanza extremos absolutos en A .

Observemos primero que los únicos posibles extremos en el interior de A , esto es, en el abierto $A - Fr(A)$, son aquellos que, correspondiendo a puntos estacionarios calculados anteriormente, caigan en el interior. El único de tales es p_1 , que ya se ha visto que no es extremo. Por tanto, sólo resta estudiar $Fr(A)$, es decir, la reunión de los vértices O , A y B y de los lados b , o y a (véase la figura), es decir,

$$Fr(A) = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 3, y = x\} \cup \{(3,3)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 3, 0 < y < 3\} \cup \{(3,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, 0 < x < 3\}.$$

Tenemos que $f(0,0) = 0, f(3,3) = f(3,0) = \frac{9}{2}$. Por otro lado, observemos que, tanto f restringida al conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 3, y = x\}$, como restringida al conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, 0 < x < 3\}$, es la función de una variable $u : (0,3) \rightarrow \mathbb{R}$, con $u(x) = \frac{x^2}{2}$ que es estrictamente creciente. Finalmente, f restringida al conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 3, 0 < y < 3\}$$

es la función de una variable $v : (0,3) \rightarrow \mathbb{R}$, con $v(y) = y - 3y^2 + \frac{9}{2}$. Como $v'(y) = 3y^2 - 6y$, v tiene un punto estacionario en $y = 2$, que es mínimo local de v , ya que $v''(y) = 6y - 6$ es positiva en $y = 2$. Observemos que $v(2) = \frac{1}{2}$.

En conclusión, f tiene máximos absolutos en los puntos $(3,3)$ y $(3,0)$, mientras que tiene un mínimo absoluto en $(0,0)$.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

3.1 (1 punto) Demuestre por inducción que

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3.2 (a) (0.5 puntos) Calcule el radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$$

3.2 (b) (0.75 puntos) Calcule la función suma de la serie anterior en su intervalo de convergencia. Indique si la serie es convergente en los extremos del intervalo.

3.2 (c) (0.25 puntos) Indique razonadamente si la serie anterior converge uniformemente en el intervalo $[-1/2, 1/2]$.

3.2 (d) (1 punto) Calcule la función suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{2n-1} = 2x + 4x^3 + 6x^5 + \dots$$

Solución:

3.1 Para $n = 1$, el resultado es cierto pues

$$1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}.$$

Suponiendo el resultado cierto para n , comprobemos que se verifica para $n + 1$, es decir, que se verifica la igualdad

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}.$$

Por la hipótesis de inducción, tenemos que

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

y, efectivamente, se verifica que

$$\frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6}{6} = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}.$$

3.2 (a) La serie de potencias $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$ es una serie geométrica de razón x^2 , y por lo tanto será convergente si y sólo si $|x^2| < 1$, es decir, si y sólo si $|x| < 1$. Por lo tanto, el radio de convergencia es $R = 1$.

Alternativamente, la serie se puede escribir como $\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ con

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

de donde se deduce que \limsup

3.2 (b) La suma de la serie geométrica

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

en el intervalo de convergencia $(-1, 1)$. En los extremos del intervalo $x = \pm 1$ la serie no es convergente por el razonamiento descrito en el apartado anterior.

3.2 (c) Por ser $[-1/2, 1/2]$ un conjunto compacto comprendido en el intervalo de convergencia, la serie converge uniformemente en él.

3.2 (d) Obsérvese que la serie $2x + 4x^3 + 6x^5 + \dots$ se obtiene derivando término a término la serie de potencias anterior $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$. En el intervalo de convergencia, la serie $2x + 4x^3 + 6x^5 + \dots$ convergerá por tanto a la derivada de la función suma calculada en 3.2 (b), esto es, a

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{1-x^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}.$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**