FMT 2 - SEP'05 - 1/6

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... *Tiempo 50 minutos*

- Cada pregunta tiene una sola respuesta correcta. Marque con una cruz a lo sumo una opción por pregunta. **Acierto +0.2 Error -0.1 Blanco 0.**
- Puntuación del test sobre el total del examen: **3 puntos.**

1. Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ tiene

- [ ] a) mínimo.
- [ ] b) ínfimo.
- [x] c) ninguna de las anteriores.

2. Hay tantos números naturales pares como

- [ ] a) reales.
- [x] b) racionales.
- [ ] c) ninguna de las anteriores.

3. Indique cuál de estos números complejos tiene todas sus raíces cuartas sobre las bisectrices de los cuadrantes del plano.

- [ ] a) $e^{i\pi/4}$.
- [ ] b) $e^{i3\pi/4}$.
- [x] c) -1.

4. $\sum_{n=0}^{3000} i^n =$

- [x] a) 1.
- [ ] b) $2e^{i\pi/4}$.
- [ ] c) $2e^{-i\pi/4}$.

5. En cualquier espacio normado completo se verifica que

- [ ] a) toda sucesión es de Cauchy.
- [x] b) todo cerrado es completo.
- [ ] c) ninguna de las anteriores.

6. Si $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ el conjunto $\{x \in [0,1] \ / f(x) = 0\}$ es

- [ ] a) cerrado.

8. El límite de la sucesión $a_1 = \sqrt{5}$, $a_{n+1} = \sqrt{5 + a_n}$ es

- [ ] a) 1.
- [x] b) $\frac{1+\sqrt{21}}{2}$.
- [ ] c) $5 + \sqrt{5}$.

9. La función real $f(x) = \frac{1}{x}$ definida en $\mathbb{R} - \{0\}$ es

- [x] a) de clase C^∞ en su dominio.
- [ ] b) discontinua en su dominio.
- [ ] c) ninguna de las anteriores.

10. Una función $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$, es continua

- [x] a) en todo punto aislado de A.
- [ ] b) en los puntos de acumulación de A.
- [ ] c) ninguna de las anteriores.

11. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivable con $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$. Entonces f es

- [ ] a) sobreyectiva.
- [x] b) monótona.
- [ ] c) ninguna de las anteriores.

12. La derivada direccional $D_u f$ de $f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ en el punto $(1, 2)$, siendo u el vector unitario de ángulo $\pi/6$ con el eje OX, es

- [x] a) $\frac{13-3\sqrt{3}}{2}$.
- [ ] b) $\frac{13+3\sqrt{3}}{2}$.
- [ ] c) ninguna de las anteriores.

13. El tercer término de la serie de MacLaurin de $f(x) = a^x$, con $a > 0$, es

- [ ] a) $\frac{(a\mathrm{Ln}\,a)^3}{3!}x^3$.
- [x] b) $\frac{(\mathrm{Ln}\,a)^2}{2!}x^2$.
- [ ] c) f no se puede desarrollar.

14. Sea $a_n > 0$, $\forall n \geq 0$. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$

- [ ] a) es necesariamente convergente.
- [ ] b) es necesariamente divergente.
- [x] c) ninguna de las anteriores.

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS II - 6 de septiembre de 2005

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... *Tiempo 50 minutos*

- Puntuación de este problema sobre el total del examen: **3.5 puntos.**

2.1 (1 punto) Desarrolle en serie de Taylor en torno a cero (serie de MacLaurin) la función

$$f(x) = \arctan x,$$

empleando operaciones con series de potencias.

2.2 Considere la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{(n+1)(n+2)(n+3)}. \tag{1}$$

2.2(a) (0.5 puntos) Estudie si es compacto el conjunto de valores reales de p para los que la serie (1) converge.

2.2(b) (1.25 puntos) Calcule la suma de la serie (1) para $p = 1$. [Sugerencia: calcule la suma parcial n-ésima mediante descomposición en fracciones simples.]

2.2(c) (0.75 puntos) Calcule la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}.$$

[Indicación: si resolvió el apartado b), puede utilizar el hecho de que, para $p = 0$, la serie (1) suma 1/12.]

Solución:

2.1 Utilizando el hecho de que

$$f'(x) = \frac{d \arctan x}{dx} = \frac{1}{1+x^2},$$

y que esta función, para $|x| < 1$, es la suma de una serie geométrica de razón $-x^2$, podemos escribir

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 \dots, \quad |x| < 1.$$

Integrando término a término obtenemos

$$f(x) = \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \dots, \quad |x| < 1.$$

2.2 (b) Mediante descomposición en fracciones simples, resulta

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{m}{(m+1)(m+2)(m+3)} = \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{-1/2}{m+1} + \frac{2}{m+2} + \frac{-3/2}{m+3} \right) = \sum_{m=-1}^{n-2} \frac{-1/2}{m+3} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{2}{m+3} + \sum_{m=1}^{n} \frac{-3/2}{m+3},$$

habiendo aplicado los cambios de índice $m \to m+2$ y $m \to m+1$, respectivamente, en las dos primeras sumas. En la última expresión, los únicos términos que no se cancelan son

$$-\frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{2}{n+2} - \frac{3/2}{n+2} - \frac{3/2}{n+3} = \frac{1}{4} + \frac{1/2}{n+2} - \frac{3/2}{n+3} = S_n.$$

Cuando $n \to \infty$, los dos últimos términos de S_n tienden a cero y por tanto la suma de la serie es $1/4$.

2.2 (c) Este apartado puede resolverse mediante un procedimiento análogo al de (b), o bien escribiendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Las dos últimas series corresponden a (1) con $p = 1$ (resuelto en b), con suma $1/4$) y $p = 0$ (con suma $1/12$, según la indicación del enunciado), respectivamente; por lo tanto, la suma pedida es $1/4 + 1/12 = 1/3$.

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS II - 6 de septiembre de 2005

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... *Tiempo 50 minutos*

- Puntuación de este problema sobre el total del examen: **3.5 puntos.**

3.1 (1 punto) Aplicando la definición, demuestre que no existe el límite

$$\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}.$$

3.2 Sea

$$f(x,y) = \tan\frac{x^2}{y}.$$

3.2(a) (0.5 puntos) Indique el mayor subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ en el que $f(x,y)$ está bien definida (toma valores reales).

3.2(b) (0.25 puntos) En el dominio A calculado en 3.2(a), determine el conjunto de puntos en los que $f(x,y)$ es continua.

3.2(c) (0.5 puntos) Calcule las derivadas parciales de primer orden de $f(x,y)$ en A.

3.2(d) (1.25 puntos) Estudie la existencia de extremos relativos y absolutos de $f(x,y)$ en A y, en su caso, calcúlelos.

Solución:

3.1 Recordemos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ si $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\,\delta > 0\ /\ [0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon]$.

Siendo en este caso $x_0 = 0$, $f(x) = \cos\frac{1}{x}$, supongamos en primer lugar que existe el límite l y es distinto de cero. Tomando $\varepsilon = |l|/2 > 0$, debería existir un $\delta > 0$ que satisface la definición anterior para dicho ε. Sea $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande como para que $\pi/2 + k\pi > 1/\delta$ o, equivalentemente,

$$\frac{1}{\pi/2 + k\pi} < \delta.$$

Tomando $x = \frac{1}{\pi/2+k\pi}$, se verifica por una parte que $0 < x < \delta$ y, por otra, que $f(x) = \cos\frac{1}{x} = 0$ y por tanto $|f(x) - l| = |l| > |l|/2 = \varepsilon$, lo que contradice la hipótesis de que el par δ - ε satisface el requisito de la definición de límite.

Si suponemos $l = 0$, basta razonar análogamente tomando $\varepsilon = 1/2$, k suficientemente grande como para que $k\pi > 1/\delta$, y $x = 1/k\pi$.

3.2 (a) El cociente x^2/y está bien definido si $y \neq 0$, y la función $\tan\alpha$ está bien definida para $\alpha \neq (2k+1)\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, el conjunto A es todo el plano excepto el eje x y la familia de parábolas $y = \frac{2}{(2k+1)\pi}x^2$ con $k \in \mathbb{Z}$, es decir,

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ /\ y \neq 0,\ \frac{1}{2}\left(\frac{2x^2}{\pi y} - 1\right) \notin \mathbb{Z}\right\}.$$

FMT2-SEP'05-6/6

3.2 (d) La función f es diferenciable en el conjunto abierto A, y por tanto los posibles extremos relativos se encuentran entre los puntos críticos, es decir, los puntos en los que se anulan las derivadas parciales calculadas en (c). Es inmediato comprobar que los puntos críticos están definidos por la condición $x = 0$ en A, es decir, constituyen el eje y con la excepción del origen (que no pertenece al dominio A).

Obsérvese que $f(0, y) = 0$. Fijando un punto $(0, y)$ con $y > 0$, para x^2 no nulo y suficientemente pequeño ocurre que $\tan x^2/y > 0$ y por tanto el semieje y^+ es de mínimos relativos (no estrictos). Análogamente, se puede comprobar que el semieje y^- está formado por máximos relativos (no estrictos).

Los hipotéticos extremos absolutos deberían encontrarse entre los extremos relativos calculados anteriormente. Dado que en ellos la función se anula, y que existen tanto puntos del dominio A en los que f toma valores positivos como puntos en los que toma valores negativos, se concluye que f no alcanza extremos absolutos en A.