TOPOLOGÍA

Def: Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto y $T \subset \mathcal{P}(X)$. Se dice que T es una topología (o sistema de abiertos) para X si:

a) $\emptyset, X \in T$

b) $\forall A_1, A_2 \in T$, $A_1 \cap A_2 \in T$ (intersección finita)

c) $\forall \{A_j\}_{j\in J} \subset T$, $\bigcup_{j\in J} A_j \in T$ (unión arbitraria).

Los miembros de una topología T se llaman abiertos de la topología T.

El par (X, T) se llama espacio topológico.

Ejemplo:

1) $\forall X \neq \emptyset$ conjunto, $T = \{\emptyset, X\}$ es la topología trivial de X.

2) $\forall X \neq \emptyset$ conjunto, $T_D = \mathcal{P}(X)$ es la topología discreta de X.

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_u = \{U \subset \mathbb{R}^n \,/\, x \in U$ si $\exists \varepsilon > 0$ t.q. $B_\varepsilon(x) \subset U\}$ es la topología usual de $\mathbb{R}^n$.

4) (X, d) espacio métrico, $T_d = \{U \subset X \,/\, \forall x \in U, \exists \varepsilon > 0$ con $B_\varepsilon(x) \subset U\}$ es la topología inducida por la métrica d. $B_\varepsilon(x)$ es una base de T en X

Obs: No todo espacio topológico verifica que su topología esté inducida por una métrica.

Sea X, card$(X) \geq 2$ ...

... t.q.

T es la topología inducida por d

Def: Sea X un conjunto y T, T' topologías para X. Se dice que T es más débil que T' (o T menos fina que T') si $T \subset T'$.

También se dice T' más fuerte o más fina que T.

Def: (X,T) e.t. y $C \subset X$. Se dice que C es cerrado en (X,T) si $X \setminus C$ abierto de (X,T).

__Obs 1:__ Dado un e.t. y $C \subset X$, C no es necesariamente abierto ni cerrado.

$(\mathbb{R}, T_u)$ y $[0,1)$

__Obs 2:__ (X, T_D) y $\forall C \subset X$, C es abierto y cerrado.

$T_D = \{\emptyset, X\}$, $C = \emptyset, X$ abierto y cerrado.

Prop: (X,T) e.t. y $C_T = \{C \subset X \mid C \text{ cerrado en } (X,T)\}$. Entonces

a) $\emptyset, X \in C_T$ $\begin{cases} \emptyset = X \setminus X \text{ y } X \in T \Rightarrow \emptyset \in C_T \\ X = X \setminus \emptyset \text{ y } \emptyset \in T \Rightarrow X \in C_T \end{cases}$

b) $\forall C_1, C_2 \in C_T$, $C_1 \cup C_2 \in C_T$ $\begin{cases} C_i \in C_T \text{ t.q. } X \\ \Rightarrow (X \setminus C_1) \cap (X \setminus \end{cases}$

c) $\forall \{C_j\}_{j \in J} \subset C_T$, $\bigcap_{j \in J} C_j \in C_T$ $\begin{cases} \cup(X \setminus C_j) \in T \Rightarrow \cup(\\ \cap C_j \in C_T \end{cases}$

De Morgan laws

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

__Dem:__ Sencillo aplicando las leyes de DeMorga

Recíprocamente, $\forall X \neq \emptyset$ conjunto y $\forall \mathcal{F} \subset P(X)$ con $\mathcal{F}$ cumpliendo

)

$c \supset S$

S es cerrado

Obs: La adherencia de S es el menor cerrado del e.t. que contiene a S.

Lema: Sea (X,T) e.t., $A, B \subset X$ y $A \subset B$. Entonces $\bar{A} \subset \bar{B}$.

Dem: $A \subset B \subset \bar{B}$ cerrado $\Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$

$\bar{B}$ cerrado que contiene a A

$A \subset B \Rightarrow A \subset B \subset \bar{B} \Rightarrow A \subset \bar{B}$

$\Rightarrow A \subset \bar{A} \subset \bar{B} \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$

$\boxed{\text{Prop}}$: (X,T) e.t.

1) $\bar{\emptyset} = \emptyset$ (por def.)

2) $\forall S \subset X$, $S \subset \bar{S}$ (por def.)

3) $\forall S \subset X$, $\bar{\bar{S}} = \bar{S}$

$\bar{S} \subset \bar{\bar{S}}$ por 2)

$\bar{S} \subset \bar{S} \Rightarrow \bar{\bar{S}} \subset \bar{S}$

por ser $\bar{S}$ cerrado.

4) $\forall A, B \subset X$, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$\supset$) $A \subset A \cup B \Rightarrow \bar{A} \subset \overline{A \cup B}$

$B \subset A \cup B \Rightarrow \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$

$\Big\}\ \bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$

$\subset$) $A, B \subset A \cup B \Rightarrow \bar{A}, \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$

$A \cup B \subset \bar{A} \cup \bar{B} \Rightarrow \overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$

5) $\forall C \subset X$, C cerrado de $(X,T) \Leftrightarrow \bar{C} = C$

$\boxed{\text{Teorema}}$ ...

$\forall A, B \subset X$, $A \subset B$ es t.q. $B = A \cup (B \setminus A) \Rightarrow$ 4)

$\bar{B} = \overline{A \cup (B \setminus A)} = \bar{A} \cup \overline{(B \setminus A)}$ ...

a) Por 2) $X \subset \overline{X} \subset X \Rightarrow \overline{X} = X \Rightarrow X \in \mathcal{F}$

$\emptyset \in \mathcal{F}$ por 1)

b) $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}$: $\overline{F_1 \cup F_2} \underset{4)}{=} \overline{F_1} \cup \overline{F_2} = F_1 \cup F_2 \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$

c) $\{F_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{F}$, $j_0 \in J$

$\bigcap_{j\in J} F_j \subset F_{j_0} \Rightarrow \overline{\bigcap_{j\in J} F_j} \subset \overline{F_{j_0}} = F_{j_0} \Rightarrow \overline{\bigcap_{j\in J} F_j} \subset \bigcap_{j\in J} F_j$

Recíprocamente por 2).

Def: Sea $X \neq \emptyset$ conjunto y $\varphi : P(X) \longrightarrow P(X)$ cumpliendo 1), 2), 3) y 4). Se dice que φ es el operador clausura de KURATOWSKI.

Def: Sea (X,T) e.t. y $S \subset X$. Se llama interior de S en (X,T) a

$$\mathring{S} = \bigcup_{\substack{G \in T \\ G \subset S}} G$$

Obs: El interior es el mayor abierto contenido en S.

Prop: Sea (X,T) e.t. y $S \subset X$. Entonces:

1) $X \setminus \mathring{S} = X \setminus \bigcup_{\substack{G \in T \\ G \subset S}} G = \bigcap_{\substack{G \in T \\ G \subset S}} (X \setminus G) = \bigcap_{\substack{C \text{ cerr.} \\ C \supset X \setminus S}} C = \overline{X \setminus S}$

2) $X \setminus \overline{S} = X \setminus \bigcap_{\substack{C \text{ cerr.} \\ C \supset S}} C = \bigcup_{\substack{C \text{ cerr.} \\ C \supset S}} (X \setminus C) = \bigcup_{\substack{G \in T \\ G \subset X \setminus S}} G = (X \setminus S)^{\circ}$

c) $\forall S \subset X$, $\mathring{S} \subset S$

d) $\forall S \subset X$, $(\mathring{S})^{\circ} = \mathring{S}$

e) $\forall A, B \subset X$, $(A \cap B)^\circ = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$

f) $\forall S \subset X$, $S \in T \iff S = \overset{\circ}{S}$

Dem:

a) $\overset{\circ}{A} \subset A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$

b) $X \in T$, $\overset{\circ}{X} \subset X \Rightarrow \overset{\circ}{X} = X$

d) $\left.\begin{array}{l} (\overset{\circ}{S})^\circ \subset \overset{\circ}{S} \quad \text{por c)} \\ \overset{\circ}{S} \subset \overset{\circ}{S} \Rightarrow (\overset{\circ}{S})^\circ \subset \overset{\circ}{S} \end{array}\right\} \overset{\circ}{S} = (\overset{\circ}{S})^\circ$

e) $A \cap B \subset A, B \underset{a)}{\Rightarrow} (A \cap B)^\circ \subset \overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B} \Rightarrow (A \cap B)^\circ \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$

$\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset A \cap B \underset{\text{def.}}{\Rightarrow} \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset (A \cap B)^\circ$

f) $\underset{\in T}{S} \subset S \Rightarrow \overset{\circ}{S} = S$

$S = \overset{\circ}{S} \in T$

Def: Sea (X, T) e.t. y $S \subset X$. Se llama frontera de S en (X, T) a $F_r(S) = \overline{S} \cap \overline{X \setminus S}$

Ejemplo $F_r[0,1] = \{0,1\}$

Obs: $F_r(S)$ cerrado y $F_r(X \setminus S) = F_r(S)$ (por def.)

Prop: (X, T) e.t. y $S \subset X$. Entonces:

Dem: 1) $S \cup Fr(S) = S \cup (\bar{S} \cap \overline{X \setminus S}) = (S \cup \bar{S}) \cap (S \cup \overline{X \setminus S}) \underset{\overline{X\setminus S} \supset X \setminus S}{=}$

$= \bar{S} \cap X = \bar{S}$

2) $S \setminus Fr(S) = S \setminus (\bar{S} \cap \overline{X \setminus S}) = (S \setminus \bar{S}) \cup (S \setminus \overline{X \setminus S}) =$

$= \emptyset \cup (S \setminus \overline{X \setminus S}) \underset{X \setminus \mathring{S} = \overline{X \setminus S}}{=} S \setminus (X \setminus \mathring{S}) = S \cap \mathring{S} = \mathring{S}$

3) $X = \mathring{S} \cup (X \setminus \mathring{S}) = \mathring{S} \cup \overline{X \setminus S} \underset{1)}{=} \mathring{S} \cup Fr(X \setminus S) \underset{2)}{=}$

$= \mathring{S} \cup Fr(S) \cup Fr(X \setminus S) \cup (X \setminus \mathring{S}) = \mathring{S} \cup Fr(S) \cup (X \setminus S)^{\circ}$

4) $Fr(S) = \bar{S} \cap \overline{X \setminus S} \underset{X \setminus \mathring{S} = \overline{X \setminus S}}{=} \bar{S} \cap (X \setminus \mathring{S}) = \bar{S} \setminus \mathring{S}$

Def: Sea (X, T) e.t. y $S \subset X$. Se dice que S es denso en (X, T) si $\bar{S} = X$

Def: (X, T) e.t. y $x \in X$, $V \subset X$. Se dice que V es entorno de x en (X, T) si $\exists A \in T$ t.q. $x \in A \subset V$

Obs: V es entorno de x $\Leftrightarrow$ $x \in \mathring{V}$

Notación: $\forall x \in X$, $\mathcal{V}(x) = \{ V \subset X \mid V$ es entorno de x en $(X, T)\}$

"sistema de entornos de x"

Prop: (X, T) e.t. $\forall x \in X$, $\mathcal{V}(x)$ es el sistema de entornos de x

$\exists V \in \mathcal{V}(x)$ t.q. $\forall y \in V$, $U \in \mathcal{V}(y)$

Prop: Sea $X \neq \emptyset$ conjunto. $\forall x \in X$, $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{P}(x)$ cumpliendo a) b) c) y d). Entonces $\exists ! \, T$ topología para X t.q. $\forall x \in X$, el sistema de entornos de x en (X, T) es $\mathcal{V}(x)$

Dem: Sea $T = \{ G \subset X \mid \forall x \in G, \ G \in \mathcal{V}(x) \}$

1) $\emptyset \in T$, $X \in T$ por d)

2) $\forall G_1, G_2 \in T$, $\forall x \in G_1 \cap G_2 \Rightarrow x \in G_i \ i = 1, 2, \Rightarrow G_i \in \mathcal{V}(x)$

$\Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in T$.

3) $\forall \{G_j\}_{j \in J} \subset T$, $\forall x \in \bigcup_{j \in J} G_j \Rightarrow x \in G_{j_0}$ con $j_0 \in J \Rightarrow$

$\Rightarrow G_{j_0} \in \mathcal{V}(x) \underset{d)}{\Rightarrow} \bigcup_{j \in J} G_j \in \mathcal{V}(x)$

Luego T es topología.

Prop: $\forall x \in X$ y $S \subset X$, S entorno de x en $(X, T) \Leftrightarrow S \in \mathcal{V}(x)$

$\Rightarrow$) S entorno de x en $(X, T) \Rightarrow \exists G \in T$, $x \in G \subset S \Rightarrow$

$G \in \mathcal{V}(x) \underset{d)}{\Rightarrow} S \in \mathcal{V}(x)$

$\Leftarrow$) $S \in \mathcal{V}(x)$. Sea $U = \{ y \in X \mid S \in \mathcal{V}(y) \}$ y $x \in U$.

$\forall y \in U \Rightarrow S \in \mathcal{V}(y) \underset{a)}{\Rightarrow} y \in S$

$\forall y \in U$, $S \in \mathcal{V}(y) \underset{c)}{\Rightarrow} \exists W \in \mathcal{V}(y)$ t.q. $\forall z \in W$, $S \in \mathcal{V}(z)$

$\Rightarrow z \in U \Rightarrow W \subset U \underset{d)}{\Rightarrow} U \in \mathcal{V}(y) \Rightarrow U \in T$.

$T' \subset T^U$

Def: (X, T) e.t. y $\forall x \in X$, $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{P}(X)$. Se dirá que $\mathcal{B}(x)$ es una base de entornos de x en (X, T) si $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$ y $\forall U \in \mathcal{V}(x)$, $\exists B \in \mathcal{B}(x)$ t.q. $B \subset U$.

Ejemplo:

1) El sistema de entornos de x es una base de entornos de x.

2) $\mathcal{B}(x) = \{ \mathring{U} \mid U \subset \mathcal{V}(x) \}$ base de entornos de x.

3) $\mathcal{B}(x) = \{ B_\varepsilon(x) \mid \varepsilon > 0 \}$ base de ent. de x en (X, T_d)

4) $\mathcal{B}(x) = \{ [x-\varepsilon, x+\varepsilon] \mid \varepsilon > 0 \}$ base de ent. de x en $(\mathbb{R}, T_u)$

Prop: Sea (X, T) e.t. y $\mathcal{B}(x)$ base de entornos de x en (X, T).

1) $\forall B \in \mathcal{B}(x)$, $x \in B$

2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(x)$, $\exists B_3 \in \mathcal{B}(x)$ t.q. $B_3 \subset B_1 \cap B_2$

3) $\forall B \in \mathcal{B}(x)$, $\exists B' \in \mathcal{B}(x)$ t.q. $\forall y \in B'$, $\exists B_1 \in \mathcal{B}(y)$ t.q. $B_1 \subset B$

Dem:

3) $B \in \mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$

$\exists V \in \mathcal{V}(x)$ t.q. $\forall y \in V$, $B \in \mathcal{V}(y)$ $\underset{\text{por def.}}{\Rightarrow}$ $\exists B' \in \mathcal{B}(x)$ t.q. $B' \subset V$

$\forall y \in B' \subset V$, $B \in \mathcal{V}(y) \Rightarrow \exists B_1 \in \mathcal{B}(y)$, $B_1 \subset B$.

Def: Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto, $\mathcal{B} : X \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ que cumple 1) 2) y 3)

Entonces $\exists!\, T$ topología sobre X t.q. $\mathcal{B}(x)$ es base de ...

Def: Sea (X,T) e.t. y $\mathcal{B}_1(x)$, $\mathcal{B}_2(x)$ bases de entornos de $x \in X$ en (X,T). Se dice que $\mathcal{B}_1(x)$ y $\mathcal{B}_2(x)$ son bases de entornos equivalentes

Inducen la misma topología.

Prop: Sea (X,T) e.t. $\forall x \in X$, $\mathcal{B}_1(x)$ y $\mathcal{B}_2(x)$ son bases de entornos de x. Entonces $\mathcal{B}_1(x)$ y $\mathcal{B}_2(x)$ son equivalentes sii $\forall B_1 \subset \mathcal{B}_1(x)$, $\exists B_2 \subset \mathcal{B}_2(x)$ t.q. $B_2 \subset B_1$ y $\forall B_2' \subset \mathcal{B}_2(x)$, $\exists B_1' \subset \mathcal{B}_1(x)$ t.q. $B_1' \subset B_2'$.

Dem: $\Rightarrow]$ $\forall B_i \in \mathcal{B}_i(x)$ $i=1,2$.
$\exists B_j \in \mathcal{B}_j(x)$ $j=1,2$.
$\exists A \in T$ t.q. $x \in A \subset B_i$

t.q. $B_j \subset A \subset B_i$

$\Leftarrow]$ Sean T_1 y T_2 inducidas por $\mathcal{B}_1(x)$ y $\mathcal{B}_2(x)$. $\forall G_1 \in T_1$, $\forall x \in G_1$, $\exists B_1 \in \mathcal{B}_1(x)$ t.q. $x \in B_1 \subset G_1 \Rightarrow \exists B_2 \in \mathcal{B}_2(x)$ t.q. $x \in B_2 \subset B_1 \Rightarrow \exists G_2 \in T_2$ t.q. $T_2 \subset T_1$

De la misma forma $T_1 \subset T_2 \Rightarrow T_1 = T_2$.

Def: Sea (X,T) e.t. y $x \in X$, $S \subset X$.

1) Se dice que x es un punto interior de S en (X,T) si $\exists U^x$ entorno de x en (X,T) t.q. $U^x \subset S$.

2) Se dice que x es un punto adherente de S en (X,T) si $\forall U^x$ ent. de x en (X,T), $U^x \cap S \neq \emptyset$

3) Se dice que x es un punto de acumulación de S en (X,T) $\forall U^x$ ...

5) Se dice que x es un punto aislado de S en (X,T) si $\exists U^x$ ent. de x en ...

Def: Sea (X,T) e.t. y $S\subset X$. Se llama conjunto derivado de S al espacio S' de todos los puntos de acumulación de S.

Prop: Sea (X,T) e.t., $\forall x\in X$, $\mathcal{B}(x)$ base de ent. de x en (X,T):

1) $A\subset X$, $A\in T \Leftrightarrow \forall x\in A, \exists B\in\mathcal{B}(x)$ t.q. $B\subset A$.

2) $C\subset X$, C cerrado en $(X,T) \Leftrightarrow \forall x\in X\setminus C, \exists B\in\mathcal{B}(x)$ t.q. $B\cap C=\emptyset$

3) $S\subset X$, $\mathring{S}=\{x\in X \;/\; \exists B\in\mathcal{B}(x)$ con $B\subset S\}$.

4) $S\subset X$, $\bar{S}=\{x\in X \;/\; \forall B\in\mathcal{B}(x),\ B\cap S\neq\emptyset\}$

5) $S\subset X$, $Fr(S)=\{x\in X \;/\; \forall B\in\mathcal{B}(x),\ B\cap S\neq\emptyset$ y $B\cap(X\setminus S)\neq\emptyset\}$

Corolario: Sea (X,T) e.t. y $S\subset X$.

1) $\mathring{S}=\{x\in X \;/\; x$ punto interior de $S\}$

2) $\bar{S}=\{x\in X \;/\; x$ punto adherente de $S\}$

3) $Fr(S)=\{x\in X \;/\; x$ punto frontera de $S\}$.

Def: Sea (X,T) e.t. y $\mathcal{B}\subset T$. Se dice que $\mathcal{B}$ es una base de T si $\forall A\in T$, $\exists \mathcal{B}_A \in \mathcal{B}$ t.q. $A=\bigcup_{B\in\mathcal{B}_A} B$. En este caso se dice que T está engendrada o generada por $\mathcal{B}$.

Obs: $\mathcal{B}\subset T$, $\mathcal{B}$ base de $T \Leftrightarrow \forall A\in T, \forall x\in A, \exists B\in\mathcal{B}$ t.q. $x\in B\subset A$

Ejemplo:

Prop: Sea (X,T) e.t. y $\mathcal{B} \subset T$. Entonces $\mathcal{B} \subset T$ es base de T sii $\forall x \in X$ $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} / x \in B\}$ base de entornos de x.

<u>Dem:</u> $\Rightarrow$) $\forall x \in X$, $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{B} \subset T \Rightarrow \mathcal{B}_x \subset \mathcal{V}(x)$

$\forall U^x$ ent. de x en (X,T), $x \in \mathring{U}^x \in T \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}$ t.q.

$$\left.\begin{array}{l} x \in B \subset \mathring{U}^x \Rightarrow B \in \mathcal{B}_x \\ B \subset U^x \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{B}_x \text{ base de entornos de } x \text{ en } (X,T)$$

$\Leftarrow$) $\forall x \in X$, $\bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_x = \mathcal{B}$. $\forall A \in T$, $\exists B \in \mathcal{B}_x$, $x \in B \subset A \Rightarrow \mathcal{B}$ base de T

Prop: Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto, $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. Entonces $\mathcal{B}$ es base de X sii

a) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$

b) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $\forall p \in B_1 \cap B_2$, $\exists B_3 \in \mathcal{B}$ t.q. $p \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

<u>Dem:</u> $\Rightarrow$) a) Por definición de base.

b) $\mathcal{B}$ base de T topología $\Rightarrow \mathcal{B} \subset T$.

$$\left.\begin{array}{l} \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in T \\ \forall p \in B_1 \cap B_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B} \text{ t.q. } p \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$$

$\Leftarrow$) Sea $T = \{\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \mid \mathcal{F} \in \mathcal{P}(\mathcal{B})\}$. Veamos que es topología:

1) $\emptyset = \bigcup_{B \in \emptyset} B$, $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$

$\in T$

2) $\{\bigcup_{B \in \mathcal{F}_j} B \mid j \in J\} \subset T$

Def: Sea (X,T) e.t. e $\mathcal{S} \subset T$. Se dice que $\mathcal{S}$ es una <u>subbase</u> de T si la familia de todas las intersecciones finitas de miembros de $\mathcal{S}$ es una base para T. En ese caso se dice que T está generada o engendrada por $\mathcal{S}$.

Ejemplo:

1) $\{(\leftarrow, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{(b, \rightarrow) \mid b \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}$ subbase de <u>T_u</u> en <u>$\mathbb{R}$</u>.

2) Los semiplanos abiertos de <u>$\mathbb{R}^2$</u> son subbase de <u>T_u</u> en $\mathbb{R}^2$.

Prop: Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto y $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$. Entonces $\mathcal{S}$ es subbase de alguna topología sobre X sii $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X$

Dem: $\Rightarrow)$ $\mathcal{S}$ subbase de $T \Leftrightarrow$ la familia de las $\cap$ finitas es una base $\mathcal{B}$ de T.

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X \underset{\uparrow}{\Rightarrow} \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X$$

$\forall B \in \mathcal{B}$, $\exists S_B \in \mathcal{S}$ t.q. $B \in S_B$

$\Leftarrow)$ Sea $\mathcal{B} = \{\bigcap_{S \in \mathcal{F}} S \mid \mathcal{F} \in \mathcal{P}_F(\mathcal{S})\} \supset \mathcal{S} \Rightarrow$ hip.

a) por $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$ (hip).

$S \in \mathcal{S}_2$ $\quad$ $S \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \supset \mathcal{S}'$

Def: Sea (X,T) e.t. y $S\subset X$, $S\neq\emptyset$. Se llama topología relativa de T a S a $T|_S = \{A\cap S \mid A\in T\}$

El par $(S, T|_S)$ se llama subespacio topológico.

Prop: Sea (X,T) e.t. y $S\subset X$, $S\neq\emptyset$.

1) $C\subset S$, $C\in T|_S \Leftrightarrow \exists A\in T$ t.q. $C = A\cap S$.

2) $C\subset S$, C cerrado de $(S, T|_S) \Leftrightarrow \exists F$ cerrado de (X,T) t.q. $C = F\cap S$.

3) $\forall x\in S$, $V\subset S$. V es ent. de x en $(S, T|_S) \Leftrightarrow \exists U$ ent. de x en (X,T) t.q. $V = U\cap S$.

4) $C\subset S$, $\bar{C}^S = \bar{C}^X\cap S$.

5) $\mathcal{B}$ base de $T \Rightarrow \{B\cap S \mid B\in\mathcal{B}\}$ base de $T|_S$.

Dem:

3) $\Rightarrow$ V ent. de x en $(S, T|_S)$

$\exists A\in T|_S$ t.q. $x\in A\subset V$

Sea $U = G\cup V$ ent. de x en (X,T) $\Rightarrow \exists C_A\in T$ t.q. $A = C_A\cap S$, $x\in A\subset G$.

$\Rightarrow U\cap S = (G\cup V)\cap S = A\cup(V\cap S) = A\cup V \underset{\substack{\uparrow\\ A\subset V}}{=} V$

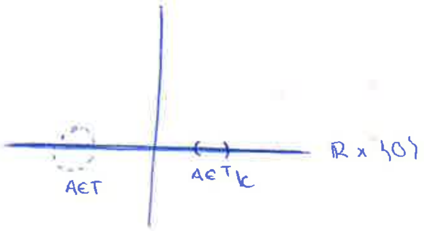
$\Leftarrow$ Aplicando 1).

$\Rightarrow A = \bigcup_{B\in\mathcal{B}_C} (B\cap S)$.

Obs: S subespacio de (X,T) , $C \subset S$ $\Big\}$ $int_S(C) \neq int_X(C) \cap S$

Ejemplo Sea $(\mathbb{R}^2, T_u)$

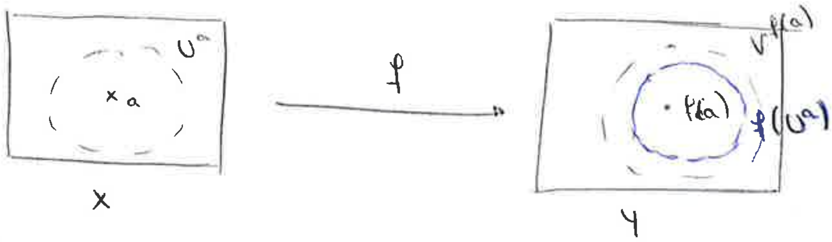
$S = C = \mathbb{R} \times \{0\} \Rightarrow \begin{cases} int_C(C) = C \\ int_{\mathbb{R}^2}(C) = \emptyset \end{cases}$



Def: Sea (P) una propiedad de e.t.. Se dice que (P) es hereditaria si $\forall$ e.t. que cumpla (P), todos sus subespacios cumplen (P).

Def: Sea (X,T) e (Y,S) e.t. y $f: X \longrightarrow Y$ aplicación, $a \in X$.

Se dice que $f:(X,T) \longrightarrow (Y,S)$ es continua en a si $\forall V^{f(a)}$ ent. de $f(a)$, $\exists U^a$ ent. de a en (X,T) t.q. $f(U^a) \subset V^{f(a)}$.



Se dice que $f:(X,T) \longrightarrow (Y,S)$ es continua si lo es $\forall a \in X$.

Prop: Sean (X,T) e (Y,S) e.t. y $f: X \longrightarrow Y$. Son equivalentes:

a) $\forall A \in S$, $f^{-1}(A) \in T$

b) $f:(X,T) \longrightarrow (Y,S)$ continua.

c) $\forall C \subset X$, $f(\bar{C}^X) \subset \overline{f(C)}^Y$

$f^{-1}(A)$ antiimagen de A

$f^{-1}(A) = \{a \mid f(a) \in A\}$

$a \in X$, $\forall V$ ent. de $f(a)$ en $(Y,S) \Rightarrow \mathring{V}^{f(a)} \in S$

$f(U) = f(f^{-1}(\mathring{V}^{f(a)})) \subset \mathring{V}^{f(a)} \subset V^{f(a)}$

$a \in \bar{C}$, $\forall U^a$ ent. de a en (X,T), $a \in U^a \cap C$ $\Rightarrow$ $f(a) \in f(U^a) \cap f(C) \subset V^{f(a)}$ front. $\Rightarrow f(a) \in \overline{f(C)}$

$\forall a \in \bar{C}^X$, ¿$f(a) \in \overline{f(C)}^Y$?

$\forall V^{f(a)}$ ent. de $f(a)$ $\underset{b)}{\Rightarrow}$ $\exists U^a$ t.q. $f(U^a) \subset V^{f(a)}$

$\exists z \in U^a \cap C \neq \emptyset \Rightarrow f(z) \in V^{f(a)}$

$f(z) \in f(C)$

c) ⇒ d) | $F \subset Y$?, $f(\overline{f^{-1}(F)}^X) \subset \overline{f(f^{-1}(F))}^Y$

$\Rightarrow \overline{f^{-1}(F)}^X \subset f^{-1}(\bar{F}^Y)$

d) ⇒ e) | F cerrado de (Y,S)

$\overline{f^{-1}(F)}^X \subset f^{-1}(\bar{F}^Y) = f^{-1}(F)$

$\Rightarrow \overline{f^{-1}(F)}^X = f^{-1}(F) \Leftrightarrow f^{-1}(F)$ cerrado.

e) ⇒ a) | $\forall A \in S \Leftrightarrow Y \setminus A$ cerrado de (Y,S) $\underset{e)}{\Rightarrow}$ $f^{-1}(Y \setminus A)$ cerrado de $(X,T) \Leftrightarrow X \setminus f^{-1}(Y \setminus A) \in T$

$\subset$| $x \in X \setminus f^{-1}(Y \setminus A) \Rightarrow x \notin f^{-1}(Y \setminus A)$

$\Rightarrow f(x) \notin Y \setminus A \Rightarrow f(x) \in A \Rightarrow x \in f^{-1}(A)$

$\supset$| $x \in f^{-1}(A) \Leftrightarrow f(x) \in A$

$f(x) \notin Y \setminus A \Rightarrow x \notin f^{-1}(Y \setminus A) \Rightarrow x \in X \setminus f^{-1}(Y \setminus A)$

Ejemplo:

1) $\forall (X,T)$ e.t. $1_X : (X,T) \to (X,T)$ es continua.

2) $\forall (X,T)$ e (Y,S) ...

Dem: $\forall A'' \in T'' \underset{g\,cont.}{\Rightarrow} g^{-1}(A'') \in T' \underset{f\,cont.}{\Rightarrow} f^{-1}(g^{-1}(A'')) = (g\circ f)^{-1}(A'') \in T$

$\Rightarrow g\circ f$ es continua.

Prop: Sean (X,T) y (X',T') e.t. y $S\subset X$, $f:(X,T)\longrightarrow(X',T')$ apli. continua. Entonces $f|_S:(S,T|_S)\longrightarrow(X',T')$ es ap. cont.

Dem: $\forall A'\in T'$: $(f|_S)^{-1}(A') = f^{-1}(A')\cap S \in T|_S \Rightarrow$ ap. cont.

Prop: Sean (X,T) y (X',T') e.t. y $f:(X,T)\longrightarrow(X',T')$ ap. cont. Entonces $f:(X,T)\longrightarrow(f(X),T'|_{f(X)})$ es ap. cont.

Dem: $\forall G'\in T'|_{f(X)}$: $\exists A'\in T'$ t.q. $G' = A'\cap f(X) \Rightarrow$

$f^{-1}(G') \underset{\uparrow}{=} f^{-1}(A') \in T$.

$f^{-1}(A'\cap f(X)) = f^{-1}(A')\cap f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(A')\cap X = f^{-1}(A')$

Prop: Sean (X,T) y (X',T') e.t. y $f: X\longrightarrow X'$ ap.

$\{A_j\}_{j\in J}\subset T$ t.q. $f|_{A_j}$ cont. $\forall j\in J$. (respectivamente $F_1,\dots,F_n$ $[F_1,F_2]$ cerrados de (X,T) t.q. $f|_{F_1}$, $f|_{F_2}$ ap. cont.)

Entonces $f:(X,T)\longrightarrow(X',T')$ cont.

Dem: $\forall A'\in T'$, $(f|_{A_j})^{-1}(A')\in T|_{A_j}$ $\forall j\in J$

$(f|_{A_j})^{-1}(A') = f^{-1}(A')\cap A_j$

$\Rightarrow f^{-1}(A') = \bigcup_{j\in J}(f^{-1}(A')\cap A_j)\in T$

$f:(X,T)\longrightarrow(X',T')$ es un abierto si $\forall A\in T$, $f(A)\in T'$

Def: Se dice que $f:(X,T) \longrightarrow (X',T')$ es ap. cerrada si $\forall C$ cerrado de (X,T), $f(C)$ cerrado de (X',T')

Obs: ap. abierta $\not\Leftrightarrow$ ap. cerrada

$\not\Updownarrow$ $\quad$ $\not\Updownarrow$ $\quad$ No se da ninguna implicación.

ap. continua

Def: Sean (X,T) y (X',T') e.t. y $f: X \longrightarrow X'$ ap. Se dice que f es homeomorfismo de (X,T) en (X',T') si f ap. biyectiva, continua y f^{-1} continua.

Def: Se dice que dos espacios son homeomorfos si $\exists$ homeomorfismo entre ellos.

Un homeomorf. nos da una correspondencia biyectiva entre todas las colecciones de conjuntos abiertos (o cerr) de X y X'

Toda prop. que se defina completamente en términos de T será un invariante top. ya que se mantendrá en X' por homeomorfismos

Def: ... es un invariante topológico ... mple en todos los e.t. homeomorf.

Prop: Sean (X,T) y (X',T') e.t. y $f: X \longrightarrow X'$ ap. Son equivalentes:

a) f es homeomorfismo.

b) f es biyección, continua y abierta.

c) f biyección, continua y cerrada.

Dem: $a \Rightarrow b$ | f homeomorfismo.

$\forall A \in T \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ cont. } f^{-1} \text{ continua}}}{\Rightarrow} (f^{-1})^{-1}(A) \in T' \Rightarrow f$ cont. y abierta.

a) $\Leftrightarrow$ c)

$\forall C \in \mathcal{C}_T$

$(f^{-1})^{-1}(C) \in \mathcal{C}_{T'}$

$\prod_{j\in J} X_j = \{ x: J \longrightarrow \bigcup_{j\in J} X_j$ ap. $| \; x(j) \in X_j \; \forall j \in J \}$

Def: $\forall j \in J$ la ap. $p_j : \prod X_j \longrightarrow X_j$ se llama proyección.
$\qquad\qquad\qquad\qquad x \longrightarrow x(j)$

Si $X_j = X \;\; \forall j \in J$: $X^J = \prod_{j \in J} X_j = \{ x_i : J \longrightarrow X \mid x \text{ ap.} \}$

Axioma de elección: $\forall \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ familia de conjuntos distintos no vacíos distintos dos a dos, $\exists B \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ t.q. $B \cap A_\lambda$ tiene un solo elemento $\forall \lambda \in \Lambda$.

Def: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j \in J}$ una familia no nula de e.t.. Se llama top. producto a la top. sobre $\prod_{j \in J} X_j$ y que tiene como subbase

$\{ p_j^{-1}(U_j) \mid U_j \in T_j,\ j \in J \}$

Se denotará $\prod_{j \in J} T_j$. El par $(\prod X_j, \prod T_j)$ se llama e.t. producto.

Obs: Una base de $\prod_{j \in J} T_j$ es $\mathcal{B} = \{ \bigcap_{j \in F} p_j^{-1}(U_j) \mid \underbrace{F \in \mathcal{P}_F(J)}_{F \subset J \text{ y } F \text{ finito}},\ U_j \in T_j \} =$

$= \{ \prod_{j \in J} A_j \mid A_j \in T_j \;\; \forall j \in J,\ A_j = X \;\; \forall j \in J \setminus F \text{ finito} \}$

Ejemplo:

1) Si J finito. $\mathcal{B} = \{ \prod_{j \in J} A_j \mid A_j \in T_j \;\; \forall j \in J \}$

2) Si J infinito, T_j top. discreta $\forall j \in J$ y card $X_j > 1$ ($\forall j \in J$), entonces la top. producto no es discreta.

Prop: ...

$\forall j_0 \in J$, p_{j_0} continua.

$\forall A \in \prod_{j \in J} T_j$, $A = \bigcup_{s \in S} B_s$, $B_s \in \mathcal{B}$ $\forall s \in S$ base de T_j

$p_{j_0}(B_s) \in T_{j_0} \Rightarrow p_{j_0}(A) = \bigcup_{s \in S} p_{j_0}(B_s) \in T_{j_0}$

Prop: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ familia no nula de e.t. Entonces la top. prod. es la más débil de las top. sobre $\prod_{j\in J} X_j$ que hacen continuas todas las proyecciones.

Dem: Sea T top. sobre $\prod_{j\in J} X_j$, $p_{j_0}: (\prod X_j, \underset{T}{\underset{\shortparallel}{\prod T_j}}) \longrightarrow (X_{j_0}, T_{j_0})$

continua $\forall j_0 \in J$.

$\Rightarrow p_{j_0}^{-1}(U_{j_0}) \in T \quad \forall U_{j_0} \in T_{j_0}$

$\forall j_0 \in J \Leftrightarrow \{p_j^{-1}(U_j) \mid U_j \in T_j\} \subset T$

No todas las top. en $\prod X_j$ hacen continua la proyecc. En concreto, la top. prod. sí

Prop: propiedad universal de la top. producto.

Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ familia no nula de e.t. y (X, T) e.t.

$f: X \longrightarrow \prod_{j\in J} X_j$ ap. Entonces $f: (X, T) \longrightarrow (\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} T_j)$ continua

sii $\forall j \in J$, $p_j: f_j(X, T) \longrightarrow (X_j, T_j)$ continua

$\Rightarrow$) $j_0 \in J$ $p_{j_0} \circ f: (X,T) \to (X_{j_0}, T_{j_0})$ continua (comp. de continuas)

$\Rightarrow f_j = p_{j_0} \circ f$ continua $\forall j \in J$

$\Leftarrow$) Fácil

$\forall j \in J$, $\forall U_j \in T_j$ $(p_j \circ f)^{-1}(U_j) = f^{-1}(\underbrace{p_j^{-1}(U_j)}) \in T$

$f^{-1}(S) \in T \Leftrightarrow f$ cont

$\forall S \in \mathcal{S} = \{p_j^{-1}(U_j) \mid U_j \in T_j \; j \in J\}$ subbase de $\prod_{j\in J} T_j$

Def: Sea (P) una propiedad ...

Prop: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ familia distinta del vacío de e.t. y (X,T) e.t. y $f_j : X \to X_j$ ap. $\forall j \in J$. Entonces la ap.

$$(f_j)_{j\in J} : (X,T) \longrightarrow \left(\prod X_j, \prod T_j\right)$$
$$x \longrightarrow (f_j)_{j\in J}(x) := (f_j(x))_{j\in J}$$

es continua sii $\forall j \in J$, f_j cont.

Dem: $\forall j_0 \in J$ fijo: $p_{j_0} : (f_j)_{j\in J}$.

$\Rightarrow$) fácil.

$\Leftarrow$) por la prop. universal de la top. producto.

Prop: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ y $\{(X'_j, T'_j)\}_{j\in J}$ familias no nulas de e.t. y $f_j : X_j \to X'_j$ ap $\forall j \in J$. Entonces la ap.

$$\prod_{j\in J} f_j : \left(\prod X_j, \prod T_j\right) \longrightarrow \left(\prod X'_j, \prod T'_j\right)$$
$$(x_j)_{j\in J} \longrightarrow \left(\prod f_j\right)(x_j)_{j\in J} := (f_j(x_j))_{j\in J}$$

es continua sii $\forall j \in J$, f_j continua.

Dem: $\forall j_0 \in J$

$$\begin{tikzcd} \prod X_j \arrow[r, "\prod f_j"] \arrow[d, "p_{j_0}"'] & \prod X'_j \arrow[d, "p'_{j_0}"] \\ X_{j_0} \arrow[r, "f_{j_0}"] & X'_{j_0} \end{tikzcd}$$

$\prod X_j \xrightarrow{\prod f_j} \prod X'_j \xrightarrow{p'_{j_0}} X'_{j_0}$

$\|$

$\prod X_j \xrightarrow{p_{j_0}} X_{j_0} \xrightarrow{f_{j_0}} X'_{j_0}$

$p'_{j_0} \circ \left(\prod f_j\right) = f_{j_0} \circ p_{j_0}$

$\Leftarrow$) por la prop. universal de la top. producto.

$\forall j \in J$

Prop: Si $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ familia $\neq \emptyset$ de e.t. y $\varphi : J \to J$ biyección entonces $\left(\prod_{j\in J} X_{\varphi(j)}, \prod_{j\in J} T_{\varphi(j)}\right)$ y $\left(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} T_j\right)$ son homeomorfos.

(Salvo homeomorfismo, hay conmutatividad en el producto).

Dem: Sea $\varphi : \left(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} T_j\right) \longrightarrow \left(\prod_{j\in J} X_{\varphi(j)}, \prod_{j\in J} T_{\varphi(j)}\right)$ biyectiva..

$$(x_j)_{j\in J} \longrightarrow (y_j)_{j\in J} := (x_{\varphi(j)})_{j\in J}$$

φ continua : la prop. univ. de la top. producto.

φ^{-1} continua : "

Def: Sea (X, T) e.t. e Y conjunto, $f : X \to Y$ ap. Se llama topología cociente inducida por f a la topología sobre Y.

$$T_f = \{G \subset Y \mid f^{-1}(G) \in T\}$$

El par (Y, T_f) se llama espacio cociente respecto a f.

Def: Sea (X, T) e (Y, S) e.t. y $f : X \to Y$. Se dice que f es una identificación si f es suprayectiva y S es la top. cociente inducida por f.

Prop: Sea (X, T) e.t. e Y conjunto. $f : X \to Y$ ap. La top. inducida por f es la más fina de las top. sobre Y que hacen continuas a f.

Dem: Sea S top. sobre Y, $f : (X, T) \to (Y, S)$ continua.

Entonces $g : (Y, T_f) \to (Z, S)$ continua $\Leftrightarrow g \circ f : (X, T) \to (Z, S)$ cont.

la continuidad de la f se da al tener la top. cociente así que siempre se va a cumplir (no hay que pedirlo)

Dem: $\Rightarrow$| Fácil. Composición de ap. continuas es continua.

$\Leftarrow$| $\forall G \in S \quad \underbrace{(g\circ f)^{-1}(G)}_{= f^{-1}(g^{-1}(G))} \in T \underset{f \text{ continua}}{\Rightarrow} g^{-1}(G) \in T_f \Rightarrow g$ continua

Prop: Sean (X,T) y (X',T') e.t. y $f:(X,T)\longrightarrow (X',T')$ ap. suprayectiva continua y abierta. (respectivamente cerrada). Entonces f es identificación.

Dem: $f:(X,T)\longrightarrow (X',T')$ $\left| \begin{array}{l} \text{continua} \\ \text{suprayectiva} \end{array}\right. \Rightarrow T' \subset T_f$

Supongamos f ap. abierta: $\forall A \in T_f$, $f^{-1}(A) \in T \Rightarrow$
$f(f^{-1}(A)) \in T$

$T_f \subset T'$ y $T' \subset T_f$.

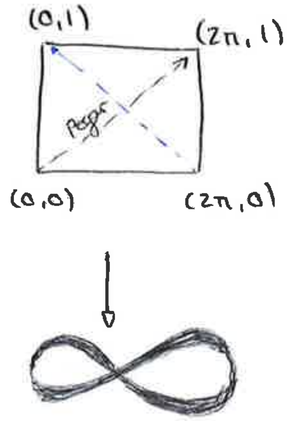
Def: Sea (X,T) e.t. y R relación de equivalencia en X, $p: X \longrightarrow X/R$ proyección canónica. Se llama topología cociente respecto a R a la topología sobre X/R.

p se denotará T/R

Ejemplo:

1) $X = [0,1]$, $R: 0 \equiv 1 \Rightarrow X/R \underset{\text{homeomorfo}}{\approx} S^1$

3)

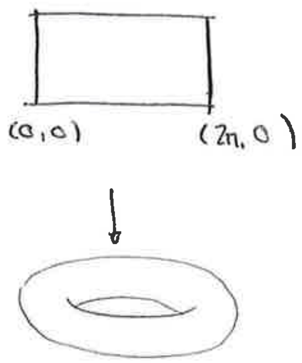


$X = [0, 2\pi] \times [0,1]$

$R: (0,y) \equiv (2\pi, 1-y)$

$X/R \equiv$ banda de Möbius.

4)



$X = [0, 2\pi] \times [0, y]$

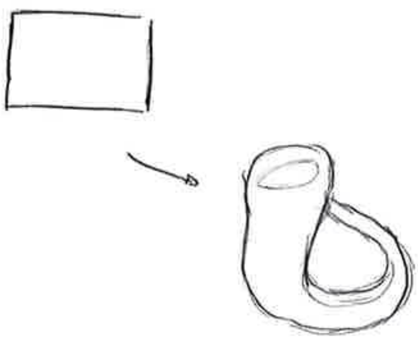
$R: \begin{cases} (0,y) \equiv (2\pi, y) \\ (x,0) \equiv (x,1) \end{cases}$

$X/R \equiv$ toro

5) $X = [0, 2\pi] \times [0,1]$

$R: \begin{cases} (0,y) \equiv (2\pi, y) \\ (x,0) \equiv (2\pi - x, 1) \end{cases}$

$X/R \equiv$ botella de klein



6) $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

$p: X \longrightarrow \mathbb{R}/P_n \rightarrow$ espacio proyectivo real de dim n.

Prop: Sean (X,T), (X',T'), (X'',T'') e.t.

$\forall A'' \in T'' \iff g^{-1}(A'') \in T' \iff f^{-1}(g^{-1}(A'')) \in T \Rightarrow T' = T_{g \circ f}$

Prop: Sean (X,T) y (X',T') e.t. y $f:(X,T)\longrightarrow(X',T')$ identif.

Entonces f ap. abierta sii $\forall A\in T$, $f^{-1}(f(A))\in T$

$f^{-1}(f(A))\in T$ sii $f(A)\in T'$ (i.e. si f abierta). $\square$

f ap. cerrada sii $\forall C$ cerrado, $f^{-1}(f(C))$ cerrado de (X,T)

Prop: Sean (X,T), (X',T'), (X'',T'') y (X''',T''') e.t. y

$f:(X,T)\longrightarrow(X',T')$ y $f':(X'',T'')\longrightarrow(X''',T''')$ identif. y

$g: X\longrightarrow X''$ ap.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & X'' \arrow[d, "f'"] \\ X' \arrow[r, "\hat{g}"'] & X''' \end{tikzcd}$$

t.q. si $f(x)=f(y)\Rightarrow f'(g(x))=f'(g(y))$

Entonces a) $\exists!\ \hat{g}: X'\longrightarrow X'''$ ap. t.q.

$f'\circ g=\hat{g}\circ f$

b) $g:(X,T)\longrightarrow(X'',T'')$ continua

$\Rightarrow \hat{g}$ ap. continua.

Dem: a) $\hat{g}: X'\longrightarrow X'''$

$\hat{g}(x'):=f'(g(x))$ bien def $\forall x\in f^{-1}(x')$

$\Rightarrow \hat{g}$ ap. y $\hat{g}\circ f=f'\circ g$

b) g continua $\Rightarrow f'\circ g$ continua $\Rightarrow f'\circ g=\hat{g}\circ f$ $\underset{\substack{\text{prop. universal} \\ \text{top. cociente}}}{\Rightarrow}$

$\hat{g}$ continua.

Prop: Sean (X,T) y (X',T') e.t. y $f:(X,T)\longrightarrow(X',T')$ ap. supreyectiva y continua. R_f relación de equivalencia. Si

Def: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ una familia $\neq \emptyset$ de e.t.. Se llama topología suma a la topología sobre $\sum_{j\in J} X_j = \bigcup_{j\in J} X_j \times \{j\}$

$$\sum_{j\in J} T_j = \{G \subset \sum_{j\in J} X_j \mid j_k^{-1}(G) \subset T_j, \forall j \in J\}$$

donde $j_k : X_k \longrightarrow \sum_{j\in J} X_j \quad \forall k \in J.$

El par $(\sum_{k\in J} X_k, \sum_{k\in J} T_k)$ $\forall k \in J$ es llamado e.t. suma.

Obs: $j_k : X_k \longrightarrow X_k \times \{k\}$ es un homeomorfismo $\forall k \in J$

$x \longrightarrow j_k := (x, k)$

$j_k^{-1}(x,k) = x = p_1(x,k)$ Proyección primera.

Obs: $\forall k \in J$, $\forall C \in S$, $j_k^{-1}(C) = p_1(C \cap (X_k \times \{k\}))$

Prop: La top. suma es la más fina de las topologías sobre $\sum_{j\in J} X_j$ que hacen continuas todas las proyecciones.

Dem: Sea T la top. sobre $\sum_{j\in J} X_j$.

$\forall k \in J$, $\forall j \in J$: $j_k : (X_k, T_k) \longrightarrow (\sum_{k\in J} X_k, T)$ continua

$\Rightarrow \forall A \in T$, $j_k^{-1}(A) \in T_k$ $\forall k \in J \Rightarrow T \subset \sum_{j\in J} T_j$

Prop: propiedad universal de la topología suma.

Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ una familia $\neq\emptyset$ de e.t. y (X,T) e.t.

Dem: $\Rightarrow$] Fácil.

$\Leftarrow$] $\forall G \in T$, $(f \circ j_k)^{-1}(G) \in T_k \quad \forall k \in J$

$$\| $$

$$j_k^{-1}(f^{-1}(G)) \Rightarrow f^{-1}(G) \in \sum_{k \in J} T_k \Rightarrow$$

f ap. continua.

Def: Sea (P) una propiedad de e.t. Se dice que (P) es aditiva si $\forall$ familia de e.t. cada uno de ellos cumple (P), entonces el e.t. suma cumple (P).

Def: Sea (X,T) e.t. Se dice que es T_0 si $\forall x,y \in X$ $x \neq y$, $\exists$ un entorno de alguno de ellos que no contiene al otro. (esp. kolmogórov).

Def: Sea (X,T) e.t. Se dice que es T_1 si $\forall x,y \in X$ $x \neq y$, $\exists$ un entorno de cada uno de ellos que no contiene al otro. (esp. Fréchet).

Obs: $T_1 \Rightarrow T_0$, $T_0 \not\Rightarrow T_1$

$X = \{a,b\}$, $T = \{\emptyset, X, \{a\}\}$

$\exists \{a\}$ entorno de a y $b \notin \{a\}$ pero $\nexists$ entorno de b que no contenga a a $\Rightarrow T_0 \not\Rightarrow T_1$

Prop: Sea (X,T) e.t. Son equivalentes:

a) (X,T) es T_1

b) $\forall x$ ...

$\Rightarrow \{x\}$ cerrado en (X,T).

$\underline{b) \Rightarrow c)}$ | $\forall E \subset X$: $\cdot E = X$

$\cdot E \neq X$, $\forall x \in X \setminus E \underset{b)}{\Rightarrow} E \subset X \setminus \{x\} \in T$

$\Rightarrow E \subset \bigcap_{x \notin E} (X \setminus \{x\}) = E$ (De Morgan)

$E \subset \bigcap_{\substack{G \in T \\ E \subset G}} G \subset \bigcap_{x \notin E} (X \setminus \{x\}) = E \Rightarrow E = \bigcap_{G \subset E} G$

$\underline{c) \Rightarrow a)}$ | $\forall x, y \in X$, $x \neq y \underset{c)}{\Rightarrow} \{x\} = \bigcap_{\substack{U \in T \\ x \in U}} U \Rightarrow \exists U^x \in T$ t.q.

$U^x \ni x \wedge U^x \not\ni y$

Análogamente : $\exists V^y$ t.q. $x \notin V^y \wedge y \in V^y$

$\Rightarrow X$ es T_1.

Def: Sea (X, T) e.t. Se dice que es T_2 si $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, $\exists U^x, U^y$ entornos disjuntos (Hausdorff).

Obs: $T_2 \Rightarrow T_1$, $T_1 \not\Rightarrow T_2$

Prop: Sea (X, T) e.t. Entonces (X, T) es T_2 sii $\Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$ cerrado en $(X \times X, T \times T)$ (la diagonal es cerrada).

Dem: $\underline{\Rightarrow}$ | $\forall (x, y) \in X \times X \setminus \Delta = \{x \neq y\} \Rightarrow \exists U^x, U^y$ ent. de x e y en $(X, T) \Rightarrow U^x \times U^y$ ent. de (x, y) en $(X \times X, T \times T)$

$U^x \times U^y \subset X \times X \setminus \Delta \Rightarrow X \times X \setminus \Delta \in T \times T \Rightarrow \Delta$ cerrado

$(z, z) \in W^{(x,y)}$, $(z, z) \in \Delta$ abierto.

<u>Corolario</u>: Sean (X,T) y (Y,S) e.t., (Y,S) es T_2 y $f:(X,T) \longrightarrow (Y,T)$ continua. Entonces

$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ es cerrado en $(X,T)\times(Y,S)$

gráfica de f.

<u>Dem</u>: Δ_Y (diagonal Y) cerrado en $(Y,S)\times(Y,S)$

f continua $\Rightarrow (f, f_Y): (X,T)\times(Y,S) \longrightarrow (Y,S)\times(Y,S)$

$(x, f(x)) \longmapsto (f(x), f(x))$

continua. $\Rightarrow G_f = (f, f_Y)^{-1}(\Delta)$ cerrado en $(X,T)\times(Y,S)$

$\boxed{\text{Prop}}$: Sean (X,T) y (Y,S) e.t., (Y,S) es T_2 y $f:(X,T)\longrightarrow(Y,S)$ ap. continua. Entonces $E = \{(x_1,x_2)\in X\times X \mid f(x_1)=f(x_2)\}$ es cerrado en $(X,T)\times(X,T)$.

<u>Dem</u>: $\forall (z_1, z_2) \in X\times X \setminus E \Rightarrow f(z_1)\neq f(z_2) \Rightarrow \exists U^{f(z_1)}, U^{f(z_2)}$

disjuntos $\underset{f \text{ cont.}}{\Rightarrow}$ $f^{-1}(U^{f(z_i)})$ $i=1,2$, entorno de z_i en (X,T)

$\underset{(z_1,z_2)}{\underset{\in}{f^{-1}(U^{f(z_1)})\times f^{-1}(U^{f(z_2)})}} \subset X\times X\setminus E \Rightarrow E$ cerrado.

$\boxed{\text{Prop}}$: Sean (X,T) y (Y,S) e.t., $f:(X,T)\longrightarrow(Y,S)$ ap. suprayectiva y abierta y $E=\{(x_1,x_2)\in X\times X \mid f(x_1)=f(x_2)\}$ cerrado en $(X,T)\times(X,T)$. Entonces (Y,S) es T_2.

<u>Dem</u>: $\forall y_1, y_2 \in Y$ t.q. $y_1 \neq y_2$, $\exists x_1 \in X$ ...

$\boxed{\text{Prop}}$: Sean (X, T) y (Y, S) e.t., Y es T_2 y $f, g: X \to Y$ ap. continuas. Entonces $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.

Dem: $\left.\begin{array}{l}(f, g): X \longrightarrow Y \times Y \text{ ap. continua} \\ Y \text{ es } T_2 \iff \Delta \text{ cerrado en } Y \times Y\end{array}\right\} \Rightarrow (f, g)^{-1}(\Delta_Y)$ cerrado en X.

Corolario: Sean X, Y e.t., Y T_2 y $f, g: X \longrightarrow Y$ ap. continua. Entonces si f, g coinciden en los puntos de un conjunto denso de X, $f = g$.

Dem: $\exists D$ denso de X. $f|_D = g|_D \Rightarrow D \subset \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$

$= E$ cerrado $\Rightarrow \bar{D} = X = \bar{E} \subset E \Rightarrow f = g$.

Obs: Las propiedades T_1, T_2 y T_0 son invariantes topológicos.

$\boxed{\text{Prop}}$ Todo subespacio de un e.t. T_2 es T_2. (Hausdorff hereditario).

Dem: (X, T) e.t. T_2. $\emptyset \neq E \subset X$

$\forall x, y \in X \Rightarrow \exists U^x, U^y$ ent. de (X, T) disjuntos $\Rightarrow \begin{array}{l} U^x \cap E \\ U^y \cap E \end{array}$ disjuntos

$\boxed{\text{Prop}}$ Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j \in J}$ familia $\neq \emptyset$ de e.t. Entonces $(\prod X_j, \prod T_j)$ es T_2 $\iff$ $\forall j \in J$ (X_j, T_j) es T_2.

Dem: $\Rightarrow|$ $\forall j_0 \in J$, $\forall (a_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} X_j$

$E_{j_0} = \{(x_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} X_j \mid x_j = a_j \ \forall j \in J \setminus \{j_0\}\} \cap X_j$

22

$(y \in p_{j_0}^{-1}(U^{y_p}))$

Prop: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ una familia $\neq \emptyset$ de e.t. Entonces $(\sum X_j, \sum T_j)$ es T_2 sii $\forall j \in J$, (X_j, T_j) es T_2.

Dem:

⇒] $\forall j_0 \in J$, $(X_{j_0}, T_{j_0}) \approx X_{j_0} \times \{j_0\} \subset \sum_{j\in J} X_j$

⇐] $\forall x, y \in \sum_{j \in J} X_j$, $x \neq y \Rightarrow \begin{cases} \exists j_0 \in J \text{ t.q. } x, y \in X_j \times \{j_0\} \approx X_{j_0} \\ \exists j_1 \in J \text{ t.q. } x \in X_{j_1} \times \{j_1\} \quad y \in X_{j_2} \times \{j_2\} \end{cases}$

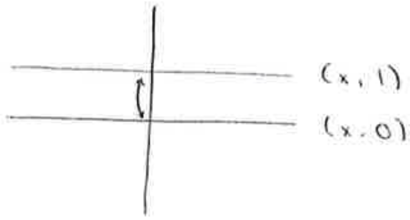
⇒ $p_0(x)$, $p_1(x)$ tienen entornos disjuntos en (X_p, T_p)

⇒ x, y, tienen entornos disjuntos en $(\sum X_j, \sum T_j)$

Obs: El cociente de un e.t. T_2, no es necesariamente T_2.

$X := (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{R} \times \{1\})$

$(X, T_u|_X)$



R: $(x,0) \, R \, (x,1)$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$(X/R, T_u/R)$ no es T_2 $\qquad p: X \longrightarrow X/R$

$p(0,0) \neq p(0,1)$

$\forall U^{p(0,0)}, U^{p(0,1)}$ entornos de $p(0,0)$, $p(0,1)$ en $(X/R, T_u/R)$

$p^{-1}(U^{p(0,0)})$, $p^{-1}(U^{p(0,1)})$ son entornos de $(0,0)$ y $(0,1)$

$\Rightarrow \begin{cases} \exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } (-\varepsilon, \varepsilon) \times \{0\} \subset p^{-1}(U^{p(0,0)}) \\ \exists \delta > 0 \text{ t.q. } (-\delta, \delta) \times \{1\} \subset p^{-1}(U^{p(0,1)}) \end{cases} \Rightarrow U^{p(0,0)} \cap U^{p(0,1)} \neq \emptyset$

Prop: Regular + T_0 $\Leftrightarrow$ Regular + T_1 $\Leftrightarrow$ Regular + T_2.

Dem: $\Rightarrow$) $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, $\exists U$ entorno de y t.q. $x \notin U$

$\Rightarrow X \setminus U$ cerrado, $y \notin X \setminus U \Rightarrow \exists V_1, V_2 \in T$ disjuntos

t.q. $y \in V_1$ y $x \in X \setminus U \subset V_2 \Rightarrow X$ es T_2.

Obs: $T_3 \Rightarrow T_2$.

Obs: $T_2 \not\Rightarrow T_3$, regular $\not\Rightarrow T_2$.

Prop: Sea (X,T) e.t. Son equivalentes:

a) (X,T) regular.

b) $\forall x \in X$, $\forall U$ abierto, $x \notin U$; $\exists V$ abierto t.q. $x \in V \subset \bar{V} \subset U$

c) $\forall x \in X$ tiene una base de entornos cerrados en (X,T).

Dem: a) $\Rightarrow$ b)| $x \in U \in T \Rightarrow x \notin X \setminus U$ $\underset{x \in V_1}{\Rightarrow}$

$\exists V_1, V_2 \in T$ disjuntos, $x \in U \subset V_1$. $\Rightarrow$

$V_1 \subset X \setminus V_2 \Rightarrow \bar{V}_1 \subset X \setminus V_2 \subset U$

b) $\Rightarrow$ c)| $\forall x \in X$, $\{\bar{V} \mid V \in T, x \in V\}$ base de entornos cerrados de x.

c) $\Rightarrow$ a)| $x \notin C$ cerrado $\Rightarrow x \in X \setminus C \in T \Rightarrow \bar{V}$ ent. cerrado de x t.q. $\bar{V} \subset X \setminus C \Rightarrow$ | $x \in \mathring{V} \in T$

Dem: $\forall C$ cerrado de $(E, T|_E)$, $x \in E$ y $x \notin C \Rightarrow$

$\exists F$ cerrado de (X, T) t.q. $C = F \cap E$ $(x \notin F)$.

$\Rightarrow \exists U, V \in T$ disjuntos, $x \notin U$ y $F \subset V$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in U \cap E \\ C \subset V \cap E \end{array} \right. \in T|_E \text{ (disjuntos).}$$

$\boxed{\text{Prop:}}$ Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j \in J}$ una familia $\neq \emptyset$ de e.t. Entonces $(\prod X_j, \prod T_j)$ es T_3 (resp. regular) sii $\forall j \in J$, (X_j, T_j) es T_3 (resp. regular).

Dem: $\Rightarrow\rfloor$ Fácil.

$\Leftarrow\rfloor$ $\forall x \in \bigcap_{j \in J} X_j$, $\forall U^x$ ent. de $x \Rightarrow \exists B^{\in \mathcal{B}}$ base de $\prod T_j$ con

$x \in B \subset U^x$, $B = \bigcap_{k=1}^{n} p_{j_k}^{-1}(U_{j_k})$ con $U_{j_k} \in T_{j_k}$ $\forall k = 1, \ldots, n$

$\Rightarrow \forall k = 1, \ldots, n$ $x_{j_k} \in U_{j_k} \in T_{j_k} \Rightarrow \forall k$ $\exists V^{x}_{j_k}, V^{y}_{j_k} \subset U_{j_k}$

entornos cerrados t.q. $x \in \bigcap_{k=1}^{n} p_{j_k}^{-1}(V^{x}_{j_k}) \subset B \subset U^x$

Obs: El cociente de un e.t. T_3 no es necesariamente regular.

$(\mathbb{R}, T_u)$ es T_3: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\{[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \mid \varepsilon > 0\}$ es base de entornos cerrados de x.

$x, y \in \mathbb{R}$, $x \mathcal{R} y :\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x, y \in \mathbb{Q} \\ \text{ó} \\ x = y \end{array} \right.$

$x \notin$, $[x]$ cerrado en $(\mathbb{R}/\mathcal{R}, T_u/\mathcal{R})$

$x \in p^{-1}(V) \in T_n \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ t.q. $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in p^{-1}(U)$

$\Rightarrow (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathbb{Q} \subset p^{-1}(U) \cap p^{-1}(V) \Rightarrow U \cap V \neq \emptyset.$

Def: Sea (X,T) e.t. Diremos que es completamente regular si $\forall x \in X$ y $\forall C$ cerrado de (X,T), $x \notin C$, $\exists f : (X,T) \longrightarrow [0,1]$ continua.

$$x \longrightarrow 0$$
$$C \longrightarrow \{1\}$$

Diremos que es T_{3a} si es completamente regular y T_1.

Obs: completamente regular $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X$, $\forall C$ cerrado, $x \notin C$, $\exists g : (X,T) \to [0,1]$ continua

$$x \longrightarrow 1$$
$$c \longrightarrow \{0\}$$

$\Leftrightarrow$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\forall x \in X$, $\forall C$ cerrado con $x \notin C$, $\exists h : (X,T) \to [a,b]$ continua.

$$x \longrightarrow a$$
$$c \longrightarrow \{b\}$$

Obs: Completamente regular $\Rightarrow$ regular

$T_{3a} \Rightarrow T_3$

$T_3 \not\Rightarrow T_{3a}$

Obs: Completamente regular $\not\Rightarrow T_1$

$X = \{a,b,c\}$, $T = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b,c\}\} = \mathcal{C}_T$

$a \notin \underset{\text{cerrado}}{\{b,c\}}$, Sea $f : X \to [0,1]$ continua. Completamente regular.

$$a \longrightarrow 0$$
$$b \longrightarrow 1$$
$$c \longrightarrow 1$$

y (X,T) no es T_1

ya que para $x = b$, $y = c$

$b \neq c$, $\forall U^b, U^c$ ent $(U^b = U^c =$

Prop: Todo e.t. metrizable es T_{3a}.

$d(x, C)$

$\Rightarrow g(C) = \{0\}$

$f(z) = \min \{ g(z,1) \}$, f continua y $\begin{cases} f(x) = 1 \\ f(C) = 0 \end{cases}$

Obs: El ser completamente regular (o T_{3a}) son invariantes topológicos

Prop: Todo subespacio de un e.t. compl. regular (resp. T_{3a}) es compl. regular (resp. T_{3a}).

Dem: (X,T) comp. regular. $E \subset X$, C cerrado de $(E, T|_E)$ y $x \in E$, $x \notin C$

$\Rightarrow \exists F$ cerrado de (X,T) t.q. $C = F \cap E$ $(\Rightarrow x \notin F)$

$\overset{\Rightarrow}{\text{hip}}$ $\exists f : (X,T) \longrightarrow [0,1]$ cont.
$x \longrightarrow 0$
$F \longrightarrow \{1\}$
$\Rightarrow f|_E(x) = 0$, $f|_E(C) = \{1\}$

Prop: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ familia de e.t. Entonces $(\Pi X_j, \Pi T_j)$ es compl. regular (resp. T_{3a}) sii $\forall j \in J$, (X_j, T_j) es compl. regular (resp. T_{3a}).

Dem: $\Rightarrow$ | Fácil.

$\Leftarrow$ | $\forall x \in \prod_{j\in J} X_j$, $\forall C$ cerrado, $C \neq \emptyset$, de $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J} T_j)$ y

$x \notin C \Rightarrow x \in \Pi X_j \setminus C \in \Pi T_j \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}$ (base de ΠT_j)

t.q. $x \in B \subset \Pi X_j \setminus C \Rightarrow B = \bigcap_{k=1}^{n} p_{j_k}^{-1}(U_{j_k})$, $U_{j_k} \in T_{j_k}$ $\forall k = \overline{1,n}$

$\Rightarrow x_{j_k} \in U_{j_k} \in T_{j_k} \Rightarrow x_{j_k} \notin X_{j_k} \setminus$ $\overset{\Rightarrow}{\text{hip}}$ $\forall k$

$\exists f_k : (X_{j_k}, T_{j_k}) \longrightarrow [0,1]$ continua
$x_{j_k} \longrightarrow 0$
$x_{j_k} \setminus U_{j_k} \longrightarrow \{1\}$

$\Rightarrow \forall z \in \Pi X_j$ continua

Prop: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ una familia $\neq \emptyset$ de e.t. Entonces $(\sum X_j, \sum T_j)$ es compl. regular (resp. T_{3a}) sii $\forall j \in J$, (X_j, T_j) compl. regular (resp. T_{3a})

Dem: $\Rightarrow$ | por homeomorfismos.

$\Leftarrow$ | $\forall x \in \sum_{j\in J} X_j$, $\forall C$ cerrado, $C \neq \emptyset$, de $(\sum_{j\in J} X_j, \sum_{j \in J} T_j)$

y $x \notin C$. $\Rightarrow \exists!\, j_0 \in J$ t.q. $x \in X_{j_0} \times \{j_0\}$

$C \cap (X_{j_0} \times \{j_0\})$ cerrado en $X_{j_0} \times \{j_0\}$

Si $C \cap (X_{j_0} \times \{j_0\}) = \emptyset$. Sea $f_{j_0} : X_{j_0} \times \{j_0\} \longrightarrow [0,1]$

Sea $f : (\sum X_j, \sum T_j) \longrightarrow [0,1]$ y $\begin{cases} f|_{X_{j_0} \times \{j_0\}} := f_{j_0} \\ f|_{X_{j_0} \times \{j\}} := 1 \end{cases}$

$\forall j \in J \setminus \{j_0\}$

$\Rightarrow f$ continua y $\begin{cases} f(x) = 0 \\ f(C) = \{1\} \end{cases}$

Obs: El cociente de un e.t. T_{3a} no es necesariamente compl. regular.

$(\mathbb{R}, T_u)$ T_{3a} y $(\mathbb{R}/_{\mathbb{Q}}, T_u/_{\mathbb{Q}})$ no c. regular.

Def: Sea (X, T) un e.t. Diremos que es normal si $\forall C_1, C_2$ cerrados de (X,T) disjuntos, $\exists U_i \in T$ disjuntos $i = 1,2$ t.q. $C_i \subset U_i$.

Diremos que es T_4 si es normal y T_1.

Prop: Todo e.t metrizable es T_4.

Dem: Sea (X, T) ...

$x \in C_1$ ... $\frac{\delta}{3}x$ ... $y \in C_2$ ... $\frac{\delta}{3}y$ ... (y)

Comprobemos que son disjuntos.

Si $\exists z \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow \begin{cases} z \in B_{\frac{\varepsilon}{3} x_0}(x_0) & \text{para algún } x_0 \in C_1 \\ z \in B_{\frac{\delta}{3} y_0}(y_0) & \text{para algún } y_0 \in C_2 \end{cases}$

$\Rightarrow d(x_0, y_0) \leq d(x_0, z) + d(z, y_0) < \frac{\varepsilon}{3} x_0 + \frac{\delta}{3} y_0$

$\Rightarrow y_0 \in B_{\varepsilon x_0}(x_0)$ ↯ $\Rightarrow U_1 \cap U_2 = \emptyset$

Lema de Jones: Sea (X, T) e.t. Si $\exists D$ denso en (X, T) y $\exists E$ cerrado en (X, T), t.q. $(E, T|_E)$ discreto y $\operatorname{card} E \geq 2 \Rightarrow (X, T)$ no es normal.

Prop: Sea (X, T) e.t. Son equivalentes:

a) (X, T) normal.

b) $\forall C$ cerrado y $\forall U$ abierto. $C \subset U$, $\exists V$ abierto t.q. $C \subset V \subset \bar{V} \subset U$

c) $\forall C_1, C_2$ cerrados disjuntos de (X, T), $\exists G_1 \in T$ con $C_1 \subset G_1$ t.q. $\bar{G_1} \cap C_2 = \emptyset$

d) $\forall C_1, C_2$ cerrados disjuntos de (X, T), $\exists G_i \in T$ $i = 1, 2$. t.q. $C_i \subset G_i$ y $\bigcap_{i=1}^{2} \bar{G_i} = \emptyset$

Dem: a)$\Rightarrow$b) | $C \subset U \in T \Rightarrow C$ y $X \setminus U$ cerrados disjuntos de (X, T)

$\underset{a)}{\Rightarrow} \exists V_1, V_2 \in T$ disjuntos t.q. $C \subset V_1$ y $X \setminus U \subset V_2$

$\Rightarrow C \subset V_1 \subset \bar{V_1} \subset \underset{\text{cerrado}}{X \setminus V_2} \subset U$

t.q. $C_1 \subset G_1$ y $\bar{G_1} \cap C_2 = \emptyset \underset{c)}{\Rightarrow} \exists G_2 \in T$ t.q.

Obs: La normalidad y ser T_4 es invariante topológico.

Prop: Sea (X,T) e.t. normal (resp. T_4) y E cerrado de (X,T), $E \neq \emptyset$, entonces $(E, T|_E)$ es normal (resp. T_4).

Dem: $\forall C_1, C_2$ cerrados disjuntos de $(E, T|_E) \Rightarrow C_1, C_2$ cerrados de (X,T) (E cerr.) $\Rightarrow \exists U_i \in T$ disjuntos $i=1,2$ t.q. $C_i \subset U_i \Rightarrow$

$C_i \subset U_i \cap E \in T|_E$ disjuntos.

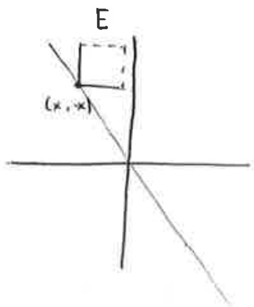
Obs: El producto de dos e.t. normales no es necesariamente normal.

$(\mathbb{R}, T(B))$ normal $\quad B = \{[a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}$ y $a<b\}$

recta de Sorgenfrey.

$T(B)^2$ top. producto.

$E = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ cerrado en $(\mathbb{R}^2, T(B)^2)$ y $\operatorname{card} E = \operatorname{card} \mathbb{R}$



$T(B)^2 \Big|_E$ es la top. discreta pues la intersección de E con $[a,b)$ es un sólo punto.

$\mathbb{Q}^2$ conjunto numerable denso en $(\mathbb{R}, T(B))^2 \underset{\text{lema de Jones}}{\Rightarrow}$

$(\mathbb{R}, T(B))^2$ no es normal.

Prop: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ una familia de e.t. $\neq \emptyset$. Entonces $(\sum X_j, \sum T_j)$ es normal (resp. T_4) sii $\forall j \in J$, (X_j, T_j) es normal (resp. T_4).

Dem: $\Rightarrow$ | Fácil.

$\Leftarrow$ | $\forall C_1, C_2$ cerrados disjuntos de $(\sum X_j, \sum T_j) \Rightarrow \forall k \in J$

disjuntos.

$C_2 \subset \bigcup_{k\in J} U_{k_2} \times \{k\} \in \sum_{k\in J} T_k$

Prop: Sea (X,T) e (Y,S) e.t. y $f:(X,T) \longrightarrow (Y,S)$ ap. supravectiva continua y cerrada. Si (X,T) es normal (resp. T_4), entonces (Y,S) también lo es.

Dem: $\forall C_1, C_2$ cerrados disjuntos de (Y,S) $\underset{f \text{ cont.}}{\Rightarrow}$ $f^{-1}(C_1)$, $f^{-1}(C_2)$ cerrados disjuntos de (X,T) $\Rightarrow \exists U_i \in T$ $i=1,2$ disjuntos t.q. $f^{-1}(C_i) \subset U_i$ $\underset{f \text{ cerrada}}{\Rightarrow}$ $Y \setminus f(X \setminus U_i) \in S$ $i=1,2$. y $C_i \subset Y \setminus f(X \setminus U_i)$

$X \setminus U_i$ cerr $\Rightarrow f(X \setminus U_i)$ cerr.

Veamos que son disjuntos: $[Y \setminus f(X \setminus U_1)] \cap [Y \setminus f(X \setminus U_2)] =$

$= Y \setminus [f(X \setminus U_1) \cup f(X \setminus U_2)] = Y \setminus f((X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2)) =$

$= Y \setminus f(X \setminus (U_1 \cap U_2)) = Y \setminus f(X) \underset{f \text{ sup}}{=} Y \setminus Y = \emptyset$

(X,T) T_4, $\forall y \in Y$, $\exists x \in X$ t.q. $f(x) = y$

$\{x\}$ es cerrado en (X,T) $\underset{f \text{ cont}}{\Rightarrow}$ $f(\{x\}) = \{y\}$ cerrado en (Y,S)

$\Rightarrow (Y,S)$ T_4.

Lema de Urysohn: Sea (X,T) e.t. (X,T) es normal sii $\forall C_1, C_2$ cerrados disjuntos de (X,T), $\exists f:(X,T) \longrightarrow [0,1]$ continua t.q. $f(C_1) = \{0\}$ y $f(C_2) = \{1\}$

Dem: $\Rightarrow$) (X,T) normal. $\forall C_1, C_2$ cerrados disjuntos de (X,T). Sea $J = \{\frac{k}{2^n} : k \in \{1, \dots, 2^n\}$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$

$\forall z \in J: \exists H_z \subset X$ t.q. $\begin{cases} 1) \ H_0 = C_1, \ H_1 = X \setminus C_2 \\ 2) \ \forall z, z' \in J, \ z < z' \ \dots \end{cases}$

$J_n = \{\frac{k}{2^n} : k \in \{0,1,2, \dots\}\}$, $J_n \subset J_{n+1}$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

dem: Hacemos inducción sobre n:

$n=0$, $J_0=\{0,1\}$ y $H_0 = C_1 = \overline{C_1} = \overline{H_0}$

$H_1 = \mathring{H}_1 = X - C_2 \in T$

$\overline{H_0} \subset \mathring{H}_1$

Supongamos que se cumple para $p=n-1$.

Sea $p=n$. $\forall z \in J_p \Rightarrow z = \dfrac{k}{2^p}$

$\rightarrow k$ par : $k = 2k' \Rightarrow z = \dfrac{2k'}{2^p} = \dfrac{k'}{2^{p-1}} \in J_{p-1}$

$\rightarrow k$ impar : $s = \dfrac{k-1}{2^p} < \dfrac{k+1}{2^p} = t$, $s,t \in J_{p-1}$

$\exists H_s, H_t$ cumpliendo 1) y 2) t.q.

$\overline{H_s} \subset \mathring{H}_t \in T \underset{(X,T)\text{ normal}}{\Rightarrow} \exists H_z \in T$ t.q. $\overline{H_s} \subset H_z \subset$
$\overline{H_z} \subset H_t$

Ya tenemos lo anterior demostrado:

$f: X \longrightarrow [0,1]$

$$x \longrightarrow \begin{cases} \inf\{z \in J \mid x \in \overline{H_z}\} & \text{si } x \notin C_2 \ (\Rightarrow x \in C_1) \\ 1 & \text{si } x \in C_2. \end{cases}$$

Si $x \in C_1$: $H_0 \subset \overline{H_0} \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f(C_1) = \{0\}$

$\forall x_0 \in X$ t.q. $f(x_0) \in [0,1]$:

<u>1er CASO</u> : $0 < f(x_0) < 1$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists s,t \in J$ t.q. $f(x_0) - \varepsilon < t < f(x_0) + \varepsilon$

porque J es denso en $[0,1]$

$[\forall \delta > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{1}{2^n} < \delta \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ t.q.$]$

$\Rightarrow \overline{H_s} \subset \mathring{H}_t$)

$\Rightarrow (X \setminus \overline{M_t}) \cap \mathring{M}_s = V^{x_0}$ (entorno abierto de x_0).

$$\forall x \in V^{x_0} \begin{cases} x \in X \setminus \overline{M_t} \Rightarrow f(x) \geq t \Rightarrow \overline{M_j} \subset \mathring{M}_t \subset \overline{M_t} \\ x \in \mathring{M}_s \Rightarrow f(x) \leq s \Rightarrow f(V^{x_0}) \subset [t,s] \subset [f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon] \end{cases}$$

⋮

SIN TERMINAR.

Corolario: $T_4 \Rightarrow T_{3a}$

Obs: $T_{3a} \not\Rightarrow T_4$ (T_{3a} es multiplicativa y T_4 no).

Teorema de extensión de Tietze: Sea (X,T) e.t. (X,T) normal sii $\forall C$ cerrado de (X,T) y $\forall f: (C, T|_C) \longrightarrow [-1,1]$ cont. $\exists F: (X,T) \longrightarrow [-1,1]$ cont. t.q. $F|_C = f$.

Prop: Sea (X,T) e.t. Son equivalentes:

a) (X,T) normal

b) $\forall C$ cerrado de (X,T) y $\forall g: (C, T|_C) \longrightarrow (-1,1)$ cont., $\exists \hat{g}: (X,T) \longrightarrow (-1,1)$ continua t.q. $\hat{g}|_C = g$

c) $\forall C$ cerrado de (X,T) y $\forall h: (C, T|_C) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, $\exists \hat{h}: (X,T) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua t.q. $\hat{h}|_C = h$.

Dem: a) $\Rightarrow$ b) | C cerrado de (X,T), $g: C \longrightarrow (-1,1) \subset [-1,1]$

y $C_1 \cap C = \emptyset \Rightarrow$ $\exists h: (X,T) \longrightarrow [0,1]$ cont.
Lema de Urysohn

$h(C_1) = \{0\}$

$h(C) = \{1\}$

Sea $\hat{g} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ t.q. $\tilde{g}(x) := \bar{g}(x)\, h(x)$

$\tilde{g}$ continua.

$\tilde{g}|_C = g$

b) $\Rightarrow$ c) | $(\mathbb{R}, T_u) \approx (a,b)$

c) $\Rightarrow$ a) | $\forall C_1, C_2$ cerrados disjuntos de (X,T)

$\Rightarrow C_1 = \emptyset$ ✓

$\Rightarrow C_1, C_2 \neq \emptyset \Rightarrow C_1 \cup C_2 \neq \emptyset$ cerrado.

$g : (C_1 \cup C_2, T|_{C_1 \cup C_2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

$C_1 \longrightarrow \{-1\}$

$C_2 \longrightarrow \{1\}$

$\Rightarrow \exists \hat{g} : (X,T) \longrightarrow \mathbb{R}$ cont. t.q. $\hat{g}|_{C_1 \cup C_2} = g$

$\Rightarrow \hat{g}^{-1}((-1,0)) \in T$ y $\hat{g}^{-1}((0,\rightarrow)) \in T$

Def: Sea X conjunto $\neq \emptyset$. Diremos que X es numerable si $\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$

Def: Sea (X,T) e.t. Se verifica el Primer Axioma de Numerabilidad si cada punto de X tiene alguna base de entornos numerable.

Ejemplo:

1) $\forall X$ conjunto, (X, T_D) cumple el 1^{er} Axioma.

$\forall x \in X \quad B(x)$ ...

[illegible] en base numerable de T.

Obs: Todo espacio que verifica el II.A.N., verifica el I.A.N.

Obs: El recíproco es falso (e.t. discreto con cardinal no medible).

Prop: Todo subespacio de un e.t. que cumple I.A.N. (resp. II.A.N) cumple I.A.N. (resp. II A.N.).

Dem: a) $\forall U^x$ entorno de (X,T), $U^x \cap E$ entorno en $(E, T|_E)$

b) $\mathcal{B}$ base de $T \Rightarrow \{B \cap E \mid B \in \mathcal{B}\}$ base de $T|_E$.

Prop: Sean (X,T) y (Y,S) e.t., $f:(X,T) \longrightarrow (Y,S)$ supreyectiva continua y abierta. (X,T) cumple I.A.N (resp. II.A.N.) $\Rightarrow$ (Y,S) también lo cumple.

Dem: a) $\forall y \in Y$, $\exists x \in X$ t.q. $f(x) = y$

$\exists \mathcal{B}(x) = \{B_n^x \mid n \in \mathbb{N}\}$ base de entornos numerable $\underset{f \text{ abierta}}{\Rightarrow}$

$\mathcal{B}^x(y) = \{f(B_a^x) \mid a \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{V}(y)$

$\forall V^y \underset{f \text{ continua}}{\Rightarrow} \exists U^x,\ f(U^x) \subset V^y \Rightarrow \exists u_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$B_{u_0}^x \subset U^x \Rightarrow f(B_{u_0}^x) \subset V^y \Rightarrow \mathcal{B}^x(y)$ base de entornos numerable de y.

b) $\exists \mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ base de T numerable $\Rightarrow$

$\mathcal{B}^x = \{f(B_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset S$

Prop: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ una familia $\neq \emptyset$ de e.t.. Entonces $(\prod X_j, \prod T_j)$ verifica el I A.N. (resp. II A.N.) sii $\forall j \in J$, (X_j, T_j) verifica el I.A.N. (resp. II A.N.) y $\{j \in J \mid T_j \text{ no trivial}\}$ es numerable.

Dem:

$\Rightarrow)$ $p_j : (\prod X_j, \prod T_j) \longrightarrow (X_j, T_j)$ suprayectiva, continua y abierta $\Rightarrow$ (X_j, T_j) cumple I.A.N. (resp. II A.N.) $\forall j \in J$.

Sea $K = \{j \in J \mid T_j \text{ no trivial}\}$

a) $(\prod X_j, \prod T_j)$ verifica I.A.N.

$\exists a = (a_j)_{j\in J} \in \prod X_j$ y $\exists \mathcal{B}(a) = \{B_n^a \mid n \in \mathbb{N}\}$ base de entornos de a.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $H_n = \{j \in J \mid p_j(B_n^a) \neq X_j\}$ finito $\Rightarrow$ $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n = H$ numerable $K \subset H$.

$\forall j \in K$, $T_j \neq \{\emptyset, X_j\}$ $\Rightarrow$ $\exists n \in \mathbb{N}$ t.q. $p_j(B_n^a) \neq X_j$ $\Rightarrow$ $j \in H_{n_0} \subset H$

b) $(\prod X_j, \prod T_j)$ verifica II A.N.

$\exists \mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ base de $\prod_{j\in J} T_j$

$\forall n \in \mathbb{N}$: $H_n = \{j \in J \mid p_j(B_n) \neq X_j\}$ finito $\Rightarrow$

$\bigcup H_n = H$ numerable $K \subset H$

$\Leftarrow$] $K = \{ j \in J \mid T_j$ no trivial$\}$ numerable.

a) $\forall a \in \prod_{j\in J} X_j$, $\forall j \in J$ $\exists \mathcal{B}(a_j) = \{ B_n^{a_j} \mid n \in \mathbb{N} \}$ base numerable de ent. de a_j

Sea $\mathcal{B}(a) = \{ \prod_{j\in J} B_j \mid B_j \quad X_j \ \forall j \in J \setminus F \ \ F$ finito$\}$ base de ent. de a en $(\prod X_j, \prod T_j)$ numerable.

b) $\forall j \in J$, $\exists \mathcal{B}_j = \{ B_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ base numerable de T_j.

Sea $\mathcal{B} = \{ \prod_{j\in J} B_j \mid B_j = X_j \ \forall j \in J \setminus F \ \ F$ finito$\}$ base de $\prod T_j$ numerable.

Prop: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ familia $\neq \emptyset$ de e.t. Entonces:

a) $(\Sigma X_j, \Sigma T_j)$ verifica I A.N. sii $\forall j \in J$, (X_j, T_j) verifica I A.N.

b) $(\Sigma X_j, \Sigma T_j)$ verifica II A.N. sii $\forall j \in J$, (X_j, T_j) verifica II A.N. y J es medible.

Dem:

a) $\Rightarrow$]

$\Leftarrow$] $\forall x \in \Sigma X_j$, $\exists j_0 \in J$ t.q. $x \in X_{j_0} \times \{j_0\} \Rightarrow$

$p_1(x)$ tiene una base de ent. numerable en (X_j, T_j)

$\Rightarrow x$ tiene una base de ent. numerable en $(\Sigma X_j, \Sigma T_j)$

b) $\Rightarrow$]

$\forall j \in J$, $X_j \times \{j\}$ es abierto en $(\Sigma X_j, \Sigma T_j)$

Prop: Sea (X,T) e.t. que verifica I.A.N. $\forall x \in X$, $\exists \mathcal{B}(x) = \{B_n^x \mid n \in \mathbb{N}\}$ t.q. $B_n^x \supset B_{n+1}^x$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Dem: $\exists \{V_n^x \mid n \in \mathbb{N}\}$ base numerable de x.

Sea $B_n^x = V_1^x \cap \dots \cap V_n^x \Rightarrow \{B_n^x \mid n \in \mathbb{N}\}$ base de ent. y $B_n^x \supset B_{n+1}^x$

Prop: Sea (X,T) que verifica I.A.N.

1) $H \subset X$ y $x \in X$. $x \in \overline{H} \Leftrightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ t.q. $(x_n) \longrightarrow x$

2) $H \subset X$ y $x \in X$. $x \in H' \Leftrightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H \setminus \{x\}$ t.q. $(x_n) \longrightarrow x$

3) $H \subset X$. H cerrado $\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$, $\lim (x_n) \in H$

4) $\forall (X',T')$ e.t. y $f : X \to X'$. $f : (X,T) \longrightarrow (X',T')$ cont. en x

$\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, $(x_n) \longrightarrow x \Rightarrow (f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow f(x)$

Dem:

1) $\forall x \in X$, $\exists \{B_n^x\}_{n \in \mathbb{N}}$ base de ent. de x t.q. $B_n^x \supset B_{n+1}^x$

$\boxed{\Rightarrow}$ $x \in \overline{H}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $B_n^x \cap H \neq \emptyset$ $(x_n \in B_n^x \cap H)$

$\forall U^x$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $B_{n_0}^x \subset U^x \Rightarrow B_n^x \subset U^x$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall U^x$, $\exists n \in \mathbb{N}$ t.q. $x_n \in U^x \Rightarrow U^x \cap H \neq \emptyset$

Obs: Si (X,T) e.t. (no cumple I.A.N.)

$H \subset X$, $x \in X \Rightarrow x \in \overline{H} \not\Rightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ t.q. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \to x$

Si eso fuera falsa:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists n' \in \mathbb{N}$ t.q. $n' \geq n$ ... numerable $\Rightarrow$

Def: Sea (X,T) e.t. Se dice que es separable si $\exists D$ denso y numerable en (X,T).

[Separabilidad $\neq$ Separación]

Prop: Todo e.t. que cumpla II A.N. es separable

Dem: (X,T) cumple II A.N. $\Leftrightarrow$ $\exists \mathcal{B}$ base numerable de T $\Rightarrow$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in B_n$ t.q. $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} := D$.

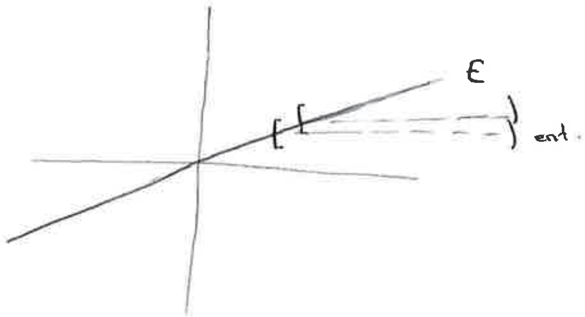
$\forall U \in T \setminus \{\emptyset\}$, $\exists B_{n_0} \in \mathcal{B}$ con $B_{n_0} \subset U \Rightarrow U \cap D \neq \emptyset$

Obs: Separable $\not\Rightarrow$ II A.N.

Sea $S = (\mathbb{R}, T(\mathcal{B}))$, $\mathcal{B} = \{[a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}$ y $a<b\}$

Si S fuera II A.N. $\Rightarrow$ $S \times S$ cumple II A.N.

$E = \{(x,u) \mid u \in \mathbb{R}\} \subset S \times S$ no cumple II A.N. ya que es no numerable y discreto.



Obs: Separable no es propiedad hereditaria.

$E \subset S \times S$

$\uparrow \qquad \uparrow$

$D \cap G \neq \emptyset$ numerable y denso en $(G, T|_G)$

$$\forall A \in T|_G \setminus \{\emptyset\} \Rightarrow A \in T \setminus \{\emptyset\}$$

$$A \subset G$$

$$A \cap D \neq \emptyset$$

$$\shortparallel$$

$$A \cap (G \cap D)$$

Prop: Sean (X,T) e (Y,S) e.t. Sea $f:(X,T) \longrightarrow (Y,S)$ suprayectiva continua. Si (X,T) es separable, entonces (Y,S) también lo es.

Corolario: Ser separable es invariante topológico.

Prop: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ una familia $\neq \emptyset$ de e.t. T_2 con card $X_j \geq 2$ $\forall j \in J$. $(\Pi X_j, \Pi T_j)$ separable sii $\forall j \in J$, (X_j, T_j) separable y card $J \leq 2$

Dem:

$\Rightarrow$ | $\forall j \in J$, $p_j : (\prod X_j, \prod T_j) \longrightarrow (X_j, T_j)$ supraproyectiva y continua.

$\forall j \in J$, $\exists U_j, V_j \in T_j \setminus \{\emptyset\}$ y disjuntos

(X_j, T_j) es T_2 y card $X_j \geq 2$ por hipótesis.

$\exists D$ denso numerable en $(\prod X_j, \prod T_j)$ t.q.

$D_j := p_j^{-1}(U_j) \cap D \neq \emptyset$ $\forall j \in J$
$*$

$*$ Si $j, j' \in J$, $j \neq j'$ $\Rightarrow$ $\underbrace{p_j^{-1}(U_j) \cap p_{j'}^{-1}(U_{j'}) \cap p_{j'}^{-1}(V_{j'})}_{\in \prod T_j \setminus \{\emptyset\}}$

$\Rightarrow D \cap p_j^{-1}(U_j) \cap p_j^{-1}(V_j') \neq \emptyset$

$\Rightarrow \begin{cases} x \in D_j \\ x \notin D_{j'} \end{cases} \Rightarrow D_j \neq D_{j'}$

$\Rightarrow F : J \longrightarrow \mathcal{P}(D)$
$\quad j \longmapsto D_j$ aplicación inyectiva $\Rightarrow$ card $J \leq$

$\leq$ card $\mathcal{P}(D) = 2$ $\Rightarrow$ card $D \leq 2$.

$\Leftarrow$ | $\forall j \in J$, $\exists D_j = \{d_{jn} \mid n \in \mathbb{N}\}$ denso en (X_j, T_j)

card $J \leq 2^{\aleph_0}$

Supongamos $J = [\ldots]$

$p_i := \begin{cases} d_{i n_i} & \text{si } i \in J_i \text{ para algún } i \in \{1, \ldots, k\} \\ d_{i} & \text{si } i \notin J_i \ \forall i \in \{1, \ldots, k\} \end{cases}$

Sea $D = \{ p_{J_1 \dots J_k}^{n_1 \dots n_k} \mid x \in \mathbb{N},\ n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N},\ J_1, \dots, J_k$ racio[nales$\}$]

numerable y $\subset \prod X_j$.

Vemos que es denso: $\forall U \in \prod T_j \setminus \{\emptyset\}$, $\exists B \in \mathcal{B}$, $B \neq \emptyset$

t.q. $B \subset U$.

$$B = \bigcap_{k=1}^{m} p_{j_k}^{-1}(U_{j_k})$$

$\forall i = 1, \dots, m$: $U_{j_i} \in T_{j_i} \neq \{\emptyset\} \Rightarrow \forall i$: $U_{j_i} \cap D_{j_i} \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists J_n, \dots J_m$ segmentos disjuntos de extremos racionales

t.q. $\subset [0,1]$.

$p_{J_1 \dots J_m}^{n_1 \dots n_m} \in D \cap B \subset D \cap U \Rightarrow D$ denso

$\uparrow$

U arbitrario.

$\boxed{\text{Prop}}$: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j \in J}$ familia de e.t.. Entonces $(\sum X_j, \sum T_j)$

separable sii $\forall j \in J$, (X_j, T_j) es separable y J numerable.

Dem: $\Rightarrow |$ $(X_j, T_j) \cong X_j \times \{j\}$ abierto de $\sum T_j$, $\forall j \in J$.

$\forall j \in J$, $X_j \times \{j\}$ abierto $\neq \emptyset$ de $\sum T_j$

$\exists D$ denso numerable en $(\sum X_j, \sum T_j) \Rightarrow$

$D \cap (X_j \times \{j\}) \neq \emptyset$ $(z_j \in D \cap (\ ))$ $\forall j \in J$

y no vacío.

Def: Sea (X,T) e.t. y $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$. Se dice que $\mathcal{U}$ es un recubrimiento de X si $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X$.

Si $\mathcal{U} \subset T$ se dice recubrimiento abierto.

Def: Sea (X,T) e.t. $\mathcal{U}$ abierto de X y $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(X)$. Se dice que es un subrecubrimiento de $\mathcal{U}$ si $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ recubrimiento de X.

Def: Sea (X,T) e.t. Se dice que (X,T) es Lindelöf si $\forall \mathcal{U}$ recubrimiento abierto de (X,T), existe algún subrecubrimiento de $\mathcal{U}$ numerable.

Obs: El ser Lindelöf no es hereditario.

$(\mathbb{R}, T)$, $T = \mathbb{R} \cup \{U \subset \mathbb{R} \mid 0 \notin U\}$ es Lindelöf:

$\exists U_0 \in \mathcal{U}$ t.q. $0 \in U_0$ $(U_0 = \mathbb{R})$.

$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, T|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}})$ no es Lindelöf:

$\mathcal{V} = \{\mathbb{R}\}$

$\mathcal{U} = \{\{x\} \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$

$\mathcal{U}$ no tiene subrecubrimiento numerable.

Prop: Todo cerrado de un e.t. Lindelöf, es Lindelöf.

Dem: (X,T) Lindelöf. $E \neq \emptyset$ cerrado de (X,T)

$\forall \mathcal{U}$ recubrimiento abierto de $(E, T|_E)$

suponemos

Prop: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ familia de e.t. Entonces $(\Sigma X_j, \Sigma T_j)$ es Lindelöf si $\forall j \in J, (X_j, T_j)$ es Lindelöf y J numerable.

Dem: $\Rightarrow$ | $\forall j \in J$, $(X_j, T_j) \approx X_j \times \{j\}$ cerrado en $(\Sigma X_j, \Sigma T_j)$

$\{X_j \times \{j\} \mid j \in J\}$ recubrimiento abierto en $(\Sigma X_j, \Sigma T_j)$

$\underset{\text{hip.}}{\Rightarrow}$ J numerable.

$\Leftarrow$ | $\forall \mathcal{U}$ recubrimiento abierto de $(\Sigma X_j, \Sigma T_j) \Rightarrow \forall j \in J$, $\mathcal{U}_j = \{U \cap (X_j \times \{j\}) \mid U \in \mathcal{U}\}$ recubrimiento abierto de $X_j \times \{j\} \approx (X_j, T_j)$

$\Rightarrow \exists \mathcal{V}_j$ subrecubrimiento numerable de $\mathcal{U}_j$ $\forall j \in J$.

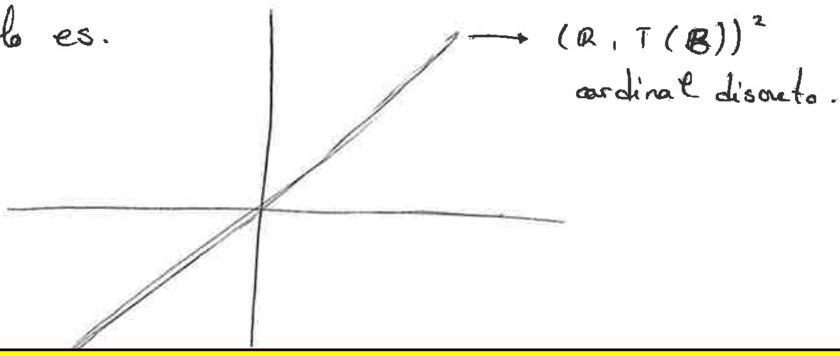
Sea $\mathcal{V} = \bigcup_{j\in J} \{U \in \mathcal{U} \mid U \cap (X_j \times \{j\}) \in \mathcal{V}_j\} \subset \mathcal{U}$

$\Rightarrow \mathcal{V}$ subrecubrimiento numerable de $\mathcal{U}$.

Obs: El producto de dos e.t. Lindelöf no es necesariamente Lindelöf.

$(\mathbb{R}, T(\mathcal{B}))$, $\mathcal{B} = \{[a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ Lindelöf.

y $(\mathbb{R}, T(\mathcal{B}))^2$ no lo es.



Prop: Todo e.t. Lindelöf y regular es normal.

Dem: (X,T) Lindelöf y regular.

$\forall C_1, C_2$ cerrados disjuntos de (X,T)

* Si $C_1 = \emptyset$ trivial.

* Si $C_1, C_2 \neq \emptyset \underset{(X,T) \text{ regular}}{\Rightarrow} \forall x \in C_1,\ \exists U^x \in T$ t.q. $\overline{U^x} \cap C_2 = \emptyset$

$\Rightarrow C_1 \subset \bigcup_{x \in C_1} U^x \Rightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_1$, $C_1 \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U^{x_n}$

$\forall y \in C_2,\ \exists V^y \in T$ t.q. $\overline{V^y} \cap C_1 = \emptyset \Rightarrow$

$C_2 \subset \bigcup_{y \in C_2} V^y \Rightarrow \exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_2 \Rightarrow C_2 \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V^{y_n}$

Sea $A_1 = U^{x_1}$ t.q. $B_1 = V^{y_1} \setminus \underbrace{\overline{A_1}}$
abierto

$A_2 = U^{x_2} \setminus \overline{B_1}$ y $B_2 = V^{y_2} \setminus \overline{A_1 \cup A_2}$

$A_3 = U^{x_3} \setminus \overline{B_1 \cup B_2}$ y $B_3 = V^{y_3} \setminus \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$

$\vdots$

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = G_1 \in T$ y $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = G_2 \in T$

∘ Si $\exists z \in G_1 \cap G_2 \Rightarrow \begin{cases} z \in A_{n_0} & \text{para algún } n_0 \in \mathbb{N} \\ z \in B_{m_0} & \text{" } m_0 \in \mathbb{N} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} z \notin \overline{B_n} & \forall n < n_0 \\ z \notin \overline{A_m} & \forall m \leq m_0 \end{cases} \Rightarrow n_0 > m_0$ y $m_0 \geq n_0$ ↯

$\forall n \in \mathbb{N}$

Prop: Todo e.t. II A.N. es Lindelöf.

Dem: (X,T) e.t. cumple II A.N. $\Rightarrow \exists \mathcal{B}$ base numerable de T t.q. $\forall \mathcal{U}$ recubrimiento abierto de (X,T) $\Rightarrow \forall U \in \mathcal{U}$

$\forall x \in U$, $\exists B_U^x \in \mathcal{B}$ t.q. $x \in B_U^x \subset U$

$\{B_U^x \mid x \in U, U \in \mathcal{U}\} \subset \mathcal{B}$.

Lo subfamilia numerable de $\mathcal{B}$.

$\forall B \in \mathcal{J}$, $\exists U_B \in \mathcal{U}$ t.q. $B \subset U_B$

$\mathcal{V} := \{U_B \mid B \in \mathcal{J}\} \subset \mathcal{U}$ numerable recubri. de (X,T)

porque $B \in \mathcal{J}$ y X II A.N.

$\Rightarrow \mathcal{V}$ recubrimiento numerable de $\mathcal{U}$.

Obs: Lindelöf $\not\Rightarrow$ II A.N.

Prop: Sean (X,T) e (Y,S) e.t. t.q. (X,T) es Lindelöf.

$f:(X,T) \longrightarrow (Y,S)$ ap. suprayectiva continua. Entonces (Y,S) es Lindelöf.

Dem: $\forall \mathcal{U} = \{U_j \mid j \in J\}$ recub. abierto de (Y,S) $\underset{f \text{ continua}}{\Rightarrow}$

$\mathcal{U}^* = \{f^{-1}(U_j) \mid j \in J\}$ recub. abierto de (X,T) $\underset{\text{Lip.}}{\Rightarrow}$

$\exists \mathcal{V}^* = \{f(U_{j_n}) : n \in \mathbb{N}\}$ subrecub. numerable de $\mathcal{U}^*$

$\mathcal{V} = \{U_{j_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ subrecub. numerable de $\mathcal{U}$.

Prop: Sea (X,T) metrizable. Son equivalentes:

a) (X,T) cumple II A.N.

b) (X,T) es Lindelöf.

c) (X,T) es separable.

Dem: b) $\Rightarrow$ a) | $\exists d$ métrica t.q. $T = T_d$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n = \{B_{\frac{1}{n}}(x) \mid x \in X\}$ recub. abierto de (X,T) $\underset{b)}{\Rightarrow}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \mathcal{U}_n^*$ subrecub. numerable de $\mathcal{U}_n$ $\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n^* := \mathcal{B} \subset T$

$\forall W \in T$, $\forall x \in W$, $\exists m \in \mathbb{N}$ t.q.

$B_{\frac{1}{m}}(x) \subset W$

$\Rightarrow \exists B_{\frac{1}{2m}}(y_n) \subset \mathcal{U}'_{2m}$, $x \in B_{\frac{1}{2m}}(y) \in \mathcal{B}$

$\uparrow$
$\mathcal{U}'_{2m}$ recubrimiento de X

Veamos que $B_{\frac{1}{2m}}(y) \subset B_{\frac{1}{m}}$ (*)

$\forall z \in B_{\frac{1}{2m}}(y)$, $d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x)$

$< \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m} \Rightarrow z \in B_{\frac{1}{m}}(x)$

Por tanto $\mathcal{B}$ base de T (y numerable).

c) $\Rightarrow$ a) | $\exists d$ métrica t.q. $T = T_d$

$\exists D = \{d_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ denso y numerable en (X,T)

$\forall W \in T$, $\forall x \in W$, $\exists m \in \mathbb{N}$ t.q. $B_{\frac{1}{m}}(x) \subset W$

$\forall z \in B_{\frac{1}{2m}}(d_n)$, $d(z,x) \leq d(z,d_n) +$

$d(d_n,x) < \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m} \Rightarrow z \in B_{\frac{1}{m}}$

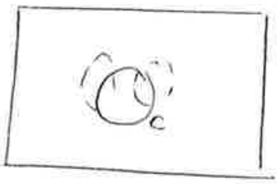
Def: Sea (X,T) e.t. Se dice que (X,T) es compacto si $\forall\, \mathcal{U}$ recub. abierto de (X,T), $\exists$ subrecub. finito de $\mathcal{U}$.

Obs: Compacto $\Rightarrow$ Lindelöf

Lindelöf $\not\Rightarrow$ Compacto. $(\mathbb{R}, T_u)$

Prop Todo cerrado de un e.t. compacto es compacto.

Dem:



$\forall\, \mathcal{U} = \{U_j \mid j \in J\}$ recub. abierto de $(C, T|_C)$

$\forall j \in J$, $\exists V_j \in T$ t.q. $U_j = V_j \cap C$ $\Rightarrow$

$\{V_j \mid j \in J\} \cup \{X \setminus C\} := \mathcal{U}'$ subrecub. abierto de (X,T)

$\Rightarrow \exists\, \mathcal{V}^* = \{V_{j_1}, \dots, V_{j_n}\} \cup \{X \setminus C\}$ t.q. es subrecub. finito de $\mathcal{U}$.

$\Rightarrow \mathcal{V} = \{U_{j_1}, \dots, U_{j_n}\}$ subrecub. finito de $\mathcal{U}$.

Prop Sea (X,T) T_2 y $C \subset X$, $C \neq \emptyset$ con $(C, T|_C)$ compacto, entonces C cerrado en (X,T)

Dem: $\forall x \in X \setminus C$ y $\forall y \in C$ por ser (X,T) Hausdorff, $\exists U^x_y, U^y \in T$ disjuntos t.q. $C \subset \bigcup_{y \in C} U^y$

$\underset{\uparrow}{\Rightarrow}$ $\exists y_1, \dots, y_n \in C$ t.q. $C \subset \bigcup_{i=1,n} U^{y_i}$

C compacto

$x \in U^x_{y_1} \cap \dots \cap U^x_{y_n} = V^x \in T \Rightarrow V^x \cap C = \emptyset \Rightarrow V^x \subset X \setminus C$

$[0,1]$ compacto y $(0,1)$ no.

Prop: Sea (X,T), (Y,S) e.t. $f:(X,T) \longrightarrow (Y,S)$ ap. suprayectiva y continua. Si (X,T) compacto, (Y,S) también lo es.

Dem: $\forall\, \mathcal{U} = \{U_j \mid j \in J\}$ recubr. abierto de (Y,S) $\underset{f \text{ cont.}}{\Rightarrow}$

$\mathcal{U}^* = \{f^{-1}(U_j) \mid j \in J\}$ recub. abierto de (X,T)

$\underset{\text{hip}}{\Rightarrow} \exists\, \mathcal{V}^* = \{f^{-1}(U_{j_1}), \dots, f^{-1}(U_{j_n})\}$ subrecub. finito

de $\mathcal{U}^*$ $\underset{f \text{ sup.}}{\Rightarrow}$ $\mathcal{V} = \{U_{j_1}, \dots, U_{j_n}\}$ subrecub. finito de $\mathcal{U}$.

Corolario: La compacidad es invariante topológica.

Prop: Sea (X,T) e.t. (X,T) compacto sii $\forall\, \mathcal{C} = \{C_j \mid j \in J\}$ familia de cerrados de (X,T) que cumple la prop. de la intersección finita (todas las intersecciones de subfamilias finitas de $\mathcal{C}$ son $\neq \emptyset$) entonces $\bigcap_{j \in J} C_j \neq \emptyset$

No estudiar, sólo aplicación

Dem: $\Rightarrow)$ $\{X \setminus C_j \mid j \in J\}$ recub. abierto de (X,T) $\underset{\text{hip}}{\Rightarrow}$

$\exists \{X \setminus C_{j_1}, \dots, X \setminus C_{j_n}\}$ subrecub. finito de él $\Rightarrow$

$\bigcup_{k=1}^{n} (X - C_{j_k}) = X \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{n} C_{j_k} = \emptyset$ ↯

$\Leftarrow)$ Si (X,T) no es compacto, $\exists\, \mathcal{U} = \{U_j \mid j \in J\}$ recub. abierto sin subrecub. finito.

$\Rightarrow \mathcal{C} = \{X - U_j \mid j \in J\}$ familia de cerrados con

f cont.

$(\dots f(F))$ ... compacto y $\subset (Y,S)$ $\Rightarrow$ $f(F)$ cerrado.

muy importante

Teorema de Tychonoff: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ familia de e.t. Entonces $(\prod X_j, \prod T_j)$ es compacto sii $\forall j \in J$, (X_j, T_j) es compacto.

Prop: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ familia de e.t. Entonces $(\sum X_j, \sum T_j)$ es compacto sii $\forall j \in J$, (X_j, T_j) es compacto y J finito.

Dem: $\Rightarrow$ | $\forall j \in J$, $(X_j, T_j) \cong X_j \times \{j\}$ cerrado en $(\sum X_j, \sum T_j)$

$\Rightarrow \{X_j \times \{j\} \mid j \in J\}$ subrecubrimiento abierto de $(\sum X_j, \sum)$

$\underset{\text{hip}}{\Rightarrow}$ J finito.

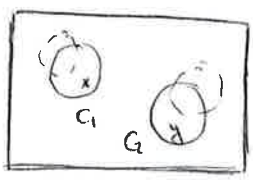
$\Leftarrow$ | $\forall \mathcal{U}$ recub. abierto de $(\sum X_j, \sum T_j)$, $\forall j \in J$:

$\mathcal{U}_j = \{U \cap (X_j \times \{j\}) \mid U \in \mathcal{U}\} \Rightarrow \forall j \in J$, $\exists \mathcal{V}_j$ subrecub. finito de $\mathcal{U}_j$.

Sea $\mathcal{V} = \bigcup_{j\in J} \{U \in \mathcal{U} \mid U \cap (X_j \times \{j\}) \in \mathcal{V}_j\}$ subre. finito de $\mathcal{U}$.

Prop: Sea (X, T) e.t. T_2 y C_1, C_2 subespacios compactos de (X, T) disjuntos. Entonces $\exists G_i \in T$ $i = 1, 2$. disjuntos t.q. $C_i \subset G_i$ $\forall i$.

Dem:



$\forall x \in C_1$, $\forall y \in C_2$, $\exists U_y^x, U_x^y \in T$ disjuntos.

$C_1 \subset \bigcup_{x\in C_1} U_y^x \Rightarrow \exists x_1, \dots, x_n \in C_1$ t.q.

$C_1 \subset \bigcup^n U_y^{x_i} := G_y \in T$.

y_m

$G_1 \cap G_2 = \emptyset$

Corolario: Todo e.t. compacto y T_2 es T_4.

Prop: Sea (X,T) e.t. regular, C_1 cerrado de (X,T) y C_2 subespacio compacto de (X,T) disjuntos. Entonces $\exists G_i$ $i=1,2$ $G_i \in T$ disjuntos t.q. $C_i \subset G_i$.

Dem: $\forall x \in C_2$, $\exists U^x$ y $U_x \in T$ disjuntos t.q. $x \in U^x$ y $C_1 \subset U_x$

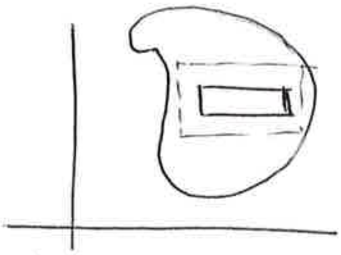
$C_2 \subset \bigcup_{x \in C_2} U^x \underset{C_2 \text{ comp.}}{\Rightarrow} \exists x_1, \dots, x_n \in C_2$ t.q. $C_2 \subset \bigcup_{i=1}^{n} U^{x_i} := G_2 \in T$

$C_1 \subset G_1 := U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_n} \in T$.

$\Rightarrow G_1 \cap G_2 = \emptyset$

Prop: Sea (X,T) e (Y,S) e.t., $A \subset X$, A subespacio compacto y $B \subset Y$, B subespacio compacto t.q. $A \times B \subset W$. Entonces $\exists U \in T$ t.q. $A \subset U$ y $\exists V \in S$ t.q. $B \subset V$ y $U \times V \subset W$.

Dem:



$\forall (x,y) \in A \times B$, $\exists U_y^x \in T$ y $\exists V_x^y \in T$

$U_y^x \times V_x^y \subset W$

$\Rightarrow A \subset \bigcup_{x \in A} U_y^x \Rightarrow \exists x_1, \dots, x_n \in A$ t.q.

$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_y^{x_i} := U_y \in T$

j''

$\Rightarrow U \times V \subset W$

Lema del nº ρ de Lebesgue: Sea (X,T) e.t. compacto y metrizable. $\forall \mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ cubrim. abierto de (X,T), $\exists \rho > 0$ t.q. $\forall x \in X$, $B_\rho(x) \subset U_i$ para algún i.

Dem: $\forall i = 1, \dots, n$ sea $f_i : (X,T) \longrightarrow \mathbb{R}$ t.q.

$f_i(x) = d(x, X \setminus U_i) \Rightarrow f_i$ continua $\forall i \in \mathbb{N}$

Sea $f : (X,T) \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \max\{f_i(x) \mid i = 1, \dots, n\}$ $\Rightarrow$

f ap. continua $\Rightarrow f(X) \subset \mathbb{R}$ compacto $\Rightarrow f(X)$ acotada en $\mathbb{R}$, $f(X) \subset (0, \rightarrow) \Rightarrow \exists \rho > 0$ t.q. $f(x) > \rho$

$\uparrow$

$\forall x \in X$, $\exists i_0 \in \{1, \dots, n\}$ t.q.

$x \in U_{i_0} \Rightarrow x \notin X \setminus U_{i_0} \Rightarrow$

$f(x) \geq f_{i_0}(x) > 0$

$\forall x \in X$, $\rho \in f(x) = f_{i_x}(x) = d(x, X \setminus U_{i_x})$ para algún $i = \{1, \dots, n\}$

¿$B_\rho(x) \subset U_{i_x}$? $\forall y \in B_\rho(x) \Rightarrow d(x,y) < \rho$

$\Rightarrow \rho < d(x, X \setminus U_{i_x}) \leq d(x,y) + d(y, X \setminus U_{i_x})$

$< \rho + d(y, X \setminus U_{i_x}) \Rightarrow d(y, X \setminus U_{i_x}) > 0 \Rightarrow$

$y \in U_{i_x}$.

Def: Sea (X,T) e.t. Diremos que es localmente compacto si [illegible]

(X,T) $\begin{cases} X = \emptyset \cup \{q\}, \ q \notin \emptyset \\ T = [illegible] \end{cases}$ $\Rightarrow (X,T)$ compacto y no loc. comp.

Prop: Sea (X,T) e.t. T_2. Entonces (X,T) es loc. compacto sii $\forall x \in X$, x tiene algún entorno compacto.

Dem: $\Rightarrow$) Por def.

$\Leftarrow$) $\forall x \in X$, $\forall U$ entorno de x en (X,T), $\exists C$ entorno compacto de x en (X,T) t.q.

$U \cap C$ entorno de x : $(U \cap C)^\circ := V \in T$ y

$\bar{V} \subset \bar{C} = C$.
$\uparrow$
C comp.

$\Rightarrow \bar{V}$ compacto y $T_2 \Rightarrow \bar{V}$ regular $\Rightarrow \exists W \in T$ t.q. $x \in W$ y $W \cap V \subset \bar{W} \cap \bar{V} \subset V$ con $x \in W \cap V$

$\bar{W} \cap \bar{V} \subset \bar{V}$ compacto. $\Rightarrow \bar{W} \cap \bar{V}$ compacto y ent. de x en (X,T).

Obs: compacto y $T_2 \Rightarrow$ loc. compacto.

Obs: loc. compacto y $T_2 \Rightarrow$ regular.

Obs: La compacidad local no es hereditaria.

$(\mathbb{R}, T_u)$ y $(\mathbb{Q}, T_u|_{\mathbb{Q}})$

Prop: Sea (X,T) e.t. loc. compacto:

1) Si $A \in T \setminus \{\emptyset\}$, entonces $(A, T|_A)$ loc. compacto.

2) $\forall F$ cerrado de (X,T), $\forall x \in F$, $\exists C^x$ ent. compacto de x en (X,T) t.q. $C^x \cap F$ cerrado y compacto.

Prop: Sea (X,T) e (Y,S) e.t. y $f:(X,T)\longrightarrow(Y,S)$ suprayect. continua y abierta. Si (X,T) es loc. compacto, (Y,S) también lo es.

<u>Dem</u>: $\forall y\in Y$, $\forall V^y$ entorno de y en (Y,S) $\underset{f\ \text{sup.}}{\Rightarrow}$ $\exists x\in f^{-1}(y)$ t.q. $f^{-1}(V^y)$ entorno de x en (X,T) $\underset{\text{hip.}}{\Rightarrow}$ $\exists C^x$ entorno compacto de x t.q. $C^x\subset f^{-1}(V^y)$ $\underset{\substack{f\ \text{cont.}\\ f\ \text{ab.}}}{\Rightarrow}$ $f(C^x)\subset V^y$ t.q. es loc. compacto.

<u>Corolario</u>: La compacidad local es invariante topológico.

Prop: Sea $\{(X_j,T_j)\}_{j\in J}$ familia $\neq\emptyset$ de e.t. Entonces $(\prod X_j,\prod T_j)$ es compacto sii $\forall j\in J$, (X_j,T_j) es loc. compacto y (X_j,T_j) compacto $\forall j\in J\setminus F$, F finito.

<u>Dem</u>: <u>$\Rightarrow$)</u> $\forall j\in J$, $p_j:(\prod X_j,\prod T_j)\longrightarrow(X_j,T_j)$ suprayectiva continua y abierta $\Rightarrow$ (X_j,T_j) loc. compacto.

$\forall x\in\prod X_j$, $\exists C^x$ ent. compacto de x

$\Rightarrow \exists B\in\mathcal{B}$ base de $\prod T_j$ t.q. $x\in B\subset C^x$ y

$$B=\bigcap_{k=1}^{n}p_{j_k}^{-1}(U_{j_k})\approx\prod_{k=1}^{n}U_{j_k}\times\prod_{j\in J}X_j\Rightarrow$$

$\Rightarrow \forall j\in J$, $p_j^{-1}(B)\subset p_j(C^x)$ compacto en (X_j,T_j)

$\Rightarrow \forall j\in J\setminus\{j_1,\dots,j_n\}$, $X_j=p_j(C^x)$ compacto.

$\forall j\in J\setminus H=(J\setminus F_0)\cap(J\setminus F)\subset J\setminus F$

$$\forall j \in H \begin{cases} \text{si } j \in F_0 \Rightarrow j = j_k \text{ para algún } k \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow \exists V^{x_{j_k}} \text{ ent. comp. de } x_{j_k} \text{ t.q. } \subset U_{j_k} \\ \text{si } j \in F \Rightarrow \exists V^{x_j} \text{ ent. comp. de } x_j \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bigcap_{j \in H} p_j^{-1}(V^{x_j}) \subset B \subset U^x \text{ es ent. de } x$$

$\Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}$ base de $\prod T_j$ t.q. $x \in B \subset U^x$

y $B = \bigcap_{k=1}^{n} p_{j_k}^{-1}(U_{j_k})$

Prop: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j \in J}$ familia $\neq \emptyset$ de e.t. Entonces $(\Sigma X_j, \Sigma T_j)$ loc. compacto sii $\forall j \in J$, (X_j, T_j) es loc. compacto.

Dem: $\Rightarrow$ | $\forall j \in J$, $(X_j, T_j) \approx X_j \times \{j\}$ abierto en $(\Sigma X_j, \Sigma T_j)$

$\Leftarrow$ | $\forall x \in \sum_{j \in J} X_j \Rightarrow \exists! j_0 \in J$ t.q. $x \in X_{j_0} \times \{j_0\}$ loc. comp

Teorema de Baire: Sea (X, T) loc. compacto y T_2. Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es familia numerable de abiertos y densos en (X, T), entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es denso en (X, T).

Dem: $\forall U \in T \setminus \{\emptyset\} \underset{A_n \text{ denso}}{\Rightarrow} U \cap A_1 \neq \emptyset \underset{\substack{U \cap A_1 \in T \\ (X,T) \text{ loc. comp. } T_2}}{\Rightarrow} \exists B_1 \in T$ t.q.

$\overline{B_1}$ compacto y $\overline{B_1} \subset U \cap A$. $\underset{\substack{B_1 \in T \setminus \{\emptyset\} \\ A_2 \text{ denso}}}{\Rightarrow} B_1 \cap A_2 \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists B_2 \in T$ t.q. $\overline{B_2}$ compacto y $\overline{B_2} \subset \overline{B_1} \cap A \underset{\text{por induc.}}{\Rightarrow}$

$\exists \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ t.q. $B_n \in T$ $\forall n \in \mathbb{N}$ con $\overline{B_n}$ compacto

Obs: Si $A_n \notin T$ no se cumple.

$(\mathbb{R}, T_u)$, $A_1 = \mathbb{Q}$, $A_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Obs: Si la familia no es numerable no se cumple.

$(\mathbb{R}, T_u)$ $A_x = \mathbb{R} \setminus \{x\} \in T_u$ $\forall x \in \mathbb{R}$ denso

$$\bigcap_{x \in \mathbb{R}} A_x = \bigcap_{x \in \mathbb{R}} (\mathbb{R} \setminus \{x\} = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\} = \emptyset)$$

Def: Sea (X, T) e.t. Se llama compactación (o compactificación) de (X, T) a un par (K, f) donde K es e.t. compacto y $f: X \longrightarrow K$ es una inmersión top. t.q. $f(X)$ es denso en K.

Se dice que una compactación es T_2 si K es T_2.

Se dice que una compactación es "para un solo punto" si $K \setminus f(X)$ es un punto.

Ejemplo: $([0,1], f)$ es compactación de $(0,1)$

Ejemplo: El espacio proyectivo de dim. n es una compactación del espacio afín de dim. n.

Def: Sea (X, T) e.t. y (X_1', f_1), (X_2', f_2) dos compactaciones de X. Se dice que son topológicamente equivalentes si $\exists h: X_1' \longrightarrow X_2'$ homeomorfismo t.q. $h \circ f_1 = f_2$.

$$X_1' \xrightarrow{h} X_2'$$

Obs: La relación $\geq$ es reflexiva y transitiva

Prop: Sea X e.t. y (X', f), (X_1', f_1) dos compactaciones T_2 de X t.q. $(X', f) \geq (X_1', f_1)$ y $(X_1', f_1) \geq (X', f)$. Entonces son top. equivalentes.

Dem: $\exists\, g: X' \longrightarrow X_1'$ continua y supreyectiva t.q. $g \circ f = f_1$

$\exists\, g_1: X_1' \longrightarrow X'$ " " $g_1 \circ f_1 = f$

$\Rightarrow g_1 \circ g: X' \longrightarrow X'$ continua con X' T_2.

$g_1 \circ g \big|_{f(X)} = 1_{f(X)}$

$\forall x \in X$, $(g_1 \circ g)(f(\ )) = g_1(g(f(\ ))) = g_1 f_1(x) = f(x)$

$\overline{f(X)} = X'$ ($f(X)$ denso en X') $\Rightarrow g_1 \circ g = 1_{X'}$

Análogamente: $g \circ g_1 = 1_{X_1'}$ $\Rightarrow g \approx g^{-1} = g_1$

Teorema de Alexandroff: Sea X un e.t. no compacto, ω un punto t.q. $\omega \notin X$. Sobre $X^* = X \cup \{\omega\}$, la familia $T^* = T \cup \{U \subset X^* \mid \omega \in U$ y $X \setminus U$ compacto y cerrado en $(X, T)\}$ es topología. El espacio (X^*, T^*) es compacto y X es denso en él.

Dem: 1) $\emptyset$, $X^* \in T^*$

cerrado y compacto en (X, T) $\Rightarrow W_1 \cap W_2 \in T^*$

II) Si $x_1 \in G \Rightarrow x_1 \notin \underbrace{X_1 \setminus G}_{\text{compacto}} \Rightarrow h(X_1 \setminus G) =$

$= (f_1' \circ f_1^{-1})(X_1 \setminus G)$ compacto en $X_1' \Rightarrow$ (X_1' T_2)

$h(X_1 \setminus G)$ cerrado en X_1'

$h(G) = X_1' \setminus h(X_1 \setminus G)$ abierto en X_1'

$\Rightarrow$ h es ap. abierta.

Análogamente h^{-1} es ap. abierta

$\Rightarrow$ las dos compact. son equivalentes top.

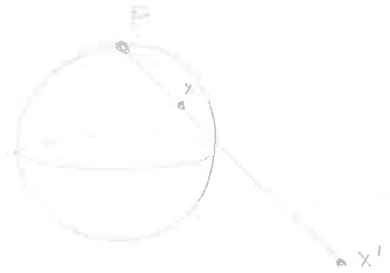
$\boxed{\text{Ejemplo:}}$ S^n es la compactación de Alexandroff de $\mathbb{R}^n$

$\|$

$\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$

$h : S^n \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$x \longrightarrow L(\{p, x\}) \cap \mathbb{R}^n = \{x'\}$ homeomorf.



$S^n \setminus \{p\}$ denso en S^n

$\boxed{\text{Prop:}}$ Si (X, T) e.t. compacto y (k, f) compact. T_2 de X, entonces $f(X) = k$

Dem. $\overline{f(X)}$ ...

$\neq \emptyset$ de (X, T) t.q. $X = C_1 \cup C_2$

Prop: Si (X,T) e.t. compacto y (k,f) compactación T_2 de X, entonces $f(X)=k$

Dem: $\overline{f(X)}=k$

$f(X)$ compacto en $k \underset{k\ T_2}{\Rightarrow} f(X)$ cerrado en $k \Rightarrow f(X)=k$

Def: Sea (X,T) e.t. Se dice que es conexo si $\nexists\, C_i$ $i=1,2$ cerrados disjuntos $\neq \emptyset$ de (X,T) t.q. $X = C_1 \cup C_2$

Obs: (X,T) conexo sii $\nexists\, A_i \in T \setminus \{\emptyset\}$ disjuntos t.q. $X = A_1 \cup A_2$

sii los únicos subconjuntos de (X,T) simultáneamente abiertos y cerrados son $\emptyset$ y X

Prop: Sean (X,T) e (Y,S) e.t. $f:(X,T)\longrightarrow(Y,S)$ continua y suprayectiva. Si (X,T) conexo, también lo es (Y,S).

Dem: Si (Y,S) no conexo: $\exists A_i \in S\setminus\{\emptyset\}$ disjuntos $i=1,2$ t.q.

$Y = A_1 \cup A_2 \underset{f \text{ cont.}}{\Rightarrow} f^{-1}(A_i) \in T \setminus \{\emptyset\}$ disjuntos t.q.

$X = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2)$.

Obs: La conexión es invariante topológico.

Obs: La conexión no es hereditaria.

$(\mathbb{R}, T_u)$ y $[0,1] \cup (2,3)$.

Prop: Sea (X,T) e.t., $\{X_j\}_{j\in J}$ familia de subespacios conexos de (X,T) t.q.

Útil

$x \in C_1 \cap \left(\bigcap_{j \in J} X_j \right) \subset \underbrace{C_1 \cap X_{j_0}}_{F_1 \neq \emptyset}$.

F_1, F_2 cerrados disjuntos de $(X_{j_0}, T|_{X_{j_0}})$

$X_{j_0} = (C_1 \cap X_{j_0}) \cup (C_2 \cap X_{j_0}) = F_1 \cup F_2$ ↯

Ejemplo: $(\mathbb{R}^n, T_u)$ conexo

$\mathbb{R}^n = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} [x]$ (todas las rectas generadas por el vector x)

$[x] \approx \mathbb{R}$. y $\bigcap_{x \in \mathbb{R}^n} [x] \neq \emptyset \Rightarrow \mathbb{R}^n$ conexo.

Prop: Sea (X, T) e.t. y $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de subespacios conexos de (X, T) t.q. $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Si $X_n \cap X_{n+1} \neq \emptyset$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces (X, T) conexo.

Dem: Veamos que $C_m = \bigcup_{n=1}^{m} X_n$ conexo $\forall m \in \mathbb{N}$

Por inducción sobre m:

$m = 1$: X_1 conexo.

⋮

$m = m$: $C_m = \underbrace{\left(\bigcup_{n=1}^{m-1} X_n \right)}_{\text{conexo } C_{m-1}} \cup \underbrace{X_m}_{\text{Conexo}} \Rightarrow C_m$ conexo.

$\underbrace{X_{m-1} \cap X_m \neq \emptyset}_{\cap \; C_{m-1} \cap X_m}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow (X, T)$ conexo.

$\forall x \in G,\ \exists U \in T,\ x \in F_1 = U \cap C \xRightarrow[E \subset C]{} \underbrace{(U \cap C) \cap E}_{F_1 \cap E = H_1} = U \cap E \neq \emptyset$

$\left.\begin{array}{l} x \in F_1 \subset C \subset \bar{E} \Rightarrow x \in \bar{E} \Rightarrow x \cap U \neq \emptyset \\ \text{Análogamente } F_2 \cap E \neq \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow E = H_1 \cup H_2 \Rightarrow \lightning$

H_i disjunt.

Prop: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j \in J}$ familia $\neq \emptyset$ de e.t. Entonces $(\Pi X_j, \Pi T_j)$ conexo sii $\forall j \in J$, (X_j, T_j) conexo.

Dem: $\Rightarrow|$ –

$\Leftarrow|$ $\exists x \in \prod_{j \in J} X_j$. Sea E la unión de todos los subespacios conexos de $(\Pi X_j, \Pi T_j)$ que contienen a x.

$\Rightarrow E$ conexo.

¿E denso? $\forall U \in \prod_{j \in J} T_j \neq \emptyset$, $\exists B \in \mathcal{B}$ t.q. $B \subset U$

y $B = \bigcap_{k=1}^{n} p_{j_k}^{-1}(U_{j_k})$ con $U_{j_k} \in T_{j_k} \setminus \{\emptyset\}$ $\forall k = 1, \dots, n$

$\Rightarrow \forall k,\ \exists b_{j_k} \in U_{j_k}$.

Sea $E_1 = \{(z_j)_{j \in J} \in \Pi X_j \mid z_j = x_j \ \forall j \in J \setminus \{j_1\}\}$

$\approx X_{j_1} \times \{(x_j)_{j \in J \setminus \{j_1\}}\} \approx X_{j_1}$ que es conexo.

$\vdots$

$E_n = \{(z_j)_{j \in J} \in \Pi X_j \mid z_j = x_j \ \forall j \in J \setminus \{j_1, \dots, j_n\},$

Sea $y \in \prod_{j\in J} X_j$ $\begin{cases} y_{j_k} = b_{j_k} & k = 1, \dots, n \\ y_j = x_j & \forall j \in J \setminus \{j_1, \dots, j_n\} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow y \in E \cap F$, $y \in B \subset U \Rightarrow U \cap F \neq \emptyset \Rightarrow U \cap E \neq \emptyset \Rightarrow E$ densa

$\Rightarrow \underset{E \text{ conexo}}{E} = \prod X_j$

Obs: La conexión no es propiedad aditiva.

Def: Sea (X, T) e.t. Se llama componente de x en (X, T) a C_x unión de todos los subespacios conexos de (X, T) que contienen a x.

Obs: C_x es conexo y es el mayor subespacio conexo de (X, T) que contiene a x.

Obs: Las componentes de cualquier e.t. son cerrados suyos.

C_x componente de $x \Rightarrow x \in \overline{C_x}$ conexo $\Rightarrow \overline{C_x} \subset C_x \Rightarrow \overline{C_x} = C_x$

Obs: Si (X, T) es e.t. sus componentes no son necesariamente abiertos.

$(\mathbb{Q}, T_u|_{\mathbb{Q}})$, $\forall q \in \mathbb{Q}$, $\{q\}$ es su componente y $\notin T_u|_{\mathbb{Q}}$

Prop: Si (X, T) e.t., $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, C_x y C_y sus componentes en (X, T), entonces $C_x = C_y$ ó $C_x \cap C_y = \emptyset$

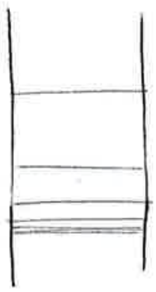
Dem: $C_x \cap C_y \neq \emptyset \Rightarrow C_x \cup C_y$ conexo $\Rightarrow C_x \cup C_y \begin{cases} \subset C_x \\ \subset C_y \end{cases} \Rightarrow$

$C_x = C_y = C_x \cup C_y$

Def: Sea (X, T) e.t. Se dice que es localmente conexo si $\forall x \in X$, $\exists$

Obs: conexo $\not\Rightarrow$ loc. conexo.

$X = [0,1] \times (\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}) \cup \{0,1\} \times \mathbb{R}$ con $T|_X$



$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} X_n$ conexo ya que X_n conexo por la propiedad de unión de familia num.

$\bigcap_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} X_n \neq \emptyset$, $\forall (x,0) \in [0,1] \times \{0\}$, $\nexists$ base de ent. conexo.

Obs: La conexión local no es hereditaria.

Prop: Sea (X,T) e.t. (X,T) es loc. conexo sii cada abierto de (X,T) verifica que sus componentes son abiertos.

importante

Dem: $\Rightarrow]$ (X,T) loc. conexo, $U \in T \setminus \{\emptyset\}$ componente de $(U, T|_U)$ $\Rightarrow$ $\forall x \in C \subset U$ abierto $\underset{hip}{\Rightarrow}$ $\exists V$ entorno conexo de x en (X,T) t.q. $x \in V \subset U$ $\Rightarrow$ $V \subset C$ $\Rightarrow$ C abierto en (X,T)

$\Leftarrow]$ $\forall x \in X$, $\forall U^x$ entorno de x en (X,T) $\Rightarrow$ la componente C de x en $(U^x, T|_{U^x})$ es abierto en (X,T) $\Rightarrow$ C entorno conexo de x, t.q. $C \subset U^x$ $\Rightarrow$ loc. conexo.

Corolario: Sea (X,T) e.t. loc. conexo, entonces sus componentes son abiertos y cerrados simultáneamente.

Corolario: Si (X,T) e.t. loc. conexo y compacto, tiene un número

x comp.

Prop: Sean (X,T) e (Y,S) e.t. t.q. (X,T) loc. conexo, $f:(X,T)\longrightarrow(Y,S)$ identificación, entonces (Y,S) es loc. conexo.

Dem: $\forall U\in S\setminus\{\emptyset\}$, C componente suya de $(U,T|_U)$

$\forall x\in f^{-1}(C)\subset f^{-1}(U)$

Sea C_x componente de x en $f^{-1}(U)\in T \underset{\text{hip.}}{\Rightarrow} C_x\in T$

conexo $\underset{f\text{ cont.}}{\Rightarrow} f(x)\in f(C_x)\subset U \Rightarrow f(C_x)\subset C \Rightarrow$

$C_x\subset f^{-1}(C) \Rightarrow f^{-1}(C)\in T \underset{f\text{ ident.}}{\Rightarrow} C\in S$

Prop: Sea $\{(X_j,T_j)\}_{j\in J}$ familia $\neq\emptyset$ de e.t. Entonces $(\Pi X_j,\Pi T_j)$ loc. conexo sii $\forall j\in J,(X_j,T_j)$ loc. conexo y (X_j,T_j) conexo $\forall j\in J\setminus F$, $F\subset J$ finito.

Dem: $\Rightarrow]$ $\forall j_0\in J$, $p_{j_0}:(\Pi X_j,\Pi T_j)\longrightarrow(X_{j_0},T_{j_0})$ suprayec. continua y abierta $\Rightarrow (X_{j_0},T_{j_0})$ loc. conexo.

$\forall x\in\Pi X_j$, U entorno conexo de x en $(\Pi X_j,\Pi T_j)$

$\Rightarrow \exists B\in\mathcal{B}$ t.q. $x\in B\subset U$ y $B=\bigcap_{k=1}^{n}p_{j_k}^{-1}(U_{j_k})$

$\Rightarrow X_j=p_j(B)\subset \underbrace{p_j(U)}_{\text{conexo}}$ $\forall j\in J\setminus\{j_1,\dots,j_n\}$

$\Rightarrow X_j$ conexo $\forall j\in J\setminus\{j_1,\dots,j_n\}$

$\Leftarrow]$ $\forall j_k\in\Pi X_j$, $\forall U^x$ entorno de x en $(\Pi X_j,\Pi T_j)$

$\Rightarrow \exists B\in\mathcal{B}$ t.q. $x\in B\subset U^x$ y $B=\bigcap_{k=1}^{n}p_{j_k}^{-1}(U_{j_k})$

$\Rightarrow \forall k=1,\dots,n$, $x_{j_k}\in U_{j_k}\in T_{j_k}$

ent. conexo

$$\Rightarrow \bigcap_{j\in J} p_j^{-1}(V^{x_j}) \subset B \subset U^x$$

$$\underbrace{\prod_{j\in} V^{x_j} \times \prod_{j\in J\setminus H} X_j}_{\text{conexos}} \quad \text{conexo}$$

$\boxed{\text{Prop}}$ Sea $\{(X_j,T_j)\}_{j\in J}$ familia $\neq\emptyset$ de e.t. Entonces $(\Sigma X_j, \Sigma T_j)$ es conexo sii $\forall j\in J$, (X_j,T_j) es loc. conexo.

Dem: $\underline{\Leftarrow}|$ $\forall x\in\Sigma X_j \Rightarrow \exists!\, j_0\in J$ t.q. $x\in X_{j_0}\times\{j_0\}$

$$\wr\wr \quad (X_{j_0},T_{j_0})$$

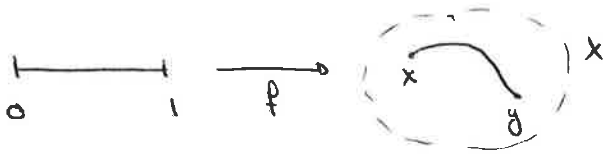
$\underline{\Rightarrow}|$ $\forall j_0\in J$, $(X_{j_0},T_{j_0}) \approx X_{j_0}\times\{j_0\}$

lo tiene una base de entornos conexos

$\boxed{\text{Def}}$ Sea (X,T) e.t. Diremos que es <u>conexo por caminos</u> si $\forall x,y\in X$ $\exists f: I \longrightarrow (X,T)$ continua t.q. $f(0)=x$ y $f(1)=y$.

Entonces se dice que f es un camino en X de origen x y extremo y.

$I=[0,1]$ con la top. usual relativa.



$\boxed{\text{Prop}}$ Todo e.t. conexo por caminos es conexo.

Dem: Si (X,T) conexo por caminos. Si $\exists A_1, A_2\in T\setminus\{\emptyset\}$ t.q.

... $A_1\cap A_2=\emptyset \Rightarrow \forall a_i\in A_i$ $\forall i=1,2$.

__Obs:__ Conexo $\not\Rightarrow$ Conexo por caminos.

$$X = \underbrace{\{(x, \operatorname{sen}\tfrac{1}{x}) \mid x > 0\}}_{:= X_0} \cup \underbrace{\{(x, 0) \mid x \leq 0\}}_{X_1}$$

$X_0 \approx (0, \longrightarrow)$ conexo $\quad X_1 \approx (\longleftarrow, 0]$ conexo.

$(0,0) \in \overline{X_0} \Rightarrow X_0 \cup \{(0,0)\}$ conexo

$X = ((0,0) \cup X_0) \cup X_1$ conexo.

X no es conexo por caminos: $(0,0)$ y $(x_0, \operatorname{sen}\frac{1}{x_0}) \in X_0$

$\nexists f : I \longrightarrow X$ continua t.q. $f(0) = (0,0)$ y $f(1) = (x, \operatorname{sen}\frac{1}{x})$

Si existiese $f : I \longrightarrow f(I) \Rightarrow f$ cerrado $\Rightarrow$

$\Rightarrow f : I \longrightarrow f(I)$ identificación $\Rightarrow f(I)$ loc. conexo

la conexión local se conserva por identificaciones

y $(0,0)$ no tiene una base de entornos conexos $\Rightarrow$

I no conexo por caminos $\lightning$

__Obs:__ Conexo por caminos $\not\Rightarrow$ loc. conexo.

En el ejemplo anterior, no es loc. conexo porque $(0,0)$ está en el espacio y no tiene una base de entornos formado por conexos.

__Obs:__ loc. conexo $\not\Rightarrow$ conexo por caminos.

$([0,1] \cup (2,3))$ no conexo, loc. conexo $\Rightarrow$ no conexo por caminos.

__Obs:__ La conexión por caminos no es hereditaria.

continua t.q. $h(0) = x_1$, $h(1) = x_2 \Rightarrow f \circ h : I \longrightarrow (4,5)$ cont.

$(f\circ h)(0) = y_1$, $(f \circ h)(1) = y_2$

Corolario: La conexión por caminos es invariante topológico.

Prop: Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j\in J}$ familia $\neq \emptyset$ de e.t. Entonces $(\Pi X_j, \Pi T_j)$ conexo por caminos sii $\forall j \in J$, (X_j, T_j) conexo por caminos.

Dem: $\Rightarrow$ | —

$\Leftarrow$ | $\forall (x_j)_{j\in J}, (y_j)_{j\in J} \in \Pi X_j \Rightarrow \forall j \in J$,

$\exists f_j : I \longrightarrow (X_j, T_j)$ continua t.q. $f_j(0) = x_j$ y

$f_j(1) = y_j \Rightarrow (f_j)_{j\in J} : I \longrightarrow (\Pi X_j, \Pi T_j)$ continua

t.q. $(f_j)_{j\in J}(0) = (x_j)_{j\in J}$ y $(f_j)_{j\in J}(1) = (y_j)_{j\in J}$

Obs: La conexión por caminos no es aditiva.

CAMBIO DE TERCIO.

Def: Sean (X, T) e (Y, S) e.t., $f, g : (X, T) \longrightarrow (Y, S)$ ap. continuas. Se dice que f es homótopa a g si $\exists H : X \times I \longrightarrow Y$ continua t.q. $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ $\forall x \in X$.

Se dice que H es una homotopía de f en g.

Se denota $f \simeq g$.

Ejemplo: Sea $C \subset \mathbb{R}^n$, C convexo $\forall X$ e.t., $\forall f : X \longrightarrow C$ continua

es $f \simeq g$ $(H : X \times I \longrightarrow C$ t.q. $H(x, t) = (1-t) f(x) + t g(x)$

$\Rightarrow H$ es homotopía de f a f : $f \simeq f$.

Simétrica: $f, g : (X,T) \longrightarrow (Y,S)$ continua. $f \simeq g \Rightarrow$

$\exists H : X \times I \longrightarrow Y$ continua t.q. $H(x,0) = f(x)$ y

$H(x,1) = g(x)$

Sea $H' : X \times I \longrightarrow Y$ continua.

$(x,t) \longrightarrow H(x, 1-t)$

$H'(x,1) = g(x)$ y $H'(x,1) = f(x) \Rightarrow g \simeq f$.

Transitiva: $f, g, h : (X,T) \longrightarrow (Y,S)$ continua. t.q.

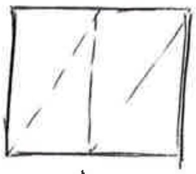
$f \simeq g$ y $g \simeq h \Rightarrow \begin{cases} \exists H_1 : X \times I \longrightarrow Y \text{ continua} \\ \exists H_2 : X \times I \longrightarrow Y \text{ continua.} \end{cases}$

y $\begin{cases} H_1(x,0) = f(x) \\ H_1(x,1) = g(x) \end{cases}$ $\begin{cases} H_2(x,0) = g(x) \\ H_2(x,1) = h(x) \end{cases}$

Sea $H : X \times I \longrightarrow Y$ continua.

$(x,t) \longrightarrow \begin{cases} H_1(x, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H_2(x, 2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$

Bien definida:



$1/2$

$X \times [0, \frac{1}{2}]$ y $X \times [\frac{1}{2}, 1]$ cerrado de X en I.

I tiene la top. usual : $I = ([0,1], T_u)$

$H|_{X \times [0, \frac{1}{2}]}$ y $H|_{X \times [\frac{1}{2}, 1]}$ continua $\Rightarrow H$ continua

y $\exists g : (Y,S) \longrightarrow (X,T)$ continua t.q. $g \circ f \simeq 1_X$ y $f \circ g \simeq 1_Y$

En ese caso se dice que f es una equivalencia homotópica y que g es una inversa homotópica suya.

Prop: La relación es de forma que el mismo tipo de homotopía es de equivalencia en cualquier conjunto de e.t.

Dem: Reflexiva: $1_X : X \longrightarrow X \Rightarrow 1_X$ es equivalencia homotópica.

Simétrica: X homotóp. equivalente a Y $\Rightarrow \exists f : X \longrightarrow Y$ continua y $g : Y \longrightarrow X$ continua t.q. $g \circ f \simeq 1_X$ y $f \circ g \simeq 1_Y \Rightarrow Y$ homotóp. equivalente a X.

Transitiva: X homotóp. equivalente a $Y \Rightarrow \exists f : X \to Y$ cont. $g : Y \longrightarrow X$ continua t.q. $g \circ f \simeq 1_X$, $f \circ g \simeq 1_Y$.

Y homotóp. equivalente a $Z \Rightarrow \exists f' : Y \longrightarrow Z$ conti. $g' : Z \longrightarrow Y$ continua t.q. $g' \circ f' \simeq 1_Y$, $f' \circ g' \simeq 1_Z$.

$$(f' \circ f) \circ (g \circ g') = f' \circ (f \circ g) \circ g' \simeq$$

$$\simeq f' \circ 1_Y \circ g' \simeq f' \circ g' \simeq 1_Z$$

$\Rightarrow X$ homotóp. equivalente a Z.

Obs: Dos e.t. homeomorfos son homotóp. equivalentes. (Homeom. es más fuerte que hom. equivalente).

Prop: Sea (X, T) e.t. Entonces (X, T) es contráctil si tienen el el mismo tipo de homotopía que un punto.

$| \; c_{x_0} \circ j = 1_{\{x_0\}}$ $\qquad c_{x_0}$ inversa homotóp. suya.

4) Con la top. trivial $\{\emptyset, \{y\}\}$ que coincide con la discreta y X del mismo tipo de homotopía.

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists f: X \longrightarrow \{y\} \text{ continua} \\ \exists g: \{y\} \longrightarrow X \text{ continua} \end{cases} \quad \text{t.q.} \quad \begin{matrix} g \circ f \simeq 1_X \\ f \circ g \simeq 1_{\{y\}} \end{matrix} \Rightarrow$$

X cte.

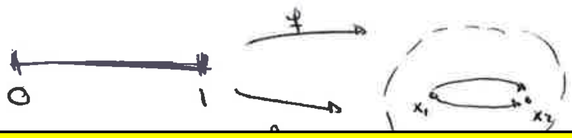
Def: Sea X e.t. y $A \subset X$. Se dice que A es un retracto de X si $\exists z: X \longrightarrow A$ continua t.q. $z|_A = 1_A$. En este caso se dice que z es una retracción de X en A.

Def: Sea (X, T) e.t. $A \subset X$. Se dice que A es un retracto por deformación de X si $\exists z: X \longrightarrow A$ retracción t.q. $j \circ z \simeq 1_X$ donde $j: A \hookrightarrow X$

Obs: Si X e.t. y A retracto por deformación de X, entonces X y A son homotópicamente equivalentes.

Def: Sean X e Y e.t. $f, g: X \longrightarrow Y$ continuas y $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Se dice que f es homótopa a g relativamente en A si $\exists H: X \times I \longrightarrow Y$ continua t.q. $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$ $\forall x \in X$ y $H(a,t) = f(a) = g(a)$ $\forall a \in A$, $\forall t \in I$

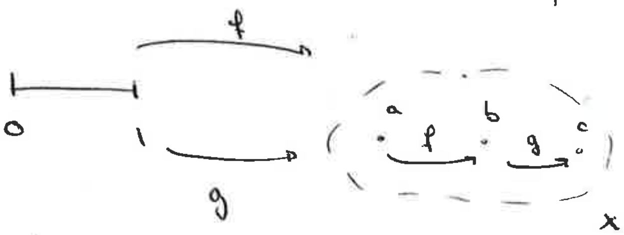
Obs: $f \simeq_A g \Rightarrow f|_A = g|_A$



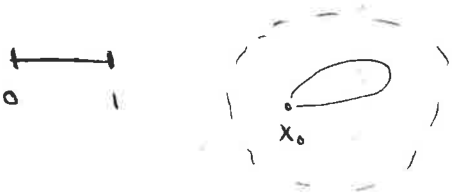
bien definida.

Continua por ser producto de continuas

Obs: Para que esté bien definido el producto de dos caminos es imprescindible que coincidan el extremo de f con el origen de g.



Def: Sea X e.t. Se llama lazo de X con base x_0 a cualquier camino f de origen y extremo x_0.

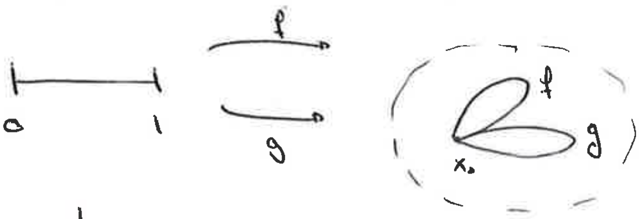


Def: Sea X e.t., $x_0 \in X$ y f, g lazos en X con base x_0. Se dice que f es lazo homótopo a g si $f \simeq_{\{0,1\}} g$ $\quad f|_{\{0,1\}} = g|_{\{0,1\}}$

Obs: La relación de homotopía de ap. continuas relativamente a un subespa. es relación de equivalencia en el conjunto de ap. continuas entre 2 e.t.

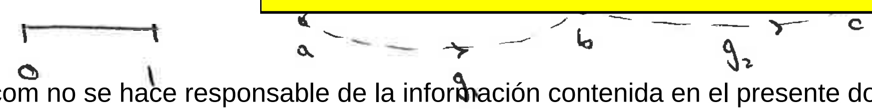
Obs: La relación de homotopía de lazos con base $x \in X$, es relación de equivalencia en el conjunto de lazos continuos.

Obs: Sea X e.t. y $x_0 \in X$. f y g lazos con base x_0, el producto de f y g está definido y es lazo con base x_0.



$(f*g)(t) : [0,1] \to X$
lazo con base x_0 t.q.
$0 \leq t \leq \frac{1}{2}$: $f(2t)$
$\frac{1}{2} \leq t \leq 1$: $g(2t-1)$

Def ...



<u>Dem</u>: $\exists H_1 : I \times I \longrightarrow X$ continua

$(x,0) \longrightarrow f_1(x)$

$(x,1) \longrightarrow g_1(x)$

$(0,t) \longrightarrow f_1(0) = g_1(0)$

$(1,t) \longrightarrow f_1(1) = g_1(1)$

$\exists H_2 : I \times I \longrightarrow X$ continua.

$(x,0) \longrightarrow f_2(x)$

$(x,1) \longrightarrow g_2(x)$

$(0,t) \longrightarrow f_2(0) = g_2(0)$

$(1,t) \longrightarrow f_2(1) = g_2(1)$

$$(f_1 * f_2)(s) = \begin{cases} f_1(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ f_2(2s-1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Sea $H : I \times I \longrightarrow X$

$$(s,t) \longrightarrow \begin{cases} H_1(2s,t) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ & t \in I \\ H_2(2s-1,t) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

H Continua ? : $s = \frac{1}{2}$

$[0,\frac{1}{2}] \times I$, $[\frac{1}{2},1] \times I$ cerrados y recubren.

H Bien definida ? : $H_1(1,t) = f_1(1)$

$H_2(0,t) = f_2(0)$ $\Rightarrow$ bien def.

$$H(s,0) = \begin{cases} H_1(2s,0) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ H_2(2s-1,0) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} = f_1 * f_2$$

$H(0,t) = H_1(0,t) = f_1(0) = (f_1 * f_2)(0) =$

$H(1,t) = (g_1 * g_2)(1) = (f_1 * f_2)(1)$

$\Rightarrow f_1 * f_2 \simeq_{\{0,1\}} g_1 * g_2$

<u>Corolario</u>: Sea X e.t. , $\forall x_0 \in X$, f_1, g_1 y f_2, g_2 lazos en X con base x_0. $f_1 \simeq_{\{0,1\}} g_1$, $f_2 \simeq_{\{0,1\}} g_2 \Rightarrow f_1 * f_2 \simeq_{\{0,1\}} g_1 * g_2$

<u>Notación</u>: $\pi_1(X, x_0)$ es el conjunto cociente de los lazos en X con base x_0 respecto a la relación de equivalencia de lazos.

$\forall f$ lazo en X con base x_0, $[f]$ es la clase.

Def: Sea $\pi_1(X, x_0)$, $\forall [f], [g] \in \pi(X, x_0)$. Se define $[f] * [g] := [f * g]$

Teorema Sea X e.t. y $x_0 \in X$. Entonces $\pi_1(X, x_0)$ con la operación $*$, es un grupo.

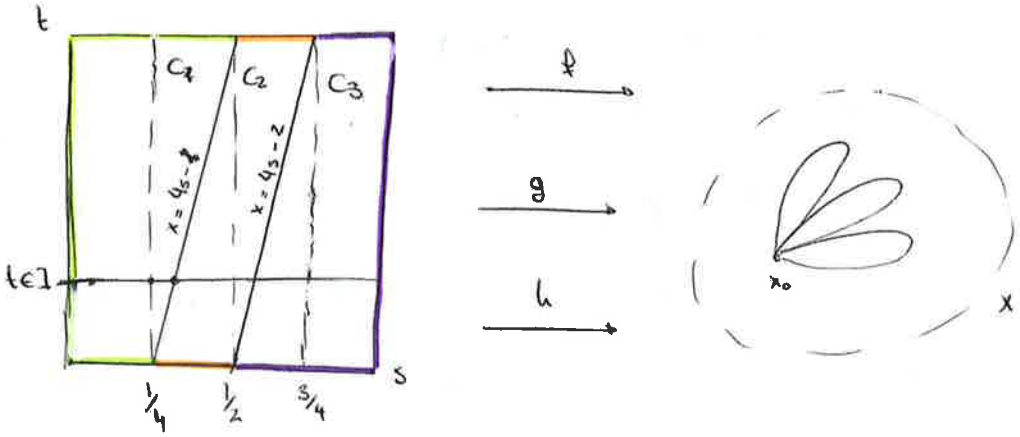
<u>Dem</u>: Asociatividad: $\forall [f], [g], [h] \in \pi_1(X, x_0)$

$([f]*[g])*[h] = [f]*([g]*[h]) \Leftrightarrow$

$\forall f, g, h$ lazos en X con base en x_0 : $(f*g)*h \simeq_{\{0,1\}} f(g*h)$?

1. $\rightarrow ((f*g)*h)(s) = \begin{cases} f(4s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ g(4s-1) & \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ h(2s-1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$

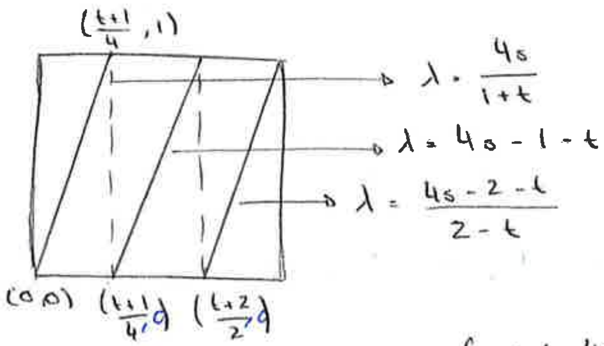
2. $\rightarrow (f*(g*h))(s) = \begin{cases} f(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g(4s-2) & \frac{1}{2} \leq s \leq 3/4 \\ h(4s-3) & \frac{3}{4} \ldots \end{cases}$



$\forall t \in I = [0,1]$

$$[0,1] = \left[0, \frac{t+1}{4}\right] \cup \left[\frac{t+1}{4}, \frac{t+2}{4}\right] \cup \left[\frac{t+2}{4}, 1\right]$$

para t prefijado



Definimos: $H(s,t) := \begin{cases} f\left(\frac{4s}{1+t}\right) & 0 \le s \le \frac{t+1}{4} \\ g(4s-1-t) & \frac{t+1}{4} \le s \le \frac{t+2}{4} \\ h\left(\frac{4s-2-t}{2-s}\right) & \frac{t+2}{4} \le s \le 1 \end{cases} \quad t \in I$

C_1, C_2, C_2 cerrados de I^2 y recubren $\Rightarrow$ H continua.

y $H|_{C_i}$ continua $\forall i$.

$\Big\{ f(4s) \quad 0 \le s \le \frac{1}{4}$ ...

$= (f*(g*h))(0)$

$*$ $H(1,t) = h(1) = ((f*g)*h)(1) =$ ... $(f*(g*h))(1)$

Coinciden extremos $\Rightarrow$ homotopía.

Elemento neutro: Sea c ap. cte de valor x_0, $c: I \longrightarrow X$

Veamos que $\forall [f] \in \Pi_1(X, x_0)$, $[f]*[c] = [f] = [c]*[f]$

$\Leftrightarrow \forall f$ lazo en X con base x_0, $f*c \simeq_{\{0,1\}} f \simeq_{\{0,1\}} c*f$?

Elemento simétrico: $\forall f$ camino en X

$f': I \longrightarrow X$

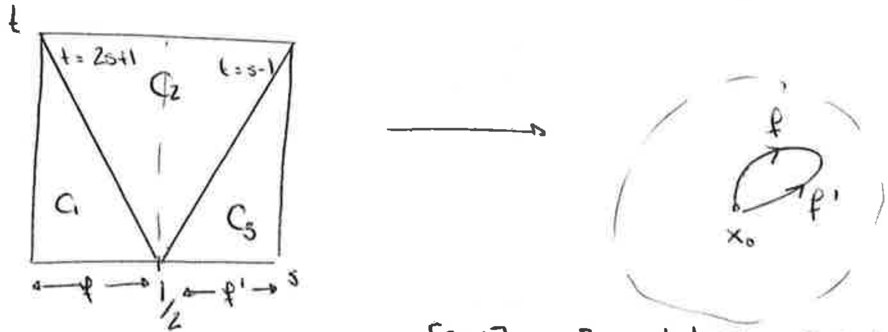
$t \longrightarrow f(1-t)$

f' camino opuesto.

Veamos que $\forall [f] \in \Pi_1(X, x_0)$, $[f]*[f'] = [c] =$
$= [f']*[f]$

$f*f' \simeq_{\{0,1\}} c \simeq_{\{0,1\}} f'*f$

$$(f*f')(s) = \begin{cases} f(2s) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ f'(2s-1) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$



$[0,1] = [0, \frac{1-t}{2}] \cup [\frac{1-t}{2}, \frac{1+t}{2}] \cup [\frac{1+t}{2}, 1]$

$$H(s,t) = \begin{cases} f(2s) & 0 \le s \le \frac{1-t}{2} \\ f(1-t) & \frac{1-t}{2} \le s \le \frac{1+t}{2} \qquad t \in I \end{cases}$$

Def: Sea X e.t. y $x_0 \in X$. Entonces $\Pi_1(X, x_0)$ con la operación $*$, se llama grupo fundamental de X con base x_0.

$X \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X \xrightarrow{h} X$

$(f*g)*h \simeq_{\{0,1\}} f*(g*h)$

en X, t.q. $f(1)=g(0)$, $g(1)=h(0)$,

$\simeq_{\{0,1\}} f*(g*h)$

$c_a \xrightarrow{f} c_b$

$c_a * f \simeq_{\{0,1\}} f \simeq_{\{0,1\}} f * c_b$

t.q. $f(0)=a$, $f(1)=b$, entonces $c_a * f \simeq_{\{0,1\}} f \simeq$

$a \xrightarrow{f} b$

$a \xleftarrow{f'} b$

$f*f' \simeq_{\{0,1\}} c_a$

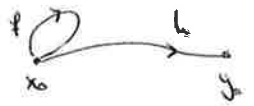
$f'*f \simeq_{\{0,1\}} c_b$

t.q. $f(0)=a$, $f(1)=b$, entonces $f*f' \simeq_{\{0,1\}}$

$\simeq_{\{0,1\}} c_b$.

Prop: Sea X e.t. conexo por caminos, $\forall x_0, y_0 \in X$ es $\Pi_1(X, x_0)$ isomorfo a $\Pi_1(X, y_0)$.

Dem:



$\exists h: I \longrightarrow X$ continua, $h(0)=x_0$, $h(1)=y_0$

$\forall f$ lazo en X con base x_0, $h'*(f*h)$ lazo en X con base y_0.

Si g es lazo en X con base x_0, $f \simeq_{\{0,1\}} g \Rightarrow \exists H$ homotopía de f en g.

$$(h'*(f*h))(s) = \begin{cases} h'(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ f(4s-2) & \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{3}{4} \\ h(4s-3) & \frac{3}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Sea $F: I \times I \longrightarrow X$

homotopía de F a cada uno de estos es continua porque f' y

h, h' son continuas.

$h' * (f * h) \simeq_{\{0,1\}} h'(g * h) \Rightarrow \exists \varphi : \Pi_1(X, x_0) \longrightarrow \Pi_1(X, y_0)$

$$[f] \longrightarrow [h' * f * h]$$

ap.

Veamos que φ isomorfismo: $\forall [f_1], [f_2] \in \Pi_1(X, x_0)$

$$\varphi([f_1] * [f_2]) = \varphi([f_1 * f_2]) = [h' * (f_1 * f_2) * h] =$$

$$\underset{\text{asocial.}}{=} [(h' * f_1) * (f_2 * h)] \underset{h * h' \simeq_{\{0,1\}} c_{x_0}}{=}$$

$$= [(h' * f_1) * (h * h') * (f_2 * h)] =$$

$$= [h' * (f_1 * h) * h' * (f_2 * h)] =$$

$$= [h' * (f_1 * h)] * [h' * (f_2 * h)] =$$

$$= \varphi([f_1]) * \varphi([f_2])$$

Isomorfismo: $\forall a, b \in X$
$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$
φ inyectiva, sobreyectiva
Homomorfismo: $f(ab) = f(a)f(b)$
$f(e) = e'$, $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

$\psi : \Pi_1(X, y_0) \longrightarrow \Pi_1(X, x_0)$ t.q. ψ isomorfismo.

$$[g] \longrightarrow [h * (g * h')]$$

Veamos que $\psi \circ \varphi = 1_{\Pi_1(X, x_0)}$ y $\varphi \circ \psi = 1_{\Pi_1(X, y_0)}$

$$(\psi \circ \varphi)([f]) = \psi(\varphi([f])) = \psi([h' * (f * h)]) =$$

$$= [h * (h' * f * h) * h'] = [(h * h') * f * (h * h')] \simeq$$

$$= [c_{x_0} * f * c_{x_0}] = [f] \quad \forall f \in \Pi_1(X, x_0)$$

Si X es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, entonces $\Pi_1(X, x_0)$ es trivial. (cualesquiera $a, b \in X$, están unidos por una recta en X)

conexo por caminos. Se llama grupo fundamental de X

fundamental de X con base x $\forall x \in X$.

$\varphi: X \to Y$ continua, f lazo en X con base

$\varphi_* : \Pi_1(X, x_0) \longrightarrow \Pi_1(Y, \varphi(x_0))$ es homomorfismo de grupos.

$$[f] \longrightarrow [\varphi \circ f]$$

Dem: f_1, f_2 lazos en X con base x_0

$$(f_1 * f_2)(t) = \begin{cases} f_1(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ f_2(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Homomorfismo de grupos
$\forall a, b \in X$
$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$

$$(\varphi \circ (f_1 * f_2))(t) = \begin{cases} (\varphi \circ f_1)(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ (\varphi \circ f_2)(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} = (\varphi \circ f_1) * (\varphi \circ f_2)$$

$$\varphi([f_1] * [f_2]) = \varphi([f_1 * f_2]) = [\varphi \circ (f_1 * f_2)] =$$

$$= [(\varphi \circ f_1) * (\varphi \circ f_2)] = [\varphi \circ f_1] * [\varphi \circ f_2] =$$

$$= \varphi_*([f_1]) * \varphi_*([f_2])$$

$\boxed{\text{Prop:}}$ 1) $\forall X$ e.t., $\forall x_0 \in X$. $\varphi = 1_X \Rightarrow \varphi_* = 1_{\pi_1(X, x_0)}$

2) $\forall X, Y, Z$ e.t. $\forall x_0 \in X$, $\varphi: X \to Y$ ap. continua y $\psi: Y \to Z$ ap. continua. $\Rightarrow (\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Z, (\psi \circ \varphi)(x_0))$

3) $\varphi, \psi : X \to Y$ continua t.q. $\varphi \simeq_{\{x_0\}} \psi \Rightarrow \varphi_* = \psi_*$

4) $r: X \to A$ retracción y $j: A \hookrightarrow X \Rightarrow \forall a \in A$,

$r_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(A, a)$ es epimorfismo y

$j_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$ es monomorfismo.

Dem: 1) $\varphi = 1_X : X \to X$

$$= \psi_* [\varphi_* [f]] \Rightarrow (\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$$

3) $x_0 \in X$, $\varphi \simeq_{\{x_0\}} \psi \iff \exists H : X \times I \longrightarrow Y$ homotopía.

$$(x_0, t) \longrightarrow \varphi(x_0) = \psi(x_0)$$

$\forall [f] \in \pi_1(X, x_0)$: f lazo en X con base x_0 $\overset{?}{\Rightarrow}$

$\varphi \circ f \simeq_{\{0,1\}} \psi \circ f$.

Sea $F : I \times I \longrightarrow Y$

$$(s,t) \longrightarrow H(f(s), t) \Rightarrow F \text{ continua.}$$

$$(0,t) \longrightarrow H(x_0, t) = \varphi(x_0) = \psi(x_0)$$

$$(1,t) \longrightarrow H(x_0, t) = \varphi(x_0) = \psi(x_0) \quad \forall t \in I.$$

$\Rightarrow F$ homotopía.

$\Rightarrow \varphi_*([f]) = \psi_*([f]) \Rightarrow \varphi_* = \psi_*$ (mismo homomor.)

4) $r \circ j = 1_A \underset{1)}{\Rightarrow} (r \circ j)_* = (1_A)_* = 1_{\pi_1(A,a)}$

$\Rightarrow \begin{cases} j_* \text{ inyectiva} \Rightarrow \text{monomorfismo} \\ r_* \text{ suprayectiva} \Rightarrow \text{epimorfismo.} \end{cases}$

Corolario: Si X, Y e.t. y $\varphi : X \longrightarrow Y$ homeomorfismo, entonces $\varphi_* : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(X, \varphi(x))$ es isomorfismo $\forall x \in X$.

Dem: $\varphi^{-1} \circ \varphi = 1_X \underset{1)\,2)}{\Rightarrow} (\varphi^{-1})_* \circ \varphi_* = 1_{\pi_1(X,x)}$

$\varphi \circ \varphi^{-1} = 1_Y \Rightarrow \varphi_* (\varphi^{-1})_* = 1_{\pi_1(Y, \varphi(x))}$

$\Rightarrow \varphi_*$ isomorfismo. $\quad (\varphi_*)^{-1} = (\varphi^{-1})_*$

Corolario: Sean X, Y e.t., $x \in X$ y $\varphi_1, \varphi_2 : X \longrightarrow Y$ ap. continua t.q. $\varphi_1 \simeq \varphi_2$. Entonces $\exists h$ es un camino en Y que conecta $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ t.q. $\varphi_{1*} = \varphi_h \circ \varphi_{2*}$ siendo φ_h un isomorfismo t.q.

$\varphi_{1*} : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, \varphi_1(x))$

$\varphi_{2*} : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, \varphi_2(x))$

$$\varphi_h : \pi_1(Y, \varphi_2(x)) \longrightarrow \pi_1(Y, \varphi_1(x))$$
$$[g] \longrightarrow [h * (g * h')]$$

$$\varphi_{1*}([f]) = [\varphi_1 \circ f] \quad \forall [f] \in \pi_1(x, x)$$

$$\varphi_h \circ \varphi_{2*}([f]) = \varphi_h([\varphi_2 \circ f]) = [h * (\varphi_2 \circ f) * h']$$

$$F : I^2 \longrightarrow Y$$
$$(s,t) \longrightarrow \begin{cases} h(2s) & 0 \le s \le \frac{1-t}{2} \\ H\left(f\left(\frac{4s+2t-2}{3t+1}\right), 1-t\right) & \frac{1-t}{2} \le s \le \frac{3+t}{4} \\ h'(4s-3) & \frac{3+t}{4} \le s \le 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ F homotopía entre los dos lazos.

Prop: Sean X e Y e.t. $x \in X$ y $\varphi : X \to Y$ equivalencia homotópica y ψ inversa homotópica. Entonces $\varphi_* : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$ es isomorfismo y $\psi_* : \pi_1(Y, \varphi(x)) \longrightarrow \pi_1(X, \psi(\varphi(x)))$ es isomorfismo.

Dem: $\psi \circ \varphi \simeq 1_X \Rightarrow \exists h$ camino en X que conecta $(\psi \circ \varphi)(x)$ y x t.q. $(\psi \circ \varphi)_* = (\psi_* \circ \varphi_*) =$
$= \varphi_*(1_X) = \varphi_*$

$\varphi \circ \psi \simeq 1_Y \Rightarrow \exists k$ camino en Y que conecta $(\varphi \circ \psi)(\varphi(x))$ y $\varphi(x)$ t.q. $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ (1_Y)_*$

φ_h y φ_k son isomorfos $\Rightarrow$ φ_*, ψ_* son isomorfismos.

Corolario: Si X, Y e.t. son homotópicamente equivalentes y conexos por caminos entonces $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(Y, \varphi(x))$ (homeomorfos)

homomorfismo $\Rightarrow F = (p_{1*} * p_{2*}) : \pi_1(X \times Y, (a,b)) \to \pi_1(X, a) * \pi_1(Y, b)$

es homomorfismo.

F inyectiva: $F([f]) = F([g]) \Leftrightarrow \forall i = 1,2,\ p_{i*}([f]) =$
$= p_{i*}([g])$

$\Leftrightarrow \forall i = 1,2 \quad [p_i \circ f] = [p_i \circ g] \Rightarrow \exists H_i$ homotopía $\forall i = 1,2$
de $p_i \circ f$ en $p_i \circ g \Rightarrow H = (H_1, H_2): I^2 \longrightarrow X \times Y$ continua

$$(x,0) \longrightarrow (H_1(x,0), H_2(x,0))$$
$$(x,1) \longrightarrow g(x)$$
$$(0,t) \longrightarrow (H_1(0,t), H_2(0,t))$$
$$(1,t) \longrightarrow (H_1(1,t), H_2(1,t))$$

$\Rightarrow [f] = [g] \Rightarrow F$ inyectiva.

F suprayectiva: $\forall [f_1], [f_2] \in \pi_1(X,a) \times \pi_1(Y,b)$

$f: I \longrightarrow X \times Y$

$$t \longrightarrow \begin{cases} (f_1(2t), b) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (a, f_2(2t-1)) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} f_1(1) = a \\ f_2(0) = b \end{matrix} \quad \text{bien definida}$$

$f(0) = (a,b) = f(1) \Rightarrow f$ lazo en $X \times Y$ con base (a,b).

$$(p_1 \circ f)(t) = \begin{cases} f_1(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ a & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = (f_1 * C_a)(t) \Rightarrow$$

$\Rightarrow p_1 \circ f = f_1 * C_a \simeq_{\{0,1\}} f_1$

$\Rightarrow [p_1 \circ f] = [f_1]$

$$(p_2 \circ f)(t) = \begin{cases} b & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f_2(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \Rightarrow p_2 \circ f = C_b * f_2 \simeq_{\{0,1\}} f_2$$

$\Rightarrow [p_2 \circ f] = [f_2]$

Obs: Sea $D^1 = \{ z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1 \}$

$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ $\quad$ φ homomorfismo de $(\mathbb{R}, +)$ en $(\mathbb{S}^1, \cdot)$

$x \longrightarrow \cos 2\pi x + i \operatorname{sen} 2\pi x$

$$\varphi(x+y) = \cos 2\pi(x+y) + i \operatorname{sen} 2\pi(x+y) = (\cos 2\pi x + i \operatorname{sen} 2\pi x)$$

$$\cdot (\cos 2\pi y + i \operatorname{sen} 2\pi y) = \varphi(x)\varphi(y).$$

$\Rightarrow \varphi$ continua y abierta.

$\varphi|_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} : (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \longrightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$ homeomorfismo.

$\Rightarrow h = \varphi|_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} : \mathbb{S}^{-1} \setminus \{-1\} \longrightarrow (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ homeomorfismo.

$\boxed{\text{Teorema}}$: Sea f camino en $\mathbb{S}^1$ de origen 1, $\exists!\ \hat{f}$ camino en $\mathbb{R}$ de origen 0 t.q. $\varphi \circ \hat{f} = f$.

Dem: existencia: $\forall z, z' \in \mathbb{S}^1$, $d(z, z') < 1 \underset{z \neq -z'}{\Rightarrow} \frac{z}{z'} \neq -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow h(\frac{z}{z'}) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$f : I \longrightarrow \mathbb{S}^1$ continua $\underset{I \text{ metrizable compacto.}}{\Rightarrow}$ f uniformemente continua

$\exists \varepsilon > 0$ t.q. $|s - t| < \varepsilon \Rightarrow d(f(s), f(t)) < 1$

$\exists n \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{1}{n} < \varepsilon$: $\left| \frac{n-(i+1)}{n} - \frac{n-i}{n} t \right|$.

$= |t| \frac{1}{2} < \varepsilon \quad \forall t \in I. \quad \forall i = 0, \ldots, n-1$

Supongamos que $n = 1$, aparecen 0 y 1 $\;\underset{0\qquad\quad 1}{\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\dashv}$

$n-1$

..... Continua.

Lema: Sean f, g lazos en S^1 de base 1 y H homotopía de f en g relativa a $\{0,1\}$, $\exists!\ \hat{H}$ homotopía de $\hat{f}$ en $\hat{g}$ relativa a $\{0,1\}$ t.q. $\varphi \circ \hat{H} = H$

Obs: Si f, g lazos en S^1 con base 1, $f \simeq_{\{0,1\}} g \Rightarrow \hat{f}, \hat{g}$ caminos de origen 0 en $\mathbb{R}$ t.q. $\hat{f} \simeq_{\{0,1\}} \hat{g} \Rightarrow \hat{f}(0) = \hat{g}(0) = 0$ y $\hat{f}(1) = \hat{g}(1) \in \mathbb{Z}_p$

$(\varphi \circ \hat{f})(1) = f(1) = 1$
$\quad \shortparallel$
$\varphi(\hat{f}(1)) \Rightarrow \hat{f}(1) \in \mathbb{Z}_p$

Análogamente $\hat{g}(1) \in \mathbb{Z}_p$

Esto permite definir una ap. $\alpha : \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}_p$ (grado del
$[f] \longrightarrow \hat{f}(1)$ lazo f)

Teorema: El grupo fundamental de la circunferencia es isomorfo al grupo aditivo de los enteros.

Dem: α es isomorfismo de grupos.

$\forall [f], [g] \in \pi_1(S^1, 1) \Rightarrow \exists!\ \hat{f}, \hat{g}$ caminos en $\mathbb{R}$ de origen 0 t.q. $\varphi \circ \hat{f} = f$ y $\varphi \circ \hat{g} = g$

$\hat{f}(1) = a$ y $\hat{g}(1) = b \in \mathbb{Z}_p$

Sea $\hat{k} : I \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad t \longrightarrow a + \hat{g}(t)$
$\Rightarrow \hat{k}$ camino en $\mathbb{R}$ de origen a y extremo $a+b$. Definida en $\hat{f} * \hat{k}$

$(\varphi \circ (\hat{f} * \hat{k}))(t) = ((\varphi \circ \hat{f}) * (\varphi \circ \hat{k}))(t) \underset{\uparrow}{=} (f * g)(t) \Rightarrow$

$(\varphi \circ \hat{k})(t) = \varphi(a + g(t)) =$

α suprayectiva: $\forall m \in \mathbb{Z}_p$. Sea $\hat{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}$
$t \longrightarrow st$ $\Rightarrow \hat{f}$ continua y $\hat{f}(0) = 0$

$\varphi(\hat{f}(1)) = \varphi(m1) = \varphi(m) = 1$

$\varphi(\hat{f}(0)) = \varphi(0) = 1 \Rightarrow \varphi \circ \hat{f}$ lazo con base 1.

$\alpha([f]) = \hat{f}(1) = m$

α monomorfismo: $\ker([f]) = 0$:

$\forall \quad [f] \in \Pi_1(S^1, 1)$ t.q. $\alpha([f]) = 0$, $\hat{f}(1) = 0$

$\Rightarrow \tilde{f}$ lazo en $\mathbb{R}$ con base 0 $\Rightarrow \tilde{f} \simeq_{\{0,1\}} \hat{C}_0$
$\mathbb{R}$ contráctil

$\Rightarrow f = \varphi \circ \hat{f} \simeq_{\{0,1\}} \varphi \circ \hat{C}_0 : I \longrightarrow S^1 \Rightarrow [f] = [c_1]$
elemento neutro de $\Pi_1(S^1, 1)$.

$\boxed{\text{Prop}}$: La circunferencia no es retracto del disco $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| \leq 1\}$

Dem: Si $\exists\ r : D \longrightarrow S^1$ retracción $\Rightarrow r_* : \underset{\underset{0}{\cong}}{\Pi_1(D)} \longrightarrow \underset{\underset{\mathbb{Z}_p}{\cong}}{\Pi_1(S^1)}$ $\lightning$

$\boxed{\text{Teorema}}$ del punto fijo de Brower (dim 2): Toda ap. continua del disco en sí mismo tiene algún punto fijo.

Dem: Si $\exists f : D \longrightarrow D$ continua t.q. $f(x) \neq x \quad \forall x \in D$

Sea R_x la semirrecta abierta de extremo $f(x)$ determinado por x

$r : D \longrightarrow S^1$
$x \longrightarrow R_x \cap S^1$ $\Rightarrow r$ continua y los puntos de la circunf. quedan fijos.

Prop: Si X e Y e.t. del mismo tipo de homotopía y X es simplemente conexo, Y también lo es.

$\exists f: X \to Y$ cont.
$\exists g: Y \to X$ cont. t.q. $g \circ f \simeq 1_X$ $f \circ g \simeq 1_Y$

Dem: $\exists f: X \longrightarrow Y$ continua.

$\exists g: Y \longrightarrow X$ continua. t.q. $g \circ f \simeq 1_X$ y $f \circ g \simeq 1_Y$

$$\Rightarrow \exists H: Y \times I \longrightarrow Y \text{ continua.} \qquad \Rightarrow Y = \bigcup_{y \in Y} H(\{y\} \times I) \cup f(X)$$
$$(y,0) \longrightarrow f(g(y))$$
$$(y,1) \longrightarrow y$$

$\Rightarrow \forall y \in I$, $H(\{y\} \times I) \cap f(X) \neq \emptyset$ y $H(y,0) = f(g(y))$ $\underset{f \text{ cont.}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \forall y \in Y$, $H(\{y\} \times I)$, $f(X)$ conexo por caminos $\Rightarrow$

Y conexo por caminos.

$0 \simeq \pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$

Corolario: El ser simplemente conexo es invariante topológico.

Prop: Todo e.t. contráctil es simplemente conexo.

Dem: X contráctil, $\forall x, y \in X$: $c_x, c_y : X \to X$ ap. cte de valor x e y $(c_x \simeq c_y)$

$$\Rightarrow \exists H: X \times I \longrightarrow X \text{ continua.}$$
$$(s,0) \longrightarrow x$$
$$(s,1) \longrightarrow y \qquad \Rightarrow h: I \longrightarrow X \text{ continua}$$
$$t \longrightarrow H(x,t)$$
$$0 \longrightarrow x$$

... conexo por caminos $\Leftrightarrow$ X, Y conexos por caminos.

$\pi_1(\ldots) \simeq \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$

Obs: El ser simplemente conexo no es hereditario.

D contráctil y S^1 no (porque $\pi(S^1)$ no es trivial)

Obs: El cociente de un e.t simplemente conexo, no es necesariamente simplemente conexo.

Prop: Si X e.t. simplemente conexo y A retracto suyo, entonces A es simplemente conexo.

Dem: $\forall x,y \in A \subset X$, $\exists f : I \longrightarrow X$, $0 \longrightarrow x$, $1 \longrightarrow y$ $\Rightarrow \exists \tau : X \longrightarrow A$ retracción

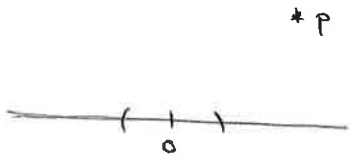
t.q. $\tilde{f} = \tau \circ f : I \longrightarrow A$ continua, $0 \longrightarrow x$, $1 \longrightarrow y$

$\tau_* : \pi_1(X, x) \longrightarrow (A, x)$ es epimorfismo $\Rightarrow \pi_1(A,x) \approx 0$

Def: Sea M e.t. Diremos que es una variedad topológica

La def. no recoge la def de borde. Si no la banda de Möbius y el cilindro serían variedad.

Obs: Variedad top. $\not\Rightarrow T_2$



$X = \mathbb{R} \cup \{p\}$ t.q. $p \notin \mathbb{R}$

$T|_{\mathbb{R}} = T_u$ y $\mathcal{B}(p) = \{ (\mathring{U} \setminus \{0\}) \cup \{p\} \mid \mathring{U}$ es ent. de 0 en T_u de $\mathbb{R} \}$

(X, T) variedad no T_2.

Obs: Variedad top. $\not\Rightarrow$ II A N

$\mathbb{R}^n$

Obs: Variedad top. $\not\Rightarrow$ conexo.

Ejemplo: $\mathbb{R}^n$ variedad top de dim n.

Ejemplo: $\mathbb{S}^1$ variedad top. de dim 1.

Ejemplo: La superficie esférica y el toro son variedades top. de dim. 2.

Obs: Si M, N variedades top. de dimensión m y n $(n \neq m)$

$M + N$ no es variedad top.

Prop: Si M y N variedades top. de dim. n, entonces $M+N$ var. top de dim n

Obs: Variedad top. y conexo $\not\Rightarrow$ II. A.N.

Sea A conjunto no numerable con una buena ordenación.

$X = (0,1) \cup (A \times [0,1])$ $\Rightarrow$ X variedad top.

Con el orden usual en $\mathbb{R}$.

$A \times [0,1]$ con el orden lexicográfico.

$\forall a \in A$, $\{a\} \times [0,1] \supset B$ de una base $\mathcal{B}$ de la top.

$\forall \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ no numerable $\Rightarrow$ X no cumple II A.N.

$C \neq \emptyset, X$ abierto y cerrado en X $\Rightarrow$ $\forall a \in A$, $C \cap \{\{a\} \times [0,1]\}$ abierto y cerrado en $\{\{a\} \times [0,1]\}$

$\Rightarrow \exists U^{(a_0,0)}$ en X t.q. $U^{(a_0,0)} \subset C \Rightarrow \exists a' \in A$ t.q. $(a', b') \in U^{(a_0,0)}$ para algún $b \in [0,1] \Rightarrow \{a'\} \times [0,1] \subset C$

Def. Sea N

Def: Sea M variedad top. de dim n, (h_j, U_j), (h_k, U_k) dos cartas de M t.q. $U_j \cap U_k \neq \emptyset$. La ap. $h_{jk} = h_k \circ h_j^{-1} : h_j(U_j \cap U_k) \to h_k(U_j \cap U_k)$ se llama cambio de cartas.

Def: Sea M variedad top. de dim n. y A un atlas suyo. Se dice que A es un atlas diferenciable si $\forall (h,U), (h',U')$ cartas de A $U \cap U' = \emptyset$ o $h \circ h'^{-1}$ es diferenciable.

Obs: Si (h_j, U_j), (h_k, U_k) son cartas de M: $h_{jj} = id$ y $h_{kj} = (h_{jk})^{-1}$

Obs: Si A es un atlas diferenciable, sus cartas son difeomorfismos.

Obs: Sea M variedad top y A atlas diferenciable de M, la colección de todas las cartas de M t.q. sus cambios de cartas de A son dif. es un atlas dif maximal.

Def: Sea M var. topológica, se dice que tiene una estructura dif. si tiene algún atlas dif. maximal.

Def: Se llama variedad diferenciable al par formado por una var. top. y una estructura dif.

Ejemplo U abierto de $\mathbb{R}^n$. $id : U \longrightarrow U$

(id, U) es una carta de U y id. es difeo. $\Rightarrow$ U var. dif.

Ejemplo $\forall h : U \longrightarrow V$ dif. de U abierto de M en V abierto de $\mathbb{R}^n$

(h, U) carta. A atlas de M con las cartas difeo.

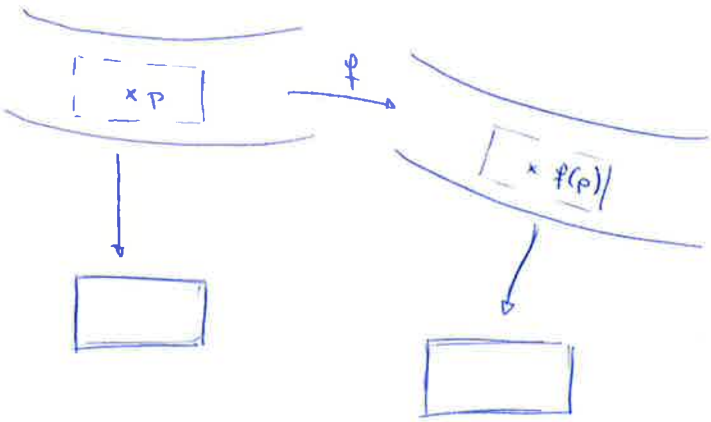
$D(A)$ atlas dif.

Ejemplo: S^n de dim n.

$h_{jk}^{-1} : B \subset \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow S^n$

$$y_h = \begin{cases} x_h & h = 1, \dots, j-1 \\ \left(1 - \sum_{h=1}^{n-1} x_h^2\right) & h = j \\ x_{h-1} & h = j+1, \dots, n \end{cases}$$

Def: Sean M, N var. dif. Se dice que f es <u>diferenciable en un punto</u> $p \in M$ si $\exists (h, U)$ carta de M y $\exists (k, V)$ carta de N t.q. $f(p) \in V$ y $k \circ f \circ h^{-1} : \underset{\subset \mathbb{R}^m}{h(U)} \longrightarrow \underset{\subset \mathbb{R}^n}{k(V)}$ sea dif.



En este caso, lo anterior se verifica para cualesquiera cartas.

Se dice que f es <u>ap. dif.</u> si es dif. $\forall p \in M$.

<u>Obs:</u> $\forall M$ var. dif., 1_M es dif.

<u>Obs:</u> $\forall M, N, P$ var. dif. $f: M \longrightarrow N$ y $g: N \longrightarrow P \Rightarrow g \circ f$ ap. dif.

Def: Sean N, M var. dif., $f: M \longrightarrow N$ ap. Se dice que f es un <u>difeomorfismo</u> si es dif., biyectiva y f^{-1} es dif.

Def: Las <u>variedades dif.</u> que $\exists f$ difeomorf. son difeomorfas.

<u>Obs:</u> En S^7 hay estructuras dif. que no son difeomorfas.